

アソシエーションスキームの拡張と2重可移群の計算

宮本 泉

MIYAMOTO Izumi*

山梨大学

UNIVERSITY OF YAMANASHI†

1 アソシエーションスキーム

置換群とアソシエーションスキームの関係を見るとき、2重可移群の場合にはアソシエーションスキームは自明なものになり、そこからもとの2重可移群がどのようなものであるかを考えることはできません。ここでは、アソシエーションスキームの或る種の拡張を考えて、とくに、2重可移群の場合に、もとの群が構成できるかどうかを調べます。すべての2重可移群の分類は、有限単純群の分類をもとにしてできていますが、構成的な計算法についての研究はほとんど無いようです ([2])。集合 $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、関係 $R_i \subset X \times X$, $0 \leq i \leq d$ に対して、

定義: $(X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ がアソシエーションスキームであるとは

1. $R_0, R_1, \dots, R_d$ は $X \times X$ の分割
2. $R_0 = \{(v, v) | v \in X\}$
3. ${}^iR_i = \{(v_i, v_j) | (v_j, v_i) \in R_i\} = R_i$ for some i *
4. 任意の $(u, v) \in R_k$ に対して $p_{i,j,k} = \#\{w | (u, w) \in R_i, (w, v) \in R_j\}$ は一定。

例: G は X 上の可移な置換群、 R_i は G を $X \times X$ に作用させたときの orbit。 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 、 $G = \text{Group}([(5,6)(7,8), (1,3,2,4)(5,8,6,7), (1,6,2,5)(3,8,4,7)])$ とすると、 ${}^iR_2 = R_3$ 、それ以外は、 ${}^iR_i = R_i$ で、

$$\begin{aligned} X \times X &= R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*佐藤真久氏に感謝します。

†miyamoto@yamanashi.ac.jp

この関係行列による表示は、 (i, j) 成分が $k \Leftrightarrow k \in R_k$ により定めます。とくに、 G が X 上 2 重可移 $\Leftrightarrow G$ は $X \times X \setminus R_0$ 上可移となるので、 $X \times X$ の分割は、下のようになります。そして、このアソシエーションスキームの自己同型群は、 X 上の対称群 $Sym(X)$ になります。

$$\begin{aligned}
 X \times X &= R_0 + R_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2 Superscheme

アソシエーションスキームの拡張して、一般に $X \times X \times X$ の分割なども考慮します。

定義： (X, Π) が superscheme であるとは、

1. $\Pi^l = \{R_0^l, R_1^l, \dots, R_d^l\}$ は X^l の分割 ($1 \leq l \leq m, m \geq 2$)。
2. $\pi_l : X^l \rightarrow X^{l-1}$ ($u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l \rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_{l-1})$) とおくと、 $\pi_l(R_k^l) \in \Pi^{l-1}$ が成立。
3. $(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}) \in \pi_l(R_k^l)$ にたいして $p_k^l = \#\pi_l^{-1}((u_1, u_2, \dots, u_{l-1})) \cap R_k^l$ は一定。(regular)
4. $\sigma \in Sym(l)$ にたいして、 $\sigma(R_k^l) \in \Pi^l$ 、ただし、 $\sigma(R_k^l) = \{(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(l)}) | (u_1, u_2, \dots, u_l) \in R_k^l\}$ 。(symmetric)

superscheme には他の定義もありますが、この定義は Ivanyos のプリントを参考にしました。アソシエーションスキームの定義から自然に $R_{i,j,k} = \{(u, v, w) | (u, v) \in R_k, (u, w) \in R_i, (w, v) \in R_j\}$ による X^3 の分割が誘導され、 $m=3$ の superscheme になっています。このとき、 $(u, v) \in R_k$ にたいして、 $\#\pi^{-1}((u, v)) \cap R_{i,j,k} = p_{i,j,k}$ となります。アソシエーションスキームのときと同様に、 X 上の (可移とは限らない) 群 G の X^l 上 orbit ($1 \leq l \leq m$) は superscheme になります。16 次の場合で、アソシエーションスキームは約 200 個、可移な置換群は約 2000 個、可移な置換群からつくられる ($m=3$ の) superscheme は約 400 個あります。

3 計算アルゴリズム

ここでは、2 重可移群を、その 1 点固定部分群から復元することを試みます。 G を $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の 2 重可移群、 G_n を点 n を固定する部分群とします。2 重可移で、3 重可移ではない群 G にたいして、 G_n の X^3 上の orbit を集めて、 G の orbit を構成することを考えます。このことは、 G_n のつくる ($m=3$ の) superscheme による分割をもとに G のつくる superscheme を推測することを意味します。以下に、詳しく説明をして、例を紹介します。 $X^{(l)} = \{(i_1, i_2, \dots, i_l) \in X^l | j \neq k \text{ のとき } i_j \neq i_k\}$ とします。 G の X^2 の orbit は R_0 と $X^{(2)}$ 、つまり、 G のつくる superscheme による X^2 の分割が $\Pi^2 = \{R_0, X^{(2)}\}$ となることから、考慮するのは $X^{(l)}$ に含まれる orbit のみで十分になります。

