

C_n -多様体から表現球面への等変写像と Borsuk-Ulam 型定理

京都府立医科大学大学院医学研究科 長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Graduate School of Medical Science, Kyoto Prefectural University of Medicine
京都産業大学理学部 牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1 序論

m と n を、 $m \geq n$ なる関係を満たす、正の整数とする。このとき Borsuk-Ulam の定理とは、 m 次元球面 S^m から $\mathbb{R}^n$ への任意の連続写像 $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、ある $a \in S^m$ が存在して、 $f(a) = f(-a)$ となることを、主張している。従って、一つの存在定理である。この定理を、変換群論の言葉で書き換えると次のようになる。こう書き換えることで非存在定理となることも興味深い。

Proposition 1.1 (Borsuk-Ulam Theorem). S^m と S^n に位数 2 の巡回群 C_2 が対心的に作用しているとする。連続な C_2 写像 $f: S^m \rightarrow S^n$ が存在すれば $m \leq n$ である。

さて、 G を群とし、 X と Y を G -空間とする。この小論を通し、写像は連続であるとする。 G -写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が存在すれば、 $x \in X$ と $\varphi(x) \in Y$ のアイソトロピー部分群の間には常に $G_x \subset G_{\varphi(x)}$ なる関係が成り立つ。 G -写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が G -等変写像 (G -isovariant map) であるとは、任意の $x \in X$ に対して、 $G_x = G_{\varphi(x)}$ が成り立つことを言う。これは、「 X の同じ G -軌道上の二点 x_1, x_2 について、 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ が成り立つならば、 $x_1 = x_2$ が成り立つ」という条件と同値である。2つの G -等変写像 $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ が G -ホモトピー同値であるとする。 φ から ψ への G -ホモトピー $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が G -等変写像であるとき、 F を φ から ψ への G -等変ホモトピーという。 X から Y への G -等変写像の G -等変ホモトピー類を $[X, Y]_G^{\text{isov}}$ と書く。さて、同変写像のかわりに等変写像を用いるというセッティングのもと、Borsuk-Ulam 型の定理が成立する。それについては、A. G. Wasserman による次の結果がある。

Proposition 1.2 ([5] isovariant Borsuk-Ulam Theorem). G を有限可解群とする。 V, W を G -表現とする。 G -等変写像 $f: V \rightarrow W$ が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G \quad (1)$$

が成り立つ。

それに引き続く、等変写像と Borsuk-Ulam 型の不等式の間の関係についての研究としては参考文献の [2] がある。これを受けて、この小論の目的は、ある種の条件下で G -等変写像の存在と Borsuk-Ulam 型の不等式の成立が同値であることを証明し、 G が n 次巡回群 C_n である場合について、 C_n -等変写像を C_n -等変ホモトピー型で分類することである。具体的には我々の最初の結果は次のものである。

Theorem A. G を有限群とする。 M を自由 G -作用をもつ m 次元 $\text{mod}|G|$ ホモロジー球面とし、 W を G のユニタリー表現とする。このとき、 M から G -表現球面 SW への G -等変写像 $f: M \rightarrow SW$ が存在すれば、 G の単位群ではない部分群 H に対して、

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^H \quad (2)$$

が成り立つ。ただし、 $SW^H = \emptyset$ のときは $\dim SW^H = -1$ とする。

G の SW への作用について、その特異集合を $SW^{>1} = \bigcup_{\{1\} \neq H \leq G} SW^H$ で定義する。このとき、次の Corollary が直ちに得られる。

Corollary B. G を有限群とする。 M を自由 G -作用をもつ m 次元 $\text{mod}|G|$ ホモロジー球面とし、 W を G のユニタリー表現とする。このとき、 M から G -表現球面 SW への G -等変写像 $f: M \rightarrow SW$ が存在すれば、

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 $SW^{>1} = \emptyset$ のときは $\dim SW^{>1} = -1$ とする。

我々の目指すところは、Corollary B の逆を示すことである。すなわち、Borsuk-Ulam 型の不等式 (3) が成り立つときに、 G -等変写像が存在するかという問題を考えることである。我々は G が有限巡回群の場合に、次を得た。

Theorem C . C_n を位数 n の巡回群とする。 M を向き付け可能な自由 C_n -作用をもつ m -次元弧状連結向き付け可能な C^∞ 閉多様体であるとする。 W を C_n の忠実なユニタリー表現とする。不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} \quad (3)$$

