

授業用参考資料のための「量と数の理論」紹介

滋賀大学名誉教授 丹羽 雅彦 (Masahiko NIWA)

Shiga University

はじめに

小学校 1 年生で登場する自然数は、さまざまな有限集合（離散量）から 1 対 1 対応の概念を介して基数（集合の要素の個数）を認識することでえられる。このことを背景として子どもたちにとって離散量が易しいと考え、離散量を基にして分数を教えようとする（割合分数）と、分数の四則演算を学ぶ場面でさまざまな困難につきあたる。分数を導入する段階では、等分割が可能な連続量を基にする（量分数）ことが正しい選択である。また、負の数の導入に際して、マイナスの温度（量ではなく点である）をイメージの基にすると、加法で困難につきあたる。負の数の演算には例えば、数直線上の移動をイメージさせることで克服できる。数学上のさまざまな概念を学習するとき「概念イメージ」が重要な役割を果たすが、数の学習においては、それは何らかの「量」である。概念の導入の際に、子どもに興味をもたせることは重要なことであるが、その選択はその後の学習にとって適切なものでなくてはならない。教材について適切な選択と考察をするために理論的な示唆を与えることが本授業のこの節の主たる目的である。

【注意】 以下の内容は、授業用資料を目的としたもので、末尾の参考文献のいくつかから引用・整理した解説であり、オリジナリティのある論文とは違い引用の記載等を行っていない。

第1章 (量を基盤としない) 形式的な(代数的な)数の拡大の理論

<記号> N =自然数の集合, Z =整数の集合, Q^+ =正の有理数の集合,
 Q =有理数の集合, R =実数の集合, C =複素数の集合

(0) 集合の上の同値関係と商集合

X を集合, X 上の 2 項関係 $x \sim y$ ($x, y \in X$) が同値関係とは, 次を満たすこと

反射律: $x \sim x$

対称律: $x \sim y$ ならば $y \sim x$

推移律: $x \sim y, y \sim z$ ならば $x \sim z$

同値類 $\alpha(x) = \{y \in X; x \sim y\} \subset X$ を考えると

$x \sim y$ ならば, $\alpha(x) = \alpha(y)$ (部分集合として一致)

$x \not\sim y$ でないならば, $\alpha(x) \cap \alpha(y) = \emptyset$ (交わらない)

となるから, 同値関係から類別(クラス分け)がえられる。

類を要素とする新しい集合を商集合といい, $X/\sim$ で表す。

(1) 自然数の集合 N の定義 (特徴付け)

Peano の公理系

自然数は, 基本概念 N , 特別な要素 1, 対応 S に対する次の公理によって記述される。

<自然数論の形式言語による公理化>

(P1) $1 \in N$

(P2) $n \in N$ ならば, $S(n) \in N$

(P3) $n \in N$ ならば, $S(n) \neq 1$

(P4) $1 \in E$ かつ $n \in E$ から常に $S(n) \in E$ が従うならば, $N \subset E$ が成り立つ。

(P5) $m, n \in N, S(m) = S(n)$ ならば, $m = n$

Dedekind による自然数の集合論的構成

自然数全体は、特別な要素 1 を含み、次の公理を満たすような、自分自身への写像 S (後継関数) が与えられた集合 N として特徴づけられる。

(S1) S は単射である。

(S2) $1 \notin S(N)$

(S3) もし M が 1 を含み、 S によって自分自身に写されるような N の部分集合であるならば、 M は N と一致する。

(2) N から Q^+ の構成

$X = N \times N$ 直積集合 (= 自然数の順序対を要素とする集合)

同値関係 $(a, b) \sim (c, d)$ を $ad = bc$ のとき成り立つと定義する。反射律, 対称律, 推移律 は容易に確かめることができる。

同値類 $\alpha(a, b)$ を分数 a/b と書くと, 商集合

$$(N \times N)/\sim = \{a/b; (a, b) \in N \times N\}$$

は正の有理数の集合 Q^+ となる。演算は次のように拡張される。

$$\text{加法: } \alpha(a, b) + \alpha(c, d) = \alpha(ad + bc, bd)$$

$$\text{乗法: } \alpha(a, b) \alpha(c, d) = \alpha(ac, bd)$$

乗法は自然な定義で, 加法は結合・交換・分配法則が成り立つよう定めたものになっている。(即ち, そのようなものとして一意的に定まる。)