G_n の $X^{(3)}$ 上の orbit には、次の 3 種類があります。

1. 点 n を含まないもの $\cdots G_n$ の $X \setminus \{n\}$ 上の superscheme
2. (i_1, i_2, n) を含むもの $\cdots \pi_3$ を通して、 G_n の $X \setminus \{n\}$ 上のアソシエーションスキーム
3. 残り、 $(i_1, n, i_2), (n, i_1, i_2)$ を含む $\cdots \sigma(\{(i_1, i_2, n)\})$ により得られる。

これらの orbit を集めて、 π_3 による像が $X^{(2)}$ になり、さらに、superscheme の定義にある性質 3 と 4 を満たすようにします。具体的には、projection π_3 による対応が $p_k^3 : 1$ の一定になること、性質 4 の対称性から、定義には入れてない projection についても同様の対応になっていることです。さらに、対称性で orbit がどのように動くかも考慮します。 G の $X^{(3)}$ 上の orbit で点 n を含む組と、 G_n の orbit の種類 2 と 3 のものが対応しているので、 G の $X^{(3)}$ 上の orbit には種類 2 と 3 の orbit がそれぞれ丁度 1 つ含まれています。ここでの π_3 の対応から、 p_k^3 の値が定まり、したがって、含まれる orbit はサイズが等しいこともわかります。GAP を使って書いた計算プログラムは、この条件をみたす G_n の $X^{(3)}$ 上の orbit の組合せを全て求めます。プログラムでは、 G_n の $X^{(3)}$ 上の orbit に番号を付けて、その番号で答を返します。条件を満たす組合せが無いときは、空の答 $[]$ を返します。このことは、特に、 G_n を 1 点固定群とする 2 重可移群は存在しないことを意味します。また、 G が 3 重可移以上のときは、 $m = 3$ の superscheme に代えて、適当な $m \geq 4$ の superscheme を考えます。この場合の例も次節にありますので、参照下さい。

表 1: $GL(3, 2)$ on $\{1, 2, \dots, 7\}$ の orbit と π_3 による対応表

orbit 番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
代表	[7,1,6]	[7,1,2]	[1,7,6]	[1,7,2]	[1,6,7]	[1,2,7]	[1,2,3]	[1,2,4]	[1,2,5]	[1,2,6]	[1,6,2]
π_3	[7,1] 1	[7,1] 4	[1,7] 1	[1,7] 4	[1,6] 1	[1,2] 1	[1,2] 1	[1,2] 1	[1,2] 1	[1,2] 1	[1,6] 4
$[\sigma_1, \sigma_2]$	[3,5]	[4,6]	[1,3]	[2,4]	[5,1]	[6,2]	[7,7]	[8,8]	[10,11]	[9,10]	[11,9]
種類	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1
size	6	24	6	24	6	24	24	24	24	24	24

例：2 重可移群 $G = GL(3, 2)$ 、 $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ 、 G は $X^{(3)}$ 上に、長さ 42 と 168 の 2 個の orbit をもつ。 G_7 の $(X \setminus \{7\})^{(2)}$ 上の orbit は 2 個、長さ 6 と 24、(それぞれ $[1, 6]$ 、 $[1, 2] \in X^{(2)}$ を含む)、 G_7 の $(X \setminus \{7\})^{(3)}$ 上の orbit、長さ 24 が 5 個したがって、 G_7 の $X^{(3)}$ 上の orbit は、 $6 + 5 = 11$ 個、表 1 を参照して下さい。 G_7 の $X^{(3)}$ 上の orbit の π_3 による像は G_7 の $X^{(2)}$ 上の orbit になることに注意して計算します。 G の $X^{(3)}$ 上の orbit を作るために、最初、おなじサイズの種類 2、3 の orbit 1、3、5 番を集めて π_3 による像を考慮すると、この時点で不足しているのは像が $[1, 2]$ を含む orbit になり、その対応が 1:1 である orbit で、orbit 番号 7、8、9、10 が候補になります。そこで対称性を考慮すると 9、10 番は除外されます。ここで得られる答は、 $[1, 3, 5, 7]$ と $[1, 3, 5, 8]$ の 2 つになります。さらに、 π_3 以外の projection に関する条件を考慮し、残った部分も同様にして、プログラムの答は

$$\begin{aligned} & [[[1, 3, 5, 7], [2, 4, 6, 8, 9, 10, 11]], \\ & [[1, 3, 5, 8], [2, 4, 6, 7, 9, 10, 11]]] \end{aligned}$$

の 2 つになります。

今回得られた答の自己同型群を計算すると最初に与えられた $GL(3, 2)$ と、その 7 次対称群における共役群になり、いずれも正しい答を与えています。

4 計算例

例：前節の群 G_7 のつくる $\{1, 2, \dots, 6\}$ 上のアソシエーションスキームをもとに G を復元できるかを見ます。このアソシエーションスキームの関係行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、この自己同型群は $Sym(2) \wr Sym(3) \supset G_7$ になります。このアソシエーションスキームが誘導する $(X \setminus \{7\})^{(3)}$ の分割は、サイズ 48、24、24、24 の集合で構成されていて、superscheme で考えた場合と対比して示すと表 2 になります。