がなりたてば、 M から G -表現球面 SW への G -等変写像 $f: M \rightarrow SW$ が存在する。

最後に、上の定理で存在が保証された G -等変写像を G -等変ホモトピー型で分類することを紹介する。 Theorem C の条件の下、 (3) 式で不等号が真に成り立つときには、 G -等変ホモトピー類はただ一つであることが示される。 (3) 式で等号が成立しているときには、 5 節の Corollary E で定義される写像 $\text{mD}_{f_0}: [M, SW]_{C_n}^{\text{isov}} \rightarrow \oplus_{H \in A} \mathbb{Z}$ により $[M, SW]_{C_n}^{\text{isov}}$ は完全に分類される。ただし、 f_0 は任意に固定された M から SW への C_n -等変写像であって、

$$A = \{H \in \text{Iso}(W) \mid \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}$$

である。 mD_{f_0} の定義には、 C_n -写像の多重写像度 (multidegree) に関する Hopf 型定理が使われる。これが、 Theorem D である。なお多重写像度は S^1 作用の場合の等変写像の分類に際して、参考文献 [2] で最初に導入されたものである。

この小論は次のように構成されている。 2 節で定理 A を証明する。 3 節で同変障害理論に関して、必要なところを文献 [4] より引用し、まとめる。 4 節で定理 C を証明し、 5 節では多重写像度を導入し、我々の条件の元での C_n -等変写像の分類定理 (Corollary E) を述べる。 6 節では我々の定理を用いた例を述べる。

2 Theorem A の証明

この節では Theorem A の証明を行う。この節を通して、 M は Theorem A の条件を満たすものとし、 W を G のユニタリー表現空間とする。

Lemma 2.1. M を自由な G 作用をもつ m 次元 C^∞ 多様体とし、 W を G のユニタリー表現空間とする。 p を $|G|$ の一つの素因数とする。 M から W の球面 SW への G -等変写像 $f: M \rightarrow SW$ が存在すれば、 M から $S(W^{C_p})^\perp$ への C_p 写像 f_p が存在する。

Proof. $f: M \rightarrow SW$ は G -等変写像であるから、 C_p -等変写像と考えることができる。したがって、 M の C_p -軌道を f で SW にうつしても、その軌道は小さくならない。 C_p は M に自由に作用するので、 f が C_p -等変写像であることより、 $f(M)$ に登場する C_p -軌道型は p 点軌道

のものに限られる。 SW において、 C_p -軌道が p 点軌道でないところは、 SW^{C_p} に限られる。従って、 $f(M) \subset SW \setminus SW^{C_p}$ が成り立つ。

C_p の $S(W^{C_p})^\perp$ への作用は自由であって、 $SW \setminus SW^{C_p}$ から $S(W^{C_p})^\perp$ への G -ホモトピー同値写像が存在する。実際、

$$SW \setminus SW^{C_p} \simeq_{C_p} W \setminus W^{C_p} = ((W^{C_p})^\perp \setminus \{0\}) \times W^{C_p} \simeq_{C_p} (W^{C_p})^\perp \setminus \{0\} \simeq_{C_p} S(W^{C_p})^\perp$$

である。 f とこれを合成することで、 C_p -写像 $f_p: M \rightarrow S(W^{C_p})^\perp$ が得られる。□

$H_*(M; \mathbb{Z}/|G|) \cong H_*(S^m; \mathbb{Z}/|G|)$ がなりたつことから $|G|$ を割り切る素数 p に対して、 $H_*(M; \mathbb{Z}/p) \cong H_*(S^m; \mathbb{Z}/p)$ が成り立つ。よって、Lemma 2.1 より C_p -写像 $f_p: M \rightarrow SW^{C_p}$ に対して C_p -Borsuk-Ulam の定理 ([1] 参照) が成り立ち、

$$\dim M \leq \dim S(W^{C_p})^\perp = \dim SW - \dim SW^{C_p} - 1 \quad (4)$$

となる。単位群と異なる G の一般の部分群 H については、素数位数の巡回部分群 C_p をもつので、

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{C_p} \leq \dim SW - \dim SW^H \quad (5)$$

が成り立つ。

Corollary B は $\dim SW^{>1} = \max_{\{1\} \neq H \leq G} \dim SW^H$ であることから、定理より直ちに従う。