(3) N から Z の構成

X は(2)のときと同じで, 同値関係 $(a, b) \sim (c, d)$ を $a + d = b + c$ のとき成り立つと定義する。反射律, 対称律, 推移律は容易に確かめることができる。同値類 $\alpha(a, b)$ を差 $a - b$ と書くと, 商集合

$$(N \times N)/\sim = \{a - b; (a, b) \in N \times N\}$$

は整数の集合 Z となる。演算は次のように拡張される。

$$\text{加法: } \alpha(a, b) + \alpha(c, d) = \alpha(a + c, b + d)$$

乗法： $\alpha(a, b) \alpha(c, d) = \alpha(ac + bd, ad + bc)$

加法は自然な定義で、乗法は結合・交換・分配法則が成り立つよう定めたものになる。

(4) $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Q}$ の構成

$X = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ とし、後は(2)と全く同じように定義すれば、

$$(\mathbf{Z} \times \mathbf{N}) / \sim = \{ a/b; (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \}$$

は(正負をもつ)有理数の集合 $\mathbf{Q}$ となる。演算は(2)と同じ。

(5) $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ へ：実数の構成

『すべての実数はなぜ無限小数で表すことができるのか?』

この問いは、有理数の集合 $\mathbf{Q}$ からどのように実数の集合 $\mathbf{R}$ を構成するかに関わっている。実数の構成には、2つの方法がある。

① *Dedekind*(デデキント)の切断による構成法

有理数 $\mathbf{Q}$ を大小関係により直線的に並べる。



A, B が次の条件を満たす $\mathbf{Q}$ の部分集合であるとき、 $(A | B)$ は $\mathbf{Q}$ の切断であるという。

$$A \neq \phi, B \neq \phi, A \cup B = \mathbf{Q}, A \cap B = \phi$$

$$a \in A, b \in B \text{ ならば, } a < b$$

つまり、有理数 $\mathbf{Q}$ を小さい組 A と大きい組 B の真二つに分ける。

そのとき、次の3つの型が起こる。

Ⅱ型： A に最大数があり， B に最小数がない。

Ⅲ型： A に最大数がなく， B に最小数がある。

Ⅳ型： A に最大数がなく， B に最小数がない。

「Ⅰ型： A に最大数があり， B に最小数がある。」が決して起こらない訳は，2つの異なる有理数の間には，どちらとも異なる新しい有理数が存在する（有理数の稠密性という）ことから分かる。

切断がⅡ型，Ⅲ型のときは，境目に有理数がある。切断がⅣ型のときは，境目に有理数がなく，「隙間」が空いている。直観的には，Ⅳ型の切断に対して1つずつ新しい数をつけ加えていくと，実数の集合 $\mathbf{R}$ がえられるという仕組みである。数学的には，切断そのものを実数と考える。このように $\mathbf{R}$ を定義してやると，実数の集合 $\mathbf{R}$ には有理数の集合 $\mathbf{Q}$ が備えていた加減乗除の四則演算および大小関係が拡張できるとともに，今度は， $\mathbf{R}$ の切断($A \mid B$)に対しては，Ⅳ型の切断は起こらず，Ⅱ型，Ⅲ型の切断だけが起こる。このことを，「**実数の連続性**」という。

② Cauchy列による完備化を用いた構成法

有理数 $\mathbf{Q}$ のコーシー列 $\{a_n\}$ を考える。コーシー列とは，

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0$$

を満たす数列，即ち，お互いがだんだん狭まっていくような数列のこと。 $\mathbf{Q}$ のコーシー列は $\mathbf{Q}$ 内では必ずしも収束しない。コーシー列の極限にあたるものをすべて考えると，実数の集合 $\mathbf{R}$ がえられる。さらに， $\mathbf{R}$ のコーシー列を考えると，これらはすべて $\mathbf{R}$ 内で必ず収束する。（この性質を， $\mathbf{R}$ は**完備**であるという。このように，コーシー列を使って構成される，それを含む最小の完備な集合をもとの集合の**完備化**という。）

無限小数 $1.41421356 \cdots (= \sqrt{2})$ を考えて，

$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, \dots$ と定義する。

$$m < n \text{ のとき, } |a_n - a_m| < \frac{1}{10^{m-1}}$$

だから， $\{a_n\}$ は $\mathbf{Q}$ のコーシー列になる。この無限小数はある無理数を表すものだから

ら、 $\{a_n\}$ は $\mathbf{Q}$ 内では収束しない $\mathbf{Q}$ のコーシー列の例になっている。

無限小数の全体を $\mathbf{C}$ とすると、コーシー列の考察から、 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{R}$ と考えられる。(ここで、有限数列は途中から 0 がズーと並ぶ無限小数と考える。また、 $0.1399999\cdots$ と $0.1400000\cdots$ は極限が同じだから同じ数だと考える。)

