

フーリエの熱の解析的理論に見る微積分の基本定理

九州大学大学院数理学研究院 高瀬正仁(Masahito Takase)

Graduate School of Mathematics

Kyushu University

1. 微分積分学に寄せる素朴な疑問

今日の微積分の理論構成を概観すると、根幹を作るのは「微分積分学の基本定理」と見てよいと思われるが、他方、オイラーの解析学三部作『無限解析序説』『微分計算教程』『積分計算教程』には「微積分の基本定理」の姿はどこにも見られない。いかにも不思議に感じられ、長い間、疑問であり続けていた。オイラーの三部作は微積分概論として広く受け入れられた書物であり、アーベルもラグランジュもオイラーに学んだのである。19世紀になるとコーシーの微積分概論が登場するが、そこには微積分の基本定理が今日の姿のままに現れている。コーシーは関数を微分し、関数を積分する。関数概念を提示し、極限の概念を根柢に据えて、「関数の微分」の理論と「関数の積分」の理論を個別に構成し、その後、微分と積分は関数を対象にしてなされる逆演算であることが示されるのである。今日の目から見て、コーシーの解析概論は微積分教程の起源である。では、コーシー以前のオイラーの時代には、何を微分し、何を積分していたのであろうか。あるいは、さらに源泉に立ち返るなら、ライプニッツやベルヌーイは微積分の名のもとに何をしていたのであろうか。微積分の基礎にはこのような一群の問いが横たわり、思索を強いられてしまう。ひとりひとりの著作を個別に学ぶ際の困難とは別の、歴史の流れの中でつながりを考えようとするときに発生する困難である。

フーリエは「任意の関数」をフーリエ級数に展開したというのはよく言われる話だが、ではフーリエの念頭にあった「関数」とはどのようなものだったのであろうか。関数関数概念そのものに時代を越えた普遍性があるわけではないし、今日の数

学で普通に諒解されている関数概念をフーリエがすでにもっていて、それをフーリエ級数に展開したと考えるのは無理なのではないかと思う。当時の状況を顧みると、フーリエが承知していたのは、オイラーが提案した三種類の関数概念と、ラグランジュの関数概念と、コーシーの関数概念であったと推定してよいと思うが、フーリエはフーリエに独自の関数概念を手持ちにしていたのかもしれないし、現にフーリエの研究を受けたディリクレは、フーリエ級数論の展開にあたり、新たな関数概念を提示することから説き起こしている。そのような経緯があるので、

「フーリエはどのような関数をフーリエ級数に展開したのであろうか」

という素朴な問いが、数学史の立場から見て重大な意味合いを帯びてくるのである。

歴史的思索を捨象することに決めるなら、この種の問いかけは無意味になるであろう。関数概念は今日通有のものを採用することにして、今日のフーリエ解析の知見を踏まえてフーリエを読めば、そこに見えてくるのは現代のフーリエ解析の萌芽的状态である。それを不完全な原型と見て、フーリエから今日にいたるまでおよそ200年ほどの歳月をかけて、どのように生い立ってきたのかという道筋を描写することはつねに可能であり、このような視点を採ると「フーリエ解析形成史」が叙述され、「現代数学形成史」の一翼が形作られることになる。だが、このような歴史叙述は現在の時点から顧みた歴史解釈の試みの域を出ず、これでは数学の流れの姿形が定まらない。歴史的映像は時代とともに絶えず変遷するからである。どれほど斬新でおもしろくとも、時々刻々と移り行く可能性をつねにはらむ歴史解釈の試みは知的遊戯の域を出ず、ぼくらはそこから何も学ぶことはできないであろう。数学の諸概念のひとつひとつに、時間を越えて普遍的な姿形が必ず存在しうるわけではないし、現に関数概念はフーリエの眼前で変遷しつつあるところである。

そこで視点を逆向きに変えて、「川の流に沿う数学史」を提唱したいと思う。解釈ではなく事実認識に重点を置く。フーリエがはじめて関数のフーリエ級数展開のアイデアを手にしたときのように、何かしら数学的現象を一番はじめに発見した人はここかしこに確かにいるのであるから、そのような人々の心情を想像する。当事者の心情は動かない事実であるから、恣意的な解釈が入り込む余地はない。そうしてその際、発見が起る前の状勢をよく観察し、それだけを手持ちにして、はたし

てどうしたら発見がありうるのかというところに思索のポイントを定めたい。その後にはじめて歴史が流れ始めていく。数学的発見を体験した一番はじめの人物の心情が継承されたなら（ただし継承されずに立ち消えてしまうこともあると思う。また、継承されるまでに非常に長い年月がすぎることもあると思う）、発見に発見が打ち続き、しかも発見した人物の心情がそのつど附随して語られるような歴史叙述が可能なのではあるまいか。

考察例 1. 微積分の基本定理の発見という出来事はどこまでさかのぼることができるのだろうか。コーシーが定式化した基本定理を手持ちにして歴史をさかのぼってみる。するとここかしこに基本定理の断片が目に残り、ライブニッツにはすでに基本定理があったというふうに言われたりする。これは歴史解釈の一事例である。