3 同変障害理論の復習

Theorem C と Theorem D の証明には同変障害理論を用いる。読者の便宜のため、この小論の設定のもとで使う道具を簡単にここにまとめておく。記号や命題は文献 [4] のものを元としている (引用である)。

G を有限群とする。まず、同変コホモロジー群を導入することから始める。 (X, A) を相対 G -CW 複体で $X \setminus A$ 上に G が自由に作用しているものとする。すなわち、各 $n \geq 0$ に対して、 X_n は X_{n-1} に軌道型 $G(= G/\{e\})$ の n -胞体 (これらは自由 n -胞体ともいわれる) を接着することで得られ、 $X_0 \supset A$ であり、 $n < 0$ に対しては $X_n = A$ となっている。 $C_*(X, A)$ を次のチェイン複体とする。

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{d} H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

ただし、ホモロジー群は整数係数特異ホモロジー群で、上の d は三対 (X_{n+1}, X_n, X_{n-1}) のホモロジー完全系列の中の境界準同型写像である。

X 上の G -作用で X_n は不変であって、これは $H_n(X_n, X_{n-1})$ 上の G -作用を誘導する。従って $H_n(X_n, X_{n-1})$ は左 $\mathbb{Z}G$ -加群になり、 $C_*(X, A)$ はこのような加群の集まりで構成されるチェイン複体となる。 π を $\mathbb{Z}G$ -加群とする。このとき、

$$C_G^*(X, A; \pi) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, A); \pi)$$

は同変チェイン複体である。そのコホモロジー群を $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi)$ と表す。 $\mathbb{Z}G$ -加群 π を $X/G \setminus A/G$ 上の局所係数系 $\{\pi\}$ として捉えることで、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) \cong H^*(X/G, A/G, \{\pi\})$$

が成立する。 Y を弧状連結で n -単純な G -空間とする。すなわち、 $\pi_1(Y, y)$ が $\pi_n(Y, y)$ に自明に作用する空間である。ただし、 $n \geq 1$ とする。 Y についての上記の仮定より基点つきのホモトピー類を自由ホモトピー類に写す自然な写像 $\pi_n(Y, y) \rightarrow [S^n, Y] = \pi_n(Y)$ は全単射である。従って、 Y 上の G -作用は $\pi_n(Y)$ 上の G -作用を矛盾なく定義し、その結果、 $\pi_n(Y)$ は $\mathbb{Z}G$ -加群となる。 Y を n -単純な G -空間と仮定したことより、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_n(Y)) \cong H^*(X/G, A/G, \pi_n(Y))$$

が成り立つ。

同変障害理論により、次の事柄が成り立つ。

Proposition 3.1 ([4]). G を有限群とする。 (X, A) を相対 G -CW 複体で $X \setminus A$ 上に G が自由に作用しているもの、 Y を n -単純な G -空間とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_{*-1}(Y)) = 0$ であれば、任意の G -写像 $f: A \rightarrow Y$ は G -写像 $F: X \rightarrow Y$ に拡張する。
2. G -写像 $f: A \rightarrow Y$ が二つの G -写像 $F, F': X \rightarrow Y$ に拡張し、 $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_*(Y)) = 0$ であるとする。このとき、 F と F' は G -ホモトピー同値である。

4 Theorem C の証明

M を向きを保つ自由 C_n -作用をもち弧状連結で向き付け可能な m 次元多様体とする。また、 W を忠実な複素 C_n 表現空間とする。まず、

$$A = \{H \in \text{Iso}(W) \mid \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}$$

に関する補題を用意する。

Lemma 4.1. A に属する G の異なる二つの部分群 H と H' に対して、次が成り立つ。

1. $\langle H, H' \rangle$ を H と H' で生成される部分群とすると、 $\langle H, H' \rangle \notin A$ が成り立つ。