$\mathbf{C}$ のコーシー列 $\{a_n\}$ を考察すると、 n, m が十分に大きいとき、 a_n と a_m は小数のある桁まで一致するようになる。 n, m をどんどん大きくすると、一致する桁はどんどん増えていく。こうして、 $\mathbf{C}$ のコーシー列は必ず $\mathbf{C}$ 内で収束する。よって、 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{Q}$ の完備化になる。 $\mathbf{Q}$ の完備化の一意性より、 $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ がえられるのである。

(注 1) 高校では、実数を無限小数で表される数と習うが、その根拠は上の $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ にある。

(注 2) $\mathbf{R}$ の構成法(1)と(2)は、全く様相が異なった方法に見えるが、同じ実数の集合 $\mathbf{R}$ を与えることを証明できる。

(注 3) 実数列に対して、『数列が収束するための必要十分条件は、コーシー列となること』が分かったが、これは、コーシーの収束判定条件と呼ばれ、解析学(微分積分学)において最も基本となる収束判定条件である。

(6) $\mathbf{R}$ から $\mathbf{C}$ へ

$i^2 = -1$ を満たす i を考え、

$\mathbf{C} = \{(a+bi); a, b \in \mathbf{R}\}$ とおく。

加法： $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

乗法： $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

逆数： $(a+bi)^{-1} = (1/a^2+b^2)(a-bi)$

により四則演算が定義される。

第2章 ギリシア数学における「量と数」

§ 1. ピタゴラス学派の通約不能量（無理数）の発見

紀元前5世紀頃、ピタゴラス学派の Metapont の *Hippasus* は、
通約不可能な線分を発見した。（現代的な観点からは、無理数の発見）

a, u を同種の量とし、量の比 $a : u = ?$

$a = cu$ となる分数 $c = m/n$ が存在するときは、

$(1/n) u = e$ とおくと、 $a = me, u = ne$ すなわち、 a と u は e の自然数倍となる。

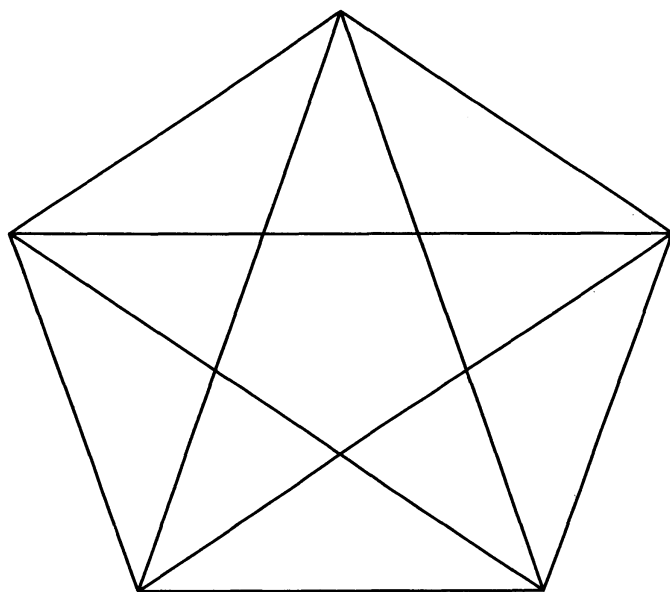
このようなとき、 a と u は通約可能であるという。（ e を公約量という）

そうでないとき、 a と u は通約不可能であるという。

ユークリッドの互除法は、整数だけでなく、長さのような連続量の場合にも拡張できる。

量は、“アルキメデスの性質” [任意の2量 a, b に対して、 $na > b$ となる自然数 n が存在する。（無限小量の非存在）] をもつことを仮定することにより、互除法の計算ができる。計算が有限回で終われば、ある量 e に関して $a = me, b = ne$ (m, n は整数) と表され、2量 a, b は通約可能であるという。無限に続くとき、2量 a, b は通約不能であるという。（現代的には、量の比が無理数であるという意味。）

紀元前5世紀頃、ピタゴラス学派の Metapont の *Hippasus* は通約不能な2つの線分を発見した。すなわち、下図のような Pentagramm(五角星形)を用いて、正五角形の対角線と辺の比が通約不能となることを示したのである。



上図を観察すれば、最初に、正五角形において、

対角線の長さ : 辺の長さ = 辺の長さ : (対角線の長さ - 辺の長さ)

