

9. スピングラスの超有効場 C A M 理論

東大理 羽田野・直道・鈴木 増雄

1. 超有効場理論⁽¹⁾

初めに、超有効場理論の一般的な定式化について述べる。

有効場理論は、無限にあるスピンのクラスターに及ぼす影響を、クラスター周辺部 $\partial\Omega$ への有効場で置き換える、という考え方である。しかし特にエキゾチックな相転移、例えば三角格子反強磁性のカイラル転移や、以下で述べるスピングラス転移などにおいては、ハミルトニアンを切断して有効場項を導入するというこれまでの有効場理論を、そのまま構成することができない。

そこで、この有効場理論の考えを次のように拡張する。⁽¹⁾ 先づ、調べたい相を特徴づけるオーダーパラメタ Q を定義する。

$$Q \equiv \sum_j \tilde{Q}_j ; \quad \tilde{Q}_j = \varepsilon_{0,j} Q_j \quad (1.1)$$

ここで、添字 k は一般には或るドメインを表し、 Q_j はそのドメイン上で定義されるパラメタ、 $\varepsilon_{0,j}$ はモジュラー因子である。(例えば三角格子 AF において、一つの三角形上で定義されるカイラリティ。三角形の向きに応じてこれに符号をかける。) これを用いて、有効ハミルトニアンを次の様に定義する。

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} \equiv \mathcal{H}_{cl} - \sum_{k \in \partial\Omega} \Lambda_s^{(k)} \tilde{Q}_k \quad (1.2)$$

ここで、図1(a)の様に $\mathcal{H}_{cl}$ はクラスター Ω の厳密なハミルトニアン、 $\tilde{Q}_k$ はクラスター周辺部 $\partial\Omega$ にあるドメイン D_k 上のモジュラー因子のかかったパラメタ、 Λ_s はそれに共役な場である。この第二項は、通常の有効場のように元々のハミルトニアンを切断して得られたのではなく、ハミルトニアンの隠れた対称性を引き出すために新たに付け加えたものであるそこでこの Λ_s を超有効場と呼ぶことにする。 Λ_s の値は自己無撞着条件、

$$\langle Q_0 \rangle = \langle \tilde{Q}_k \rangle \quad \text{for } \forall k \in \partial\Omega \quad (1.3)$$

で決まる。ここで、 Q_0 はクラスター Ω の中央のドメイン D_0 上のパラメタ、平均 $\langle \rangle$ は、(1.2) の有効ハミルトニアンによる熱平均である。(1.3) 式がゼロでない解 Λ_s を持ち始める温度が転移点である。従って、(1.3) 式を Λ_s で展開

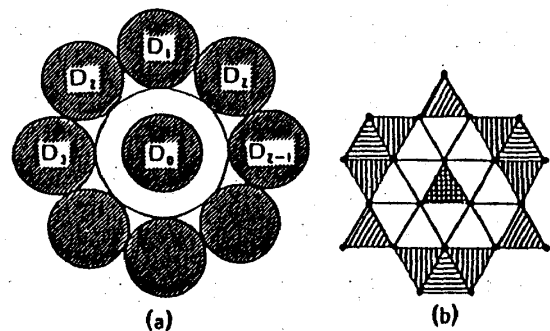


図1: a) 超有効場理論での一般的なクラスターと b) 三角格子 AF での例

し、その一次の項の係数が両辺で等しくなる点として、転移点が求まる。

オーダーパラメタ Q についての応答関数 χ_Q は、外場 λ を入れて、

$$\chi_Q(T) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\langle Q \rangle_\lambda}{\lambda} \quad (1.4)$$

で定義される。ここで、 $\langle \rangle_\lambda$ は外場の入ったハミルトニアン

$$\hat{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}} - \lambda Q \quad (1.5)$$

による平均を表す。 $\chi_Q(T)$ の表式の分母の零点を与える式は、上で述べた転移温度を与える式に一致する。つまり、 χ_Q は転移点で発散する。

以上のように、超有効場理論は一般的な相転移に対して構成できる。⁽¹⁾ 更に、中央のクラスター Ω を系統的に拡大してゆくことによってコヒーレント異常法 (CAM) と組み合わせれば、相転移研究の非常に有力な方法になると言える。

2. スピングラスにおける定式化⁽²⁾

上で一般論を述べた超有効場理論を、実レプリカ法を用いてスピングラス系の Edwards-Anderson モデルに適用してみよう。

二つのレプリカ・クラスター $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ を用意する。オーダーパラメタとして、

$$Q_I = s_I^{(1)} s_I^{(2)} \quad \text{但し} \quad s_I^{(1)} \in \Omega^{(1)}, s_I^{(2)} \in \Omega^{(2)} \quad (2.1)$$