2. $W^H \neq W^{H'}$

Proof. まず、 $H_1, H_2 \in A$ に対して、 $H_1 \subset H_2$ が成り立てば、 $H_1 = H_2$ が成り立つことを証明する。 $H_1 \subsetneq H_2$ とし、 $G_x = H_1$ となる $x \in SW$ をとる。すると、 $x \notin SW^{H_2}$ であるから、 $SW^{H_2} \subsetneq SW^{H_1}$ となる。ここで、それぞれの固定点集合は球面であることから、であるから、 $\dim SW^{H_2} < \dim SW^{H_1}$ となる。そうすると A の定義より、 $H_2 \notin A$ となる。これは仮定に反する。よって $H_1 = H_2$ である。(1)を示す。 $\langle H, H' \rangle \in A$ とおくと、先に示したことより、 $\langle H, H' \rangle = H = H'$ が成立する。これは矛盾である。したがって、 $\langle H, H' \rangle \notin A$ が成立する。続いて(2)を示す。まず、 $W^H \cap W^{H'} = W^{\langle H, H' \rangle}$ が成り立つ事に注意する。この式で $\langle H, H' \rangle \notin A$ であるから、 A の定義より $\dim SW^{\langle H, H' \rangle} < \dim SW^{>1} = \dim SW^H$ となる。共通部分を考えることで次元が下がってしまったので、 $W^H \neq W^{H'}$ である。□

$SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ とする。不動点集合を抜いたので、 C_n の SW_{free} への作用は自由である。このとき、 $\mathfrak{f}_G^*(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}}))$ に C_n -写像 $f: M \rightarrow SW_{\text{free}}$ が存在するかどうかの障害がある。

Lemma 4.2. 上で定義した SW_{free} は空集合ではない。

Proof. $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ で仮定の不等式は $\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$ であった。特に、 $\dim SW - \dim SW^{>1} \geq 1$ である。これより、 $SW_{\text{free}} \neq \emptyset$ である。□

Lemma 4.3. SW_{free} は弧状連結である。

$SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ であって、次の Proposition 4.4 でみるように、 $\dim SW - \dim SW^{>1} \geq 2$ であるから (つまり取り除く空間の余次元が2以上あるから)、 SW_{free} は弧状連結である。□

ここで、 $k = \dim SW - \dim SW^{>1}$ とおく。

Proposition 4.4. 上で定義した SW_{free} は $(k-2)$ -連結である。

Proof. Lemma 4.2 より、 SW_{free} は空ではない。そして、各 SW^H は球面であることとユニタリー表現であることより、全体と一致しない以上 $k \geq 2$ となる。 $d \leq k-2$ であるような d に対して、 $\pi_d(SW_{\text{free}}) = 0$ を証明する。 $\varphi: S^d \rightarrow SW_{\text{free}}$ を考えると、

$$(d+1) + \dim SW^{>1} < \dim SW$$

であれば、 φ は null homotopic である。したがって、 $d \leq k-2$ のとき、 $\pi_d(SW_{\text{free}}) = 0$ である。□

Proposition 4.5. SW_{free} は $(k-1)$ -単純である。

Proof. $k > 2$ の時は、Proposition 4.4 より、 SW_{free} は単連結になる。従って、 SW_{free} は $(k-1)$ -単純である。また、 $k=2$ のときは、Lemma 4.6 に見るように $\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換である。従って、 SW_{free} は 1 単純になっている。□

Lemma 4.6. $k=2$ のとき、 $\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換である。

Proof.

$$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = SW \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} SW^H = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} (SW \setminus SW^H)$$

とおく。 $1 \neq K \in \text{Iso}(SW) \setminus \mathcal{A}$ なる G の部分群 K に対しては、 $\mathcal{A}$ の定義より、 $\dim SW - \dim SW^K \geq 4$ である。 SW_{free} を複体と見たとき、その次元は SW の次元に等しい。なぜなら、 SW から SW の次元より低い次元の球面をのぞいていることになるからである。 SW_{free} から $SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ を構成するには、その次元より 4 以上低い次元の球面を貼り付けることになる。従って、一般の位置の議論により、包含写像 $SW_{\text{free}} \subset SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は基本群の間の同型対応 $\pi_1(SW_{\text{free}}) \cong \pi_1(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を誘導する。しかも、 $SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は $W_{\mathcal{A}\text{-free}} = W \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} W^H$ の強収縮変形である。従って、 $\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}})$ がアーベル群であることを示せばよい。 $H \in \mathcal{A}$ で $k=2$ であることより、 $\dim(W^H)^\perp = 2$ であり、従ってこれは既約表現である。しかも、Lemma 4.1 より $H \neq H'$ のとき、 $(W^H)^\perp \neq (W^{H'})^\perp$ であるから、 W は、ある部分表現 W' が存在して、

$$W = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} (W^H)^\perp \oplus W'$$