が成り立つことが分かる。

外側の大きな正五角形の対角線の長さを a_0 , 辺の長さを a_1 , その差を $a_2 = a_0 - a_1$ で表すと、 $a_0 : a_1 = a_1 : a_2$ となる。また、差を $a_3 = a_1 - a_2$ とすると、同様な比例等式 $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$ を得る。このとき、 a_2, a_3 はそれぞれ中側の小さな正五角形の対角線と辺の長さに等しいことに注意する。

この操作は、無限に続けることができる。

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

$$a_2 = a_0 - a_1, a_3 = a_1 - a_2, a_4 = a_2 - a_3, \cdots$$

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \cdots$$

a_0 と a_1 に対するユークリッド互除法

$$a_0 = 1 \times a_1 + a_2,$$

$$a_1 = 1 \times a_2 + a_3,$$

$$a_2 = 1 \times a_3 + a_4 \quad \cdots$$

は有限で止まらない（無限に続く）ので、2つの長さ a_0 と a_1 は通約不能である。
 このように、正五角形の中に小さな正五角形が次々とできていく様子が正五角形の対角線と辺の長さが通約不能であることを美しい形で証明している。Pentagramm は、後にピタゴラス学派のシンボルとなったが、それは上記の美しい通約不能量の発見がピタゴラス学派の誇りであったことを示している。

§ 2. エウドクソスの量の比の理論

ユークリッド「原論」は、ギリシア数学の集大成であり、中世～近世初期において、論理的な思考力を養うための「数学教育の基礎」の役割を果たした。

＜ユークリッド「原論」の構成＞

第1～4巻：平面の直線図形（三角形、四角形など）および円についての合同あるいは作図に関する問題

第5巻：量の比の理論（これが、エウドクソスの理論）

第6巻：相似の理論

第7～9巻：整数論（倍数・約数・素数・等比級数など）

第10巻：無理数論

第11～13巻：立体幾何学

＜エウドクソス＞ プラトンと同時代の天才的数学者

(1) “数”の観念 *idée* は、1 (単位 *monad*) の集まったもの

- ・ 現代の“自然数”に対応（有理数や無理数は数の仲間に入れない）
- ・ 数は2つの演算（加法・乗法）を備えた体系という表象 *idée* をもつ。
- ・ 現代の有理数は“数の比”、即ち、整数の集合またはその部分集合上に定義された次の写像のこと：

p の q に対する比 $p:q$ とは、 q の倍数 N に対して 自然数 $p(Nq)$ を対応さ

せる写像である。

- ・ 有理数の集合は、写像の合成を積と考えて乗法群をなす。しかし、加法を考えない。

(注)エジプトやバビロニアの計算家は、すでに、分数の加法、分数と整数の加法を自由に使用していたが、ギリシア数学では哲学的な動機から考慮外においたのである。

(2) 量の理論は、あらゆる量に対して、同時に公理的に基礎づける。

<量の公理>同じ種類の量 $A, B, C, \dots$ に対して、

I. 比較可能性

① 同値関係となる**相等性**： $A=B$ は次の性質を満たす。

反射律 すべての量 A に対して、 $A=A$

対称律 $A=B$ ならば $B=A$

推移律 $A=B$ かつ $B=C$ ならば、 $A=C$

② 全順序関係となる**大小関係**： $A \leq B$ は次の性質を満たす。

反射律 すべての量 A に対して、 $A \leq A$

反対称律 $A \leq B$ かつ $B \leq A$ ならば、 $A=B$

推移律 $A \leq B$ かつ $B \leq C$ ならば、 $A \leq C$

比較可能性 すべての量 A, B に対して、次のいずれか1つが成り立つ。ただし、 $A < B$ とは、 $A \leq B$ かつ $A \neq B$ のこと。

$A < B$ または $A=B$ または $B < A$

II. 加法性：すべての量 A, B に対して、量の和 $A+B$ および $A > B$ のとき、量の

差 $A-B$ が定義され次の性質を満たす。

交換法則 $A+B=B+A$

結合法則 $(A+B)+C=A+(B+C)$

量の正性 $A+B > A$

差は和の逆演算 $(A-B)+B=A$ $(A+B)-B=A$

Ⅲ. アルキメデスの公理 (量の理論のかなめ石となる。)

すべての量 A, B に対して、自然数 n が存在して、 $nA > B$ が成り立つ。

ここで、 $nA = A + A + \cdots + A$ (n 個の和)

(無限小量の非存在を示す。)