をとる。(1.2) に従って、有効ハミルトニアンを

$$\tilde{\mathcal{H}}_{eff} = \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} - \sum_{k \in \partial\Omega} J_s^{(k)} s_k^{(1)} s_k^{(2)} \quad (2.2)$$

と置く。ここで、従来の実レプリカ法と異なるのは、二つのレプリカに跨るカップリングがクラスター周辺部 $\partial\Omega$ にしか掛かっている点である。周辺上のスピン $s_k^{(1)}, s_k^{(2)}$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} H_k^{(1)} &= J_s^{(k)} s_k^{(2)} \\ H_k^{(2)} &= J_s^{(k)} s_k^{(1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

を感じながら揺らぐ。つまり、周辺部のスピンの互いに自分の鏡像から影響されながら揺らぐ、という形で、各々のクラスターは無限遠の効果を取り込んでいるのである。(図3)

自己無撞着条件は(1.3)に従って、

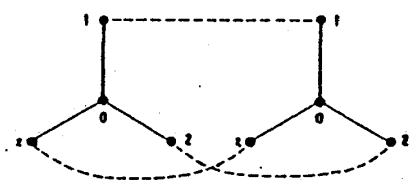


図2: 実レプリカ・クラスターの例

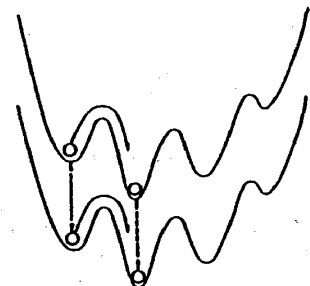


図3: 実レプリカ・ポテンシャル

$$\langle\langle s_0^{(1)} s_0^{(2)} \rangle\rangle_J = \langle\langle s_k^{(1)} s_k^{(2)} \rangle\rangle_J \quad \text{for } \forall k \in \partial\Omega \quad (2.4)$$

となる。ここで、外側の $\langle \rangle_J$ はボンド配位についての平均である。 Λ_s についての展開の一次の項より、

$$\sum_{l \in \partial\Omega} (\langle\langle s_0 s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J - \langle\langle s_k s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J) \Lambda_s^{(l)} = 0 \quad (2.5)$$

が得られ、一般にはこの連立一次方程式の行列式の零点が転移温度を与える。ここで、 $\langle \rangle_{cl}$ は $\mathcal{H}_{cl}$ による熱平均である。特に周辺部スピン s_l がクラスター Ω の中で等価な位置にある場合は、 Λ_s はすべての l について等しいので、

$$\sum_{l \in \partial\Omega} \langle\langle s_0 s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J = \sum_{l \in \partial\Omega} \langle\langle s_k s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J. \quad (2.6)$$

非線形帯磁率も(1.4)に従えば計算できる。一般には行列計算になるが、 s_l が等価な位置にある場合は、やはり簡単化できて、次の様な公式を得る。⁽¹⁾

$$\chi_2 = -\beta \chi_{sg} ; \quad \chi_{sg} = \beta^2 \mu_B^4 \frac{C_0 B_1 - C_1 B_0}{C_0 - C_1}, \quad (2.7)$$

$$\text{但し、} \quad \beta = 1/k_B T, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= \sum_{j \in \Omega} \langle\langle s_0 s_j \rangle_{cl}^2 \rangle_J, \quad B_1 = \sum_{j \in \Omega} \langle\langle s_k s_j \rangle_{cl}^2 \rangle_J, \\ C_0 &= \sum_{l \in \partial\Omega} \langle\langle s_0 s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J, \quad C_1 = \sum_{l \in \partial\Omega} \langle\langle s_k s_l \rangle_{cl}^2 \rangle_J, \end{aligned} \quad (2.9)$$

である。(2.7)の分母の零点を与える式は(2.6)と一致する。

結局、すべては相関関数の計算に帰着する。

3. 幾つかのクラスターにおける計算

実際の計算は、 $\pm J$ モデル ($p=1$) で、図4の様なクラスターで行った。ここで、次の2つの定理を用いて計算を簡単化した。

定理1⁽²⁾：イジング・スピンのクラスター A, B が、サイト j のスピン s_j のみによって、繋がっているとす。外場のないとき、クラスター A, B 内のスピン演算子 F, G の相関関数は、

$$\langle FG \rangle = \langle F s_j \rangle_A \langle s_j G \rangle_B \quad (3.1)$$