と分解される。従って、

$$W_{\mathcal{A}\text{-free}} \approx \prod_{H \in \mathcal{A}} ((W^H)^\perp \setminus \{0\}) \times W'$$

となることが分かる。従って、

$$\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

Lemma 4.7. 巡回群 C_n は $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ に自明に作用する。

Proof. $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ 上の C_n -作用は S^1 作用に拡張され、 S^1 の連結性より $g \in C_n$ の誘導する写像が $e \in C_n$ の誘導する写像とホモトピックになる。よって $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ 上の C_n -作用は自明である。 $\square$

Proposition 4.5 と Lemma 4.7 とにより、コホモロジーに関して

$$\mathfrak{H}_G^*(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) \cong H^*(M/C_n; \pi_{*-1}(SW_{\text{free}}))$$

が示された。Proposition 4.4 より、 $q-1 \leq k-2$ すなわち、 $q \leq k-1$ の場合に、 $H^q(M/C_n; \pi_{q-1}(SW_{\text{free}})) = 0$ が示された。 $q \geq k$ のときは、仮定の不等式を使う。それによると、 $\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} = k$ であるので、

$$\dim M/C_n = \dim M = k-1 < q$$

が成り立つ。よって、 $q \geq k$ なる q に対しても、 $H^q(M/C_n; \pi_{q-1}(SW_{\text{free}})) = 0$ が示された。以上より、 $H^*(M/C_n; \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) = 0$ が示された。よって、を自由な C_n 作用をもつ m 次元多様体 M から、自由な C_n -作用をもつ $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ への C_n -写像の存在が証明された。この写像での M の像は SW_{free} に含まれるので、これは M から SW への C_n -等変写像が存在することを意味する。

5 等変ホモトピー類の決定

C_n -等変ホモトピー型による分類 $[M, SW]_{C_n}^{\text{isov}}$ を計算する代わりに、 $[M, SW_{\text{free}}]_{C_n}$ による分類を考えることをまず考える。分類には $H^*(M/C_n; \pi_*(SW_{\text{free}}))$ に障害が現れる。 M の次元によって分けて考える。すなわち、 $\dim M < k-1$ のときと $\dim M = k$ の時とにである。 $q \leq k-2$ のときは、 M の次元に関わらず、Proposition 4.4 より $\pi_q(SW_{\text{free}}) = 0$ である。 $\dim M < k-1$ のとき $q \geq k-1$ なる q に対しては、コホモロジーの次元が M/C_n の次元を超えてしまうので、 $H^q(M/C_n; \pi_q(SW_{\text{free}})) = 0$ が示される。 $\dim M = k-1$ のときは $q > k-1$ なる q に対しては、コホモロジーの次元が M/C_n の次元を超えてしまうので、 $H^q(M/C_n; \pi_q(SW_{\text{free}})) = 0$ となる。表にまとめると、次のようになる。

この時点で次のことが示された。

Proposition 5.1. $\dim M < k-1$ であれば、 M から SW へのすべての等変写像は等変ホモトピックである。 $\square$

表 1: $H^q(M/C_n; \pi_q(SW_{\text{free}}))$ の計算

$q \setminus \dim M$	$\dim M < k - 1$	$\dim M = k - 1$
$q > k - 1$	0 (次元より高いコホモロジー)	0 (次元より高いコホモロジー)
$q = k - 1$	0 (次元より高いコホモロジー)	研究対象
$q = k - 2$	0 (係数群が消える)	0 (係数群が消える)
$q < k - 2$	0 (係数群が消える)	0 (係数群が消える)

したがって、のこるは $\dim M = k - 1$ のときの $[M, SW]_{C_n}^{\text{isov}}$ の決定である。

$k = \dim SW - \dim SW^{>1}$ で球面の次元は奇数次元であることより、 k は 2 以上の偶数である。従って、 M は奇数次元となって、 M 上の C_n の作用は向きを保つ。とくに、 M/C_n は向き付け可能である。まず $k \geq 4$ の時を考える。このときは、係数群は可換である。

Lemma 5.2. W を忠実なユニタリー C_n -表現とする。このとき、

1. 包含写像, $i : SW_{\text{free}} \rightarrow SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ から誘導される準同型写像 $i_* : \pi_{k-1}(SW_{\text{free}}) \rightarrow \pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ は同型写像である。