1 種類の量の集合は、1 つの内算法 (加法) をもち、さらに量の比を作用域とする 1 つの外算法をもつ。この作用域は可換乗法群をなす。

(3) 量の比の相等関係と大小関係 (エウドクソス理論の根幹)

A と B は同種の量、 C と D は同種の量、 A, B と C, D は異種の量でも構わないとする。

量の比の相等 : $A : B = C : D$ は次の性質を満たすとき成り立つ。

「任意の自然数 m, n に対して、

$$mA < nB \text{ ならば、} mC < nD$$

$$mA > nB \text{ ならば、} mC > nD$$

が成り立つ。」

量の比の大小 : $A : B \leq C : D$ は次の性質を満たすとき成り立つ。

「任意の自然数 m, n に対して、

$$mA > nB \text{ ならば、} mC > nD$$

が成り立つ。」

- 量の比の集合があらゆる種類の量に対する共通の作用域をなすことは、比例式の第 4 項の存在に関する公理：

「量の比 $A : B$ と量 D が与えられたとき、 D と同種の量 C が存在して、 $A : B = C : D$ が成り立つ。」による。

量の比 $\times$ 量=量 の定義は、 $(A:B)D=C$ とする。

- ・ このようにして、あらゆる種類の量から定義される作用域（量の比の集合）は、すべて同一視される。（エウドクソスの天才的な着想）
具体的で多様性をもつ「量」から、抽象的で普遍的な「数」がえられるのである。
- ・ 自然数の比の集合は、量の比の集合の部分集合、即ち、通約可能量の比の集合と同一視できる。（別に切り離して議論する必要がある、「原論」第7巻で扱われている。）
- ・ この普遍的な作用域が、現代の実数体の役割を果たす。つまり、
量の比=実数。

(4) その後の歴史

- ・ 「エウドクソスの量の比の理論」は、数学理論として見るとき、理論の厳密性および理論全体の統一性において完成の域にあった。しかし、柔軟性を欠き（実用的でない）、その後の数値計算、特に、代数的計算の発展にあまり都合がよくなかった。
- ・ 中世期以降ずっと、ユークリッドの「原論」は論理的思考法を訓練するための「数学教育の基礎」の役割を果たしていたにも拘わらず、「エウドクソス学説（第5巻）」は、必要性が認められなくなり、一般には理解されなかった。
- ・ 16世紀に、ニュートンとライプニッツが微分積分法を発見し、自然や社会の解析にとって画期的に有益な道具となり、解析学（微分積分学）は急速に発展していく。そこでは、無限や極限を扱う必要がある。19世紀に「解析学の基礎づけ」が無限や極限から生ずるパラドックス等を克服するために必要になったとき、エウドクソスの着想は新しい枠組みのなかで、生き返ることになる。デデキントは、実数の集合を連続性という性質で厳密に基礎づけるため、デデキントの切断という概念を導入するが、これは、エウドクソス学説から発想したといわれている。
- ・ 皮肉にも、デデキントによる実数の特徴づけによって、量の理論によらないで数の理論の構築が可能になった。（“数”の“量”からの解放）

第3章 田村二郎の「量と数の理論」

[基本的な考え] 量＝ベクトル、数＝一次変換 と捉えること。

以下で、量は、離散量と連続量という分類では始めの部分を除いて連続量を対象にしている。さらに、外延量と内包量という分類では外延量(加法性をもつ量)を対象にしていることに注意する。

§ 1. ユークリッド式量空間

<具体的な対象>長さ、時間(経過時間)、面積、体積、質量、熱量など

1種類の量を考える。同一種の量全体の集合を U とする。公理主義的な概念規定、すなわち、量の基本性質(公理系)を明示し、それに基づいて議論を進める。

公理[I] (量の加法性) 2つの量は加えることができる。結果の和を

$a+b \in U$ と書く。

(i) $a+b = b+a$ 交換法則

(ii) $(a+b)+c = a+(b+c)$ 結合法則

<倍変換としての自然数>

n 個の和 $a+\cdots+a$ を na と表す。そのとき

自然数 $n \longleftrightarrow$ 一次変換 $U \rightarrow U \quad u \mapsto nu$

自然数の和 $n+m \longleftrightarrow$ 変換の和 $u \mapsto nu+mu$

自然数の積 $nm \longleftrightarrow$ 変換の合成 $u \mapsto n(mu)$

公理[II] (量の大小関係)