考察例 2. ゼータ関数の特殊値の計算例が蓄積された経緯もおもしろい。オイラーには多くの計算例が見られるが、オイラー自身は、後にゼータ関数という名で呼ばれることになる解析関数をもっていたわけではない。ゼータ関数を手に持ってオイラーを顧みると、あちこちにゼータ関数の特殊値の計算例が散らばっている情景が目に見えるが、これも歴史解釈の試みが描き出す幻影である。オイラーにはオイラーに固有の動機があってそうしたのであり、その動機はゼータ関数の理論とは無関係である。

考察例 3. フェルマが発見した「直角三角形の基本定理」と類体論。「直角三角形の基本定理」というのは、「 $4n+1$ 型の素数は二つの平方数の和の形に一意的に表示される」という命題で、発見者はフェルマである。論理的に見ると、この定理は平方剰余相互法則の第一補充定理と同等であるから、類体論の起原はフェルマまでさかのぼるという議論が成立する。だが、類体論は19世紀の末になってヒルベルトが表明したアイデアである。フェルマからヒルベルトまで、およそ250年。直角三角形の基本定理の本質は類体論を俟って明らかになったと見る視点は、現代数学形成史としての数学史を語る立場からの歴史解釈である。他方、類体論がなくても直角三角形の基本定理は存在し、実際にオイラーの手で証明され、そこから素数の形状に関する大きな理論が形作られていった。これはこれで完成された理論なので

あり、類体論とは関係がない。ずっと後になってできた理論をもって、大昔の定理の意味合いが明らかになったというふうに論じるのは、ぴったり当てはまりそうなこともあるにはあるが、あまりよくないのではないかとも思う。

こんなふう拾っていくと諸例は無数である。中には、整数論における「冪剰余相互法則と類体論」の関係、多変数関数論における「不定域イデアルと層係数コホモロジー」の関係など、理論全体の理解を根本的に左右するほどの非常に大掛かりな事例もある。今日の数学の諸理論それ自体に関心を寄せるという立場を堅持するのであれば、数学史を現代数学の形成史と見てもさしつかえるわけではなく、それはそれでおもしろいところもある。たとえばアンドレ・ヴェイユの自伝

「アンドレ・ヴェイユ自伝 ある数学者の修業時代」（上下2巻，2004年，シュプリンガーフェアラーク東京）

や、同じヴェイユが書いた数論史

「数論 歴史からのアプローチ」（1987年，日本評論社）

などは、そのような視点から見て恰好のモデルになっている。ヴェイユは歴史に造詣の深い数学者で、ブルバキの叢書「数学原論」の「歴史覚書」の過半もヴェイユの手になると言われている。アイゼンシュタインの初期の楕円関数論を語る著作もあるし、クンマーの全集に巻頭言を書いたのもヴェイユである。だが、それらの作品は、歴史叙述というよりもむしろヴェイユ本人の数学と数学観を語っていると見るのが至当なのではあるまいか。本稿ではヴェイユとは逆の道筋を模索したいと思う。

2. フーリエの関数概念 フーリエの作品「熱の解析的理論」 （西村重人訳）より

フーリエの作品「熱の解析的理論」は現在、西村重人さんの手で翻訳が進められているが、間もなく小松彦三郎先生の解説が附されて、朝倉書店の数学史叢書の一冊として刊行される予定である。本稿ではフーリエ解析それ自体ではなく、このフー

リエの作品に見られる関数概念の姿に焦点をあて、「フーリエはどのような関数をフーリエ級数に展開したのか」という問いを考察したいと思う。

第3章「無限直方体における熱伝播」から拾う。

【引用例 1】

3.3 これらの級数についての注意

第179-189節

[第186節より]

今度は級数を補完する積分

$$\frac{1}{2^3 m^3} \int \cos 2 m x d(\sec'' x)$$

を挟む限界を知ることが問題である。この積分を得るためには、積分が始まる限界 0 から弧の最終値 x に至るまで、無数の値を弧 x に与え、 x の各々の値に対して微分 $d(\sec'' x)$ の値と因子 $\cos 2 m x$ の値を定め、それらの積をすべて加えなければならない。

この言葉には、積分というものをフーリエがどのように諒解していたのかということがはっきりと示されている。すなわち、積分というのは、無数の無限小量の連続的総和である。言い換えると、無限小変化量、すなわち「微分」の総和である。無限小量という考えを放棄し、その代りに極限の概念を導入して積分の把握を試みれば、コーシーの和やリーマンの和がおのずととらえられてくると思うが、根幹を作るアイデアは同じである。

このアイデアはルベグ積分に移ると一変する。ルベグ積分では微分記号 dx はもう無限少量ではない。

オイラーの解析学の世界では、微分、すなわち無限小変化量の総和として認識される有限量が積分である。そこで逆に積分を無限小量に分解すれば、微分が手に入る。このように「有限の世界と無限小の世界の間の往還規則」の発見が「微分計算と積分計算の発見」である。有限値を取りながら変化する量、すなわち有限変化量の微分を作ると、無限小量を取りながら変化する量、すなわち無限小変化量が生成される。有限量の世界から無限小量の世界へに移る規則を教えるが微分計算である。