表 2: G_7 のアソシエーションスキームの誘導する $X^{(3)}$ の分割

分割を構成する集合のサイズ	6	24	6	24	6	24	48	24	24	24
対応する G_7 の orbit 番号	1	2	3	4	5	6	7,8	9	10	11
種類	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1

この分割を構成する集合を集めて、 G のつくる superscheme を構成するのですが、プログラムのだす答は空 [] になります。これは前節の例の結果から推測できることです。なぜなら、前節の例の答ではいずれも orbit 7 と 8 番が G の異なる orbit に含まれるのに、アソシエーションスキームによる分割では、この 2 つの orbit が 1 つになってしまっているからです。

例： $GL(3,2)$ の作る 7 次の superscheme ($m=4$) を拡張して、8 次の superscheme ($m=4$) を構成することを試みます。 $GL(3,2)$ の $\{1, 2, \dots, 8\}^{(4)}$ 上の orbit は、 $8+5=13$ 個、サイズ [42, 168, 42, 168, 42, 168, 42, 168, 168, 168, 168, 168]、答は一つ [[1, 3, 5, 7, 13], [2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12]]。拡張で得られる群は、 $AGL(3,2) = 2^3 GL(3,2)$ 。

さらに、 $AGL(3,2)$ の作る 8 次の superscheme ($m=5$) を拡張して、9 次の superscheme ($m=5$) を構成することを試みます。 $AGL(3,2)$ の $\{1, 2, \dots, 9\}^{(5)}$ 上の orbit は、 $10+5=15$ 個で、サイズは [1344, 336, 1344, 336, 1344, 336, 1344, 336, 1344, 336, 1344, 1344, 1344, 1344, 1344]、答は空 [] になります。

以上、前節の例とこの例の計算時間はそれぞれ 20、230、2540 msec。PentiumIII 933MHz、メモリー 256MB の Linux パソコンで実行しました。

例：15 次の 2 重可移群 $A(7)/GL(3,2) \subset GL(4,2)$ 。この 2 つの群の 1 点固定群の作る superscheme は異なるが、拡張を計算すると両者一致します。したがって、 $A(7)$ の 1 点固定群から得られるのは、 $A(7)$ ではなくて、 $GL(4,2)$ になります。

この様に、 G の部分群 H の拡大を計算しても、 G の拡大になってしまう例は多く出てきます。それでも、次節に述べている範囲の 2 重可移群の計算では、57 個の中で 2 例を除き、 $|G:H| \leq 3$ になります。例外の 1 例が上に述べたもので、 $|G:H| = 8$ になっています。もう 1 例は Mathieu 群 $M(22)$ に関係した $PSL(3,4)$ で、 $|G:H| = 6$ になります。これらの例とは逆の意味で、次の命題が成立します。

Proposition 1 可移な部分群 $H \subset G$ の両方が $m-1$ で同じ superscheme を与えるとする。このとき、 H の拡大が無いならば、 G の拡大も無い。

ここで計算している superscheme は、 $(m = 3, 4, 5)$ で $X^{(m-1)} \in \Pi^{m-1}$ となるものばかりですが、群からは作られない例が、かなりたくさんでできます。

例: $C(6)$ の拡大の計算。答は 4 個、そのうち 2 個は 7 次の 2 重可移群 7:6 を与えます。残りの 2 個は、7 次の superscheme($m = 3$) を与えるが、それから自然に誘導される $\{1, 2, \dots, 7\}^4$ の分割では、7 次の superscheme($m = 4$) になりません。

例: 7 次の 2 重可移群 7:6 の拡大の計算。答は 2 個、1 つは 3 重可移群 $\text{PGL}(2, 7)$ 、もう 1 つは superscheme($m = 4$) を与えますが、その誘導 superscheme($m = 5$) は存在しません。

5 計算の現状

GAP のデータベース $\text{TransitiveGroup}(n-1, i)$ と $\text{PrimitiveGroup}(n-1, i)$ に入っている群について、その群を G_n として、拡大の計算を試みました。固定群 G_n の $(X \setminus \{n\})^{(3)}$ 上の orbit(種類 1 の orbit) の個数が 70 位まで計算可能です。regular な群では 10 次までになります。Mathieu 群 $M(10)$ から $M(11)$ の計算はできますが、 $M(11)$ の superscheme ($m = 6$) の計算はメモリーサイズ不足で計算できません。2 重可移で 3 重可移では無い群 G に対して、 G_n から G を求めるとき、種類 1 の orbit は 5.0 個以下の条件下で、81 次 $G \cong 3^4 : \text{SL}(4, 3)$ の場合まで計算できます。

参 考 文 献

- [1] The GAP Group, *GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany and School of Mathematical and Computational Sciences, Univ. St. Andrews, Scotland, 1997.
- [2] B. Huppert and N. Blackburn. *Finite Groups III*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
- [3] G. Ivanyos. On the combinatorics of evdokimov's deterministic factorization. *Draft preprint*, 1997.
- [4] W. M. Kantor. Some consequences of the classification of finite simple groups. *Contemporary Math.*, 45:159-173, 1985.