(i) $a < b, a = b, a > b$ のうち唯1つの関係が必ず成り立つ。全順序性

(ii) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ 推移法則

(iii) $a+b > a$ 正性

(iv) $a < b$ ならば、 $a+u=b$ となる $u \in U$ が唯1つ存在する。

この u を $b-a$ と書く。

(注1) $(b-a)+a=b$ かつ $(b+a)-a=b$

だから、減法は加法の逆演算となる。

(注2) $nu = mu \Leftrightarrow n=m$

が示せるから、自然数の相等 $\Leftrightarrow$ 変換としての相等

公理[III] (量の等分可能性)

$a \in U$ と自然数 n に対して、

$nu=a$ となる $u \in U$ が唯1つ存在する。

この u を $(1/n)a$ と書く。

[性質]

$$(i) m(na) = n(ma)$$

$$(ii) (1/m)((1/n)a) = (1/n)((1/m)a)$$

$$(iii) (1/m)(na) = n((1/m)a)$$

(iii)の量を $(n/m)a$ と書く。

変換 $U \rightarrow U \quad u \mapsto (n/m)u$ を n/m 倍変換または「分数」 n/m という。

(分数=正の有理数) $(n/1)u = nu$ だから、倍変換の意味で

$$N = \{\text{自然数全体}\} \subset Q^+ = \{\text{分数全体}\}.$$

[分数の性質]

$a=m/n, b=p/q$ とするとき、

$$\text{相等: } a=b \Leftrightarrow (m/n)u = (p/q)u, \forall u \in U$$

$$\Leftrightarrow mq u = np u, \forall u \in U$$

$$\Leftrightarrow mq = np \quad (\because \text{上の(注2)より})$$

大小 : $a < b \Leftrightarrow (m/n)u < (p/q)u, \forall u \in U$

$$\Leftrightarrow mqu < npu, \forall u \in U$$

$$\Leftrightarrow mq < np$$

加法 : $(nq)((m/n)u + (p/q)u) = mqu + npu = (mq + np)u$ ゆえ

$$a + b = (mq + np)/nq$$

乗法 : $a(bu) = (m/n)((p/q)u) = (mp/nq)u$ ゆえ

$$ab = mp/nq$$

加法と乗法の交換法則, 結合法則および分配法則も容易に示せる。

<まとめポイント> 量と数の理論から分かること

- ◎ 数の加法と乗法は, 本質的に異なっている。加法は倍変換の像である量の加法から定義される。乗法は倍変換の合成変換としてえられる。
- ◎ 分数の加法は, 等分不可能な離散量を基にして定義することはできない。必ず連続量を基に定義すること。
- ◎ 従って, 分数は量分数から導入していくこと。割合分数は分数概念がきちんと形成できてから扱った方がよい。

(注) 割合の教材で「相等算」とよばれるものがある。「全体を1とする」という方法であるが, この1は一体何だろうか。

例題 : コップにお茶が満たされている。兄がその $1/3$ を飲み, 残りの $1/2$ を弟が飲んだところ, コップの底に 50cc が余った。はじめの量を求めよ。

この種の問題に出会ったときに, 「全体を1とする」というように教える。

この1とは何だろうか?

「この問題の場合, cc のほかに別の単位をとっていると考えることができる。即ち, 全体を1コップとして, cc とコップの間の「単位の換算問題」をしているのだと考える。」

つまり, 相等算において, 1は, 数の1ではなく, 「ある量」を表していること

に注意すべきである。

§ 2. 対称量空間

<具体的な対象> 移動、時刻の変化、速度、加速度、運動量、力、電荷、電流、磁場など

1 種類の対称性をもつ量を考える。同一種の量全体の集合を V とする。

公理[I] 2つの量 $a, b \in V$ の和として1つの量 $a+b \in V$ が定まり、次の演算規則を満たす。

- (i) 交換法則: $a+b = b+a$
- (ii) 結合法則: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- (iii) ゼロ量 $0 \in V$ が存在して, $a+0 = a$
- (iv) a の逆量 $a' \in V$ が存在して, $a+a' = 0$

[逆量の性質] $(a')' = a, 0' = 0, (a+b)' = a' + b'$

公理[II] 各 $0 \neq a \in V$ に対して, $a \in U(a) \subset V$ となるユークリッド式量空間 $U(a)$ が存在する。

(注) V が 1 次元ならば, $V = U(a) \cup \{0\} \cup U(a')$

V が 2 次元以上ならば, $V = \{0\} \cup U(a_1) \cup U(a_1') \cup U(a_2) \cup U(a_2') \cup \dots$

(無限にある)