2. Hurewicz 準同型

$$h : \pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \rightarrow H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}), \quad h' : \pi_{k-1}(SW_{\text{free}}) \rightarrow H_{k-1}(SW_{\text{free}})$$

は同型写像である。

Proof. (1): まず i_* が単射であることを証明する。 $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ 、 $SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = SW \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} SW^H$ であって、 $SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\text{free}} = \bigcup_{H \in \text{Iso}(W) \setminus \mathcal{A}} SW^H$ となるので、 $\dim SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\text{free}} < \dim SW^{>1}$ が成り立つ。とくに、複素表現で考えているので、

$$\dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\text{free}}) \leq \dim SW^{>1} - 2 = \dim SW - k - 2$$

となる。 $F : S^{k-1} \times I \rightarrow SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ で F_0 と F_1 はその像がすでに SW_{free} にあるものを考える。このとき、

$$\begin{aligned} & \dim SW_{\mathcal{A}\text{-free}} - \dim(S^{k-1} \times I) - \dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\text{free}}) \\ &= \dim SW - k - \dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\text{free}}) \\ &\geq \dim SW - k - \dim SW + k + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるので、一般の位置の議論により、 F を F_0 と F_1 を両端点とする SW_{free} への写像に変形できる。よって、 i_* は単射である。 i_* が全射であることは、任意の $F : S^{k-1} \rightarrow SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ を SW_{free} への写像に変形できることが示せばよい。しかしこれは上記の単射を示すときと同じ方法で示される。

(2): Lemma 4.3, Proposition 4.4 と同様の議論により、 $SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は弧状連結、 $(k-2)$ -connected である。実際、 $SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ の構成に際して、 SW から取り除く部分に関して、

$$\dim SW - \dim \bigcup_{H \in \mathcal{A}} SW^H = \dim SW - \dim SW^{>1} \geq 2$$

であるから、弧状連結である。 $(k-2)$ -連結性についても同様で、 $\dim SW^{>1}$ とかかかれているところをこれと次元の等しい $\dim \bigcup_{H \in \mathcal{A}} SW^H$ で読み直せばいい。よって Hurewicz の定理より、 $\pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ が成り立つ。 h' が同型写像であることは、Lemma 4.3 と Proposition 4.4 および Hurewicz の定理よりわかる。 $\square$

Lemma 5.3. W を忠実なユニタリー C_n -表現とする。このとき、次の同型が成り立つ。

$$\Phi : H_{k-1}(SW_{\text{free}}) \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} H_{k-1}(S(W^H)^\perp) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}.$$

その定義は、次の同型対応の合成による。

$$\begin{aligned} H_{k-1}(SW_{\text{free}}) &\xrightarrow{i_*} H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} H_{k-1}(SW \setminus SW^H) \\ &\xleftarrow{\oplus i_{H*}} \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} H_{k-1}(S(W^H)^\perp) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ただし、 i と j と i_H は包含写像である。

Proof. i_* が同型写像であることは、Lemma 5.2 より示される。続いて、 $H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を計算する。

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$$

とおく。Mayer-Vietoris の完全系列を使うために次のように書き換える。

$$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = \bigcap_{i=1}^r (SW \setminus SW^{H_i}) = \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus SW^{H_i}) \right) \cap (SW \setminus SW^{H_r})$$

そうして、

$$\begin{aligned}
 & \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus SW^{H_i}) \right) \cup (SW \setminus SW^{H_r}) \\
 &= \bigcap_{i=1}^{r-1} ((SW \setminus SW^{H_i}) \cup (SW \setminus SW^{H_r})) \\
 &= \bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus (SW^{H_i} \cap SW^{H_r})) \\
 &= \bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus SW^{\langle H_i, H_r \rangle}) \\
 &= SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\langle H_i, H_r \rangle$ は H_i と H_r で生成される G の部分群である。Mayer-Vietoris の完全系列より、

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow H_k(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle}) \rightarrow H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \rightarrow \\
 & H_{k-1}(\bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus SW^{H_i})) \oplus H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_r}) \rightarrow H_{k-1}(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle}) \rightarrow
 \end{aligned}$$