と分解できる。ここで、 $\langle \rangle_A$ はクラスター A での平均である。

定理2⁽³⁾：外場のない $\pm J$ ボンドのイジング・スピン系においては、各ブラケットにおけるフラストレーション分布を指定するだけで、

(i) 分配関数は、一意的に決まる。

(ii) スピン相関関数は、符号を除いて一意的に決まる。

ここでフラストレーションとは、ブラケットを囲むボンドの内、
-J ボンドが奇数本ある配位を言う。

この2つの定理を用いれば、例えば図2 (b)のクラスターでは、正方形の中
のスピンの相関関数をただ2通りのボンド配位について計算すれば良い。

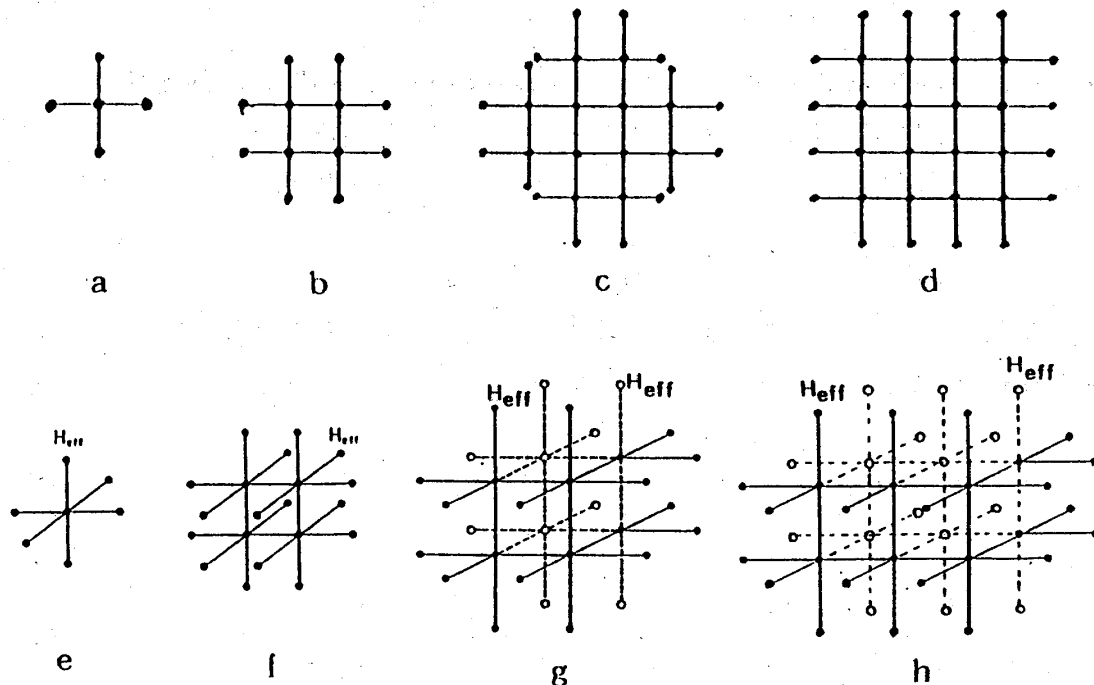


図4: 計算したクラスター。a, b, c, d) 2次元, e, f, g, h) 3次元。

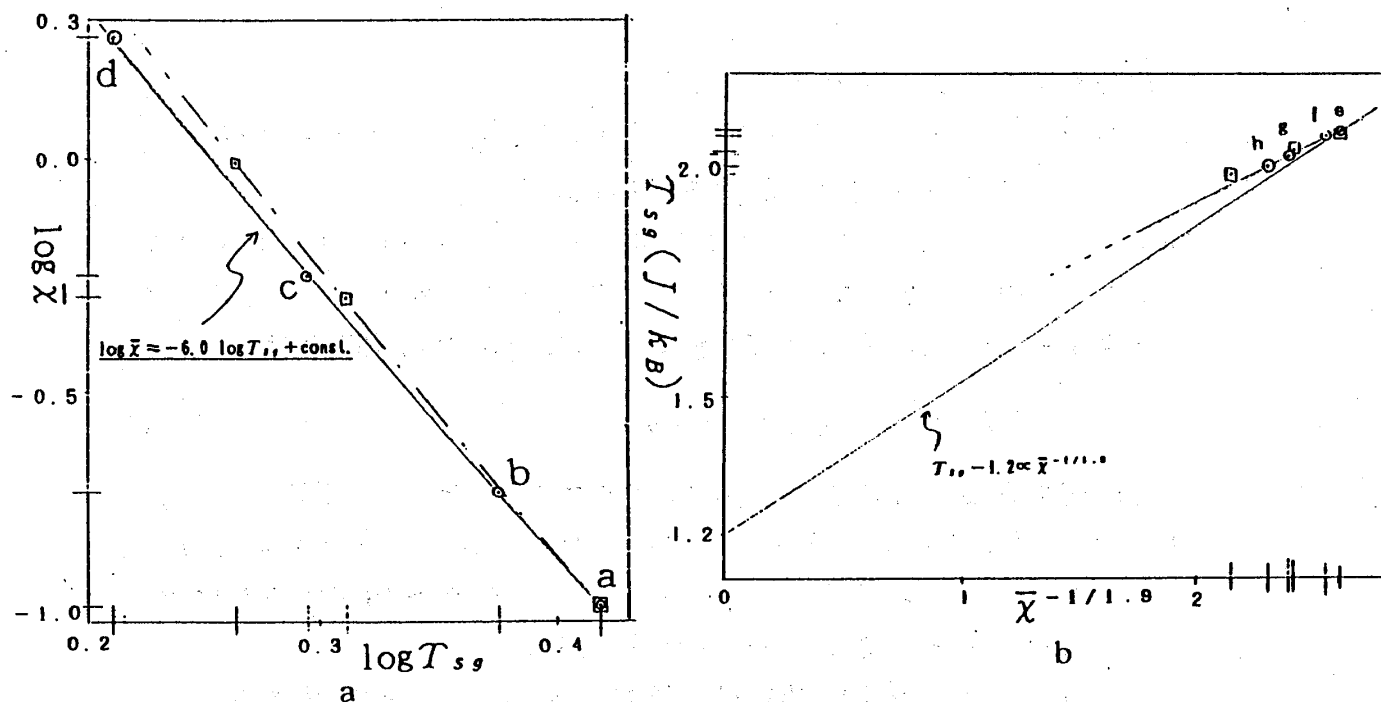


図5: CΛMプロット。a) 2次元では $\log \bar{\chi} \approx -6.0 \log T_{sg} + \text{const.}$ にのる。

b) 3次元では必ずしも $T_{sg} \approx 1.2 \bar{\chi}^{-1/1.9}$ にはのっていない。

(ここで、 $\square$ はカクス・トゥリー近似による値のプロット。)

4. 結果と検討

計算結果を表に示した。これらをCAM⁽⁵⁾によって処理し、転移点及び臨界指数を求める。なお図にはカクタス・トゥリー近似による結果を付記した。

- (i) 2次元では $T_{sg} \approx 0$ とコンシステントな結果を得た。この転移点に対して、臨界指数は $\gamma_s \approx 7.0$ であった。⁽⁴⁾(図4)
- (ii) 3次元では、一般に言われている値⁽⁴⁾ $T_{sg} \approx 1.2$, $\gamma_s \approx 1.9$ とは、必ずしもコンシステントではない。(図5)
- (iii) 図4の一番小さいクラスター(a)でも外側から超有効場がかかるため、スピングラスの計算では少しはフラストレーションの効果が入るが、(b)以上の大きなクラスターでは閉じたループがあるため、更にフラストレーションの効果を取り入れられ、一層真の臨界的振舞いに近づく。現在この方向での計算が進行中である。