[分数倍の定義] a を分数(正の有理数)とし, $0 \neq u \in V$ に対して, u の a 倍

$$a u \in U(u) \subset V$$

が一意的に定まる。 0 の a 倍は 0 である。

[0 倍の定義] 数 0 は、ゼロ変換 $u \rightarrow 0$ として導入される。すなわち

$$0 \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

分数倍と0倍の定義から、任意の分数 a に対して

$$a+0 = 0+a = a, \quad a0 = 0a = 0$$

対称変換と負の数の導入

[対称変換 $-$] 変換 $V \rightarrow V$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}'$ を対称変換とよび, $-$ で表す。

[対称変換の性質] a を分数, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して

$$-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad -0=0, \quad -(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(-\mathbf{u})+(-\mathbf{v})$$

$$-(a\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u})$$

[負の有理数の定義] 変換 $\mathbf{u} \rightarrow -(\mathbf{u})$ を $-a$ で表し,

$$(-a)\mathbf{u} = -(\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u})$$

を $\mathbf{u}$ の $(-a)$ 倍という。

$-a$ が負の有理数である。

$$\{\text{有理数}\} = \{\text{分数(正の有理数)}\} \cup \{0\} \cup \{\text{負の有理数}\}$$

[有理数の加法の性質] いくつかの場合を考察する。

2つの負の数 $-a$ と $-b$ の和は変換

$$\mathbf{u} \rightarrow (-a)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{u}$$

である。ここで,

$$(-a)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}' + b\mathbf{u}' = (a+b)\mathbf{u}' = -(a+b)\mathbf{u}$$

であるから, $(-a) + (-b) = -(a+b)$.

$a > b$ のとき, 正の数 a と負の数 $-b$ の和を求めよう。

$$a-b = c, \quad a = b + c$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} + (-b)\mathbf{u} &= (b+c)\mathbf{u} + (-b)\mathbf{u} = b\mathbf{u} + c\mathbf{u} + b\mathbf{u}' = c\mathbf{u} \\ &= (a-b)\mathbf{u} \end{aligned}$$

したがって

$$a + (-b) = a - b$$

その他の場合も、同じように証明できる。

[有理数の乗法の性質]

2つの負の数 $-a$ と $-b$ の積は変換

$$u \rightarrow (-b)((-a)u)$$

であるが、これは次の4つの変換を順に施すことに他ならない。

$$a \text{ 倍} \rightarrow \text{対称変換} \rightarrow b \text{ 倍} \rightarrow \text{対称変換}$$

この順序は自由に変更してもよいので、

$$\text{対称変換} \rightarrow \text{対称変換} \rightarrow a \text{ 倍} \rightarrow b \text{ 倍}$$

対称変換を2回施せば変わらないのと同じだから

$$(-b)((-a)u) = b(au)$$

すなわち

$$(-b)(-a) = ba$$

その他の場合も、同じように証明できる。

[有理数体 $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 V]

有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は、**体** (=加減乗除の四則演算が可能な代数的構造をもつ集合) になる。また、任意の対称量空間 V は、有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の**ベクトル空間** (=加法と有理数倍の演算が可能な代数的構造をもつ集合) となる。

<留意点>

- ◎ 量空間は対称性をもつが、それから定義される正・負の数は対称性をもたない。
正の数×正の数=正の数、負の数×負の数=正の数 となるから。
- ◎ 量はいろいろな種類がある(多様性)が、それから出てくる数は、本質的に1つ(普遍性)である。数の普遍性が数学という学問の基盤である。
- ◎ 対称変換から負の数を構成する方法は、「マイナスかけるマイナスはなぜプラスになるのか?」という問いに、分かりやすく答えることができるものである。

量と数の理論で、量空間から実数 (Dedekind による実数の構成の類似を利用する。)、複素数 (2 次元対称量空間の変換として構成する。虚数単位 i は変換 90 度回転に対応する。) も構成することができる。

ユークリッド式量空間における正の実数倍変換の定義は、量空間に連続性の公理を付け加えて、Dedekind による実数と有理数の関係を使う少々手間のかかるものなので省略する。対称量空間における実数倍変換の定義は、ユークリッド式量空間における分数倍から、対称変換を使って正負の有理数倍を定義したときと全く同様な手続きで可能である。

2 次元対称量空間 V を考える。線型変換・複素数 $a+bi$ 倍は、実数 a 倍に、実数 b 倍と 90 度回転 I との合成変換を加える変換として定義される。