となる。このとき、それぞれの i に対して、 $\langle H_i, H_r \rangle \notin \mathcal{A}$ であることと複素表現を考えていることより、 $\dim SW^{\langle H_i, H_r \rangle} \leq \dim SW^{>1} - 2$ となり、その結果、

$$\begin{aligned}
 \dim SW - \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle} &\geq \dim SW - (\dim SW^{>1} - 2) \\
 &= k + 2
 \end{aligned}$$

となる。球面から余次元が $k+2$ 以上ある球面の和集合を取り除いているので、

$$\begin{aligned}
 H_k(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle}) &= 0 \\
 H_{k-1}(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{\langle H_i, H_r \rangle}) &= 0
 \end{aligned}$$

を得る。その結果、

$$H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong H_{k-1}(\bigcap_{i=1}^{r-1} (SW \setminus SW^{H_i})) \oplus H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_r})$$

を得る。これまでの流れを帰納的に繰り返すことで、

$$H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \xrightarrow[\cong]{j_*} \bigoplus_{i=1}^r H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_i})$$

を得る。

$$\bigoplus_{i=1}^r H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_{k-1}(S(W^{H_i})^\perp) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_{k-1}(S^{k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}$$

となる。 □

続いて、 $k=2$ の場合を考える。このときは、Lemma 4.6 により、 $\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換であるので、 $H^1(M/C_n; \pi_1(SW_{\text{free}}))$ が意味を持つ。さらに Lemma 4.6 の証明中にあるように包含写像 $SW_{\text{free}} \subset SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は基本群の間の同型対応 $\pi_1(SW_{\text{free}}) \cong \pi_1(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を引き起こし、 $k \geq 4$ の場合と同様の対応により $\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$ が成立しているので、 Φ による同型対応が成立する。

ここから、多重写像度 (multi degree) を次のように定義する。

Definition 5.4. M を向きを保つ自由 C_n -作用をもつ向き付け可能な $(k-1)$ -次元弧状連結閉 C^∞ 多様体であるとする。 W を C_n の忠実なユニタリー表現空間、 $f: M \rightarrow SW_{\text{free}}$ を C_n -写像とする。このとき、 f の多重写像度 (multidegree) $\text{mDeg } f$ を

$$\text{mDeg } f = \Phi(f_*[M]) \in \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$$

で定義する。

多重写像度に関しては、次の Hopf-型定理が成立することが示される。なお、証明に関しては、[3] を参照されたい。

Theorem D (Hopf-型定理). M および W を Definition 5.4 の条件を満たすものとする。このとき $\text{mDeg} : [M, SW_{\text{free}}]_{C_n} \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$ に関して次が成り立つ。

1. mDeg は単射である。
2. $f, g: M \rightarrow SW_{\text{free}}$ を C_n -写像 とすると、 $\text{mDeg } f - \text{mDeg } g \in \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} n\mathbb{Z}$ が成り立つ。
3. C_n -写像 $f_0: M \rightarrow SW_{\text{free}}$ を一つ取り固定する。このとき、任意の $d \in \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} n\mathbb{Z}$ に対して、ある C_n -写像 f が存在して、 $\text{mDeg } f - \text{mDeg } f_0 = d$ となる。

M 上の C_n 作用は free であるから、 C_n -等変写像の分類は $f: M \rightarrow SW$ は、 $f(M) \subset SW_{\text{free}}$ をみたす C_n -同変写像の分類を考えることに等しい。したがって、Theorem D の系として、次の分類定理が成立する。

Corollary E . C_n -等変写像 $f_0: M \rightarrow SW$ を任意に一つとり固定する。このとき、

$$\text{mD}_{f_0}: [M, SW]_{C_n}^{\text{isov}} \rightarrow \bigoplus_{H \in A} n\mathbb{Z}$$