表：各クラスターでの超有効場理論による転移温度とコヒーレント異常係数

2次元クラスター	図4 a	b	c	d
転移温度(J/k_B)	1.51865	1.45543	1.34379	1.23496
係数 $\bar{\chi}$ (μ_B^4/J^2)	0.38017	0.48918	0.77969	1.30243

3次元クラスター	図4 e	f	g	h
転移温度(J/k_B)	2.07809	2.06404	2.03051	2.00434
係数 $\bar{\chi}$ (μ_B^4/J^2)	0.16140	0.16880	0.18825	0.20459

ここで、係数 $\bar{\chi}$ は

$$\chi_{sg} \approx \bar{\chi} / \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon \equiv (T - T_{sg}) / T_{sg} \quad (4.1)$$

で定義される量である。

☆参考文献

- 1) Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. 57(1988)2310
- 2) Suzuki, M., Invited paper of ICM (July, 1988 in Paris), to be published in J. de Physique, Dec. 1988.
- 3) Toulouse, G., Commun. Phys. 2(1977)115
- 4) 例えばSingh, R. R. P. and Chakravarty, S., Phys. Rev. B36(1987)559: 高温展開により、2次元では $T_{sg} = 0$ と仮定して $\gamma_s = 5.3 \pm 0.3$ 、3次元では $T_{sg} = 1.175 \pm 0.025$, $\gamma_s = 2.9 \pm 0.3$ を得ている。
- 5) Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. 56(1986)4205