線型変換 $a+bi : V \rightarrow V, u \rightarrow au + I(bu)$

I を 2 回合成すると、180 度回転変換すなわち対称変換になっていることに注意する。これが 2 次元を用いた理由である。

第 4 章 量と数を巡るその他の話題

§ 1. 点とベクトル

(経過)時間に対する時刻、移動に対する位置のような、一般に“ベクトル”に対して、“点”からなる集合を“アフィン空間”という。平面の点とベクトルの関係を例にして説明する。

<アフィンからベクトルへ>

E を平面の点の集合 (アフィン平面) とする。 $E \times E = \{(A, B) ; A, B \in E\}$ は左にある A を始点、右にある B を終点とみると“有向線分”の集合と考えられる。有向線分のうち向きと長さが等しいものたちを集めて 1 つの対象と考えたものが“ベクトル”である。ただし、 $A=B$ のときは零ベクトルとする。ベクトルの集合を V と書

き“ベクトル空間”という。有向線分(A, B)の定めるベクトルを $B-A$ と表すと、 $B-A=D-C \Leftrightarrow$ 有向線分(A, B)と(C, D)の向きと長さが等しい。

他方、ベクトルを与えたとき、有向線分は一意的には定まらない。始点を指定すれば決まる。即ち、点(始点)とベクトルから点(終点)が決まる。

<ベクトルからアフィンへ>

ベクトル空間 V が先にある場合、それに付随するアフィン空間 E とは、次のようにして定まる集合のこと。

任意の 2 点 $A, P \in E$ に対して、ベクトル $P-A \in V$ が定まり、

① 任意の $A \in E$ に対し、

写像 $f_A : E \rightarrow V$, $f_A(P) = P-A$ は全単射 (1 対 1 対応)

② 任意の $A \in E$ に対し、 $A-A=0$ (零ベクトル)

③ 任意の $A, B, P \in E$ に対し、

$$(P-B)+(B-A)=P-A$$

<重要なポイント>

アフィン空間においては、点-点=ベクトル および 点+ベクトル=点 という演算が考えられるが、点+点 という計算はできない。

<算数・数学教育上のポイント>

- ・ 数学上で“数”と関係する“量”は、ベクトル量である。(量と数の理論)
- ・ 従って、点(アフィン量)を算数・数学の学習において、意味説明の例として用いると、子どもは概念をうまく形成できないことがある。
- ・ そのような例として、温度がある。絶対温度はユークリッド式量であるが、摂氏の温度について、0 度は数学的な恒等元ゼロではなく単なる点に過ぎないし、マイナスの温度も負の量を意味しない。温度の場合、量として扱えるのは、温度差である。同様なことは、時刻と時間についても起こる。

§ 2. 量を巡るその他の注意点

[等分除と包含除]

同種の量の倍変換 c 倍: $V \rightarrow V, u \rightarrow cu = v$ があるとする。

v と c が与えられて、 $cu = v$ を満たす u を求める計算が等分除で

v と u が与えられて、 $cu = v$ を満たす c を求める計算が包含除であるといえる。

しかし、異種の量空間の間の 1 次変換の場合には、等分除と包含除の関係も、そんなに単純にはいかない。

[量の除法]

量空間 W の量 w を量空間 V の量 v で割ることは、量空間の間の 1 次変換の空間 $L(V, W)$ の元 ww^{-1} を定めること。

【例】 W を移動の量空間、 V を時間の量空間とすると、 $L(V, W)$ は速度の量空間となる。

[量の乗法]

量空間 V の量 v と量空間 W の量 w との積は、テンソル積とよばれるもの $v \otimes w$ になる。例：面積は 2 つの長さ（縦と横）のテンソル積である。

[外延量と内包量]

加法性のある・なしで単純には分けられない。例えば、内包量といわれている速度は加法性のある物理量(ベクトル)である。多くの物理量に対して、同様な問題が起こる。

速度は方向性のあるベクトルであり、合併はベクトルの和になる。濃度や温度はアフィン量(点)であり、合併は加重平均となる。

[参考文献]

- [1] 中村幸四郎他訳『ユークリッド原論』共立出版 1971 年
- [2] 村田全他訳『ブルバキ数学史』東京図書 1970 年
- [3] エビングハウス他著、成木勇夫訳『数』上・下、シュプリンガー・フェアラーク東京 1991 年
- [4] ヘルマン・ワイル著、菅原正夫他訳『数学と自然科学の哲学』岩波書店 1959 年
- [5] 田村二郎著『量と数の理論』日本評論社 1978 年
- [6] 足立恒雄著『数 体系と歴史』朝倉書店 2002 年
- [7] 吉田洋一・赤撰也著『数学序説』倍風館