を

$$\text{mD}_{f_0}([f]) = (\text{mDeg } f - \text{mDeg } f_0)/n$$

で定めれば、 mD_{f_0} は全単射である。

6 例

p, q を素数、 $n = pq$ とする。 $G = C_n = \langle g \rangle$ とし、 $m \in \mathbb{Z}$ に対して、 T_m を

$$\rho_m: C_n \rightarrow SU(1) \text{ defined by } \rho_m(g)(z) = \zeta^m z$$

で与えられる既約表現空間とする。ただし、 $\zeta = \exp(2\pi i/n)$ である。

$$M = ST_1, \quad SW = S(T_p \oplus T_q)$$

なる場合を考える。

まず、 $C_p = \langle g^q \rangle$ に対して、 SW^{C_p} を考える。 $(z_1, z_2) \in S(T_p \oplus T_q)$ に対して、

$$g^q(z_1, z_2) = ((g^q)^p z_1, (g^q)^q z_2) = (z_1, g^{q^2} z_2)$$

となるから、これが (z_1, z_2) に等しいためには、 $z_2 = 0$ でなければならない。したがって、 $SW^{C_p} = S(T_p)$ である。同様に、 $SW^{C_q} = S(T_q)$ がえられる。言うまでもなく、 $SW^G = \emptyset$ である。よって、特異集合については、 $SW^{>1} = S(T_p) \amalg S(T_q)$ が成り立つ。ちなみにこれは S^3 の中の Hopf-リンクである。したがって、 $\dim SW^{>1} = 1$ であって、

$$k = \dim SW - \dim SW^{>1} = 2$$

となる。このとき、 $\dim M = 1$ であって、

$$\dim M + 1 = \dim SW - \dim SW^{>1} = 2$$

が成り立っている。よって、 M から $S(T_p \oplus T_q)$ への等変写像が存在する。

さて、 SW に関して、 $S(T_p)$ 上の点については、そのアイソトロピー群は C_p であり、 $S(T_q)$ 上の点については、そのアイソトロピー群は C_q である。これら以外の点に関しては、そのアイソトロピー群は $\{1\}$ である。したがって、

$$\text{Iso}(SW) = \{C_p, C_q, C_{pq}\}$$

である。このとき、 $SW^{C_{pq}} = SW$ であるから、 $\mathcal{A} = \{C_p, C_q\}$ が成り立つ。

続いて、 $f_{\alpha, \beta} : ST_1 \rightarrow S(T_p \oplus T_q)$ を

$$f_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{(1+\alpha q)p}, z^{(1+\beta p)q})$$

とおく。まず、これは G -写像である。実際、 $g^t \in G$ に対して、

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \beta}(g^t z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\zeta^t z)^{(1+\alpha q)p}, (\zeta^t z)^{(1+\beta p)q}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^{tp} z^{(1+\alpha q)p}, \zeta^{tq} z^{(1+\beta p)q}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(g^t z^{(1+\alpha q)p}, g^t z^{(1+\beta p)q}) \\ &= g^t \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{(1+\alpha q)p}, z^{(1+\beta p)q}) \\ &= g^t f_{\alpha, \beta}(z) \end{aligned}$$

となっている。また $g^t \cdot f_{\alpha, \beta}(z) = f_{\alpha, \beta}(z)$ とおくと、 $t \equiv 0 \pmod{q}$ および $t \equiv 0 \pmod{p}$ 、すなわち $t \equiv 0 \pmod{n}$ が導かれ、これより $f_{\alpha, \beta}$ が等変写像になっていることがわかる。

多重写像度は T_p および T_q の直交補空間への対応を考えることで得られるので、

$$\text{mDeg } f_{\alpha, \beta} = (\deg(z \mapsto z^{(1+\beta p)q}), \deg(z \mapsto z^{(1+\alpha q)p})) = ((1+\ell p)q, (1+kq)p)$$

である。さらに、等変写像 $f_{0,0}$ を基準にとると、

$$\text{mD}_{f_{0,0}}(f_{\alpha, \beta}) = (\text{mDeg } f_{\alpha, \beta} - \text{mDeg } f_{0,0})/n = (\beta, \alpha)$$

となる。とくに

$$\text{mD}_{f_{0,0}} : [ST_1, S(T_p \oplus T_q)]_{C_n}^{\text{isov}} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が全単射となっている。

なお、5章で行った方法と同様のことを行うことで、 ST_1 から $S(T_p \oplus T_q)$ への C_n -写像のホモトピー類 $[ST_1, S(T_p \oplus T_q)]_{C_n}$ は、一点集合であることがわかることを最後に付け加えておく。

参考文献

- [1] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a $\mathbb{Z}_q$ -map from a $\mathbb{Z}_q$ -space to S^{2n+1}* , Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 714–716.
- [2] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.
- [3] I. Nagasaki, and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n -manifolds to representation spheres*, in preparation.
- [4] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987
- [5] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161