フーリエはオイラーの世界をよく継承しているように見える。

微分計算の計算の根幹を作るのは二つの計算規則である。

$$(1) \quad d(x+y) = dx + dy$$

$$(2) \quad d(xy) = x dy + y dx \quad (\text{ライプニッツの公式})$$

x や y という記号で指し示されているものは何だろうか。オイラーははっきりと変化量という名で呼んでいるが、ライプニッツの段階では x や y は「変化しない記号」のように見えることがある。

無限小の世界で二点間を結ぶ直線を引き、それを無限に延長して有限の世界にもどれば曲線の接線が描かれる。無限小の世界でピタゴラスの定理を適用して直角三角形の斜辺の長さを算出し（線素の確定）、それを寄せ集めて（すなわち、積分して）有限の世界にもどれば、曲線の長さが手に入る。同様の考えで、無限小の世界において有限の世界で通有の簡単な計算規則をそのまま適用して面素を求め、それを寄せ集めれば、複雑な形の領域の面積や曲面積が手に入る。こんな計算法のアイデアが微積分の根幹だったのではないかと思う。

寄せ集めのための特別の計算法は不要である。発見しなければならないのは微分計算の規則のみである。「寄せ集めて得られる有限量」、すなわち積分は、無限小量に分解すれば元の微分にもどるのである。そこで、あらかじめいろいろな種類の有限量の微分をなるべくたくさん計算しておいて、微分計算の一覧表を作っておく。その表の中に、目的に応じて算出した微分があれば、その積分は表を見ればわかる。表の中に見あたらない場合には、工夫して、一覧表に出ている公式に帰着されるようにする。この工夫の総体が積分計算というものの具体的な中味である。工夫というのは部分積分と置換積分のことで、特に多種多彩な置換積分を案出することろに工夫の要点がある。

このようなわけで、微積分の発見と言われる出来事に見られる素朴であからさまな情景を見れば、後に微積分の基本定理と呼ばれるようになったものの姿が看取されるように思う。しかし、発見されたのは微積分のアイデアと計算規則なのであり、微積分の基本定理という名の命題ではない。ライプニッツの微分法の第一論文（1684年）からコーシーの解析教程まで、おおよそ140年ほどの間に微積分の大掛かりな再編成が行われ、一番先に発見されたものが基本定理という衣裳をまとって現れたのである。その際、肝心なのは関数概念が何らかの意味合いにおいて確定して

いることである。関数を微分し、関数を積分するという観点が確立してはじめて微積分の基本定理の言明が可能になるのであり、関数がなければ基本定理はないのである。

微積分の再編成は二段階に分けて行われた。二段階の担い手はオイラーとコーシーである。

積分計算の工夫という点に限定して考えるなら、無限級数の活用も有効であり、ニュートンやライプニッツ、あるいはもっと以前にさかのぼる古い研究史がある。

【定積分についての補足】

定積分の記号

$$\int_a^b f(x) dx$$

を数学にはじめて導入したのはフーリエである。では、定積分とは何だろうか。コーシーの構成法にしたがえば、まずはじめに定積分が導入される。その次が不定積分。だが、コーシー以前はそうではない。オイラーにならうなら、与えられた変化量 x に対し、微分方程式

$$dy = f(x) dx$$

を満たす変化量 y が取るさまざまな値の総体が、不定積分の記号で $y = \int f(x) dx$ と表されているのである。オイラーの言葉によれば、「関数もまた変化量」なのであり、定積分の名に相応しいのは変化量 $y = \int f(x) dx$ が獲得する個々の値である。そこでフーリエは、「定まった積分値」という言葉を使うのである。このような用語法を見ても、フーリエがオイラーを踏襲している様子は明白である。コーシーは何かを逆転させて、微積分全体の再編成を企図したのではないかと思う。すなわち、微分法では微分係数の定義を先にした。積分法では定積分の定義を先行させたが、その際の拠り所は「無限小量の寄せ集め」という積分の素朴なイメージなのであった。機会があればコーシーの著作に即して、このあたりの消息を精密に論証したいと思う。

【引用例 2】

3.6 任意関数の三角級数展開

第207-235節

〔第219節より〕

ここまでは、弧の倍数の正弦の作る級数に展開したいと思う関数が、変化量 x の冪級数に展開できて、しかもそこには奇数冪だけしか含まれないと仮定してきた。同じ結果をどのような関数に対しても、不連続でしかもまったく任意の関数 に対してさえも拡張することができる。

関数の冪級数展開を考えるとところには、ラグランジュの作品「解析関数の理論」(1797年)の影響が見られるように思う。ラグランジュはこの著作では冪級数そのものを指して関数と呼んでいる。

「不連続関数」については意味がよくわからない。オイラーの作品『無限解析序説』巻2, 第1章を見ると「連続曲線」と「不連続曲線」に出会う。

【オイラーより】

第9条.

曲線というものの観念をこのように認識すると、そこから即座に、曲線の区分け、すなわち連続曲線と不連続曲線(あるいは複合曲線)への区分けが導出される。もう少し詳しく言うと、連続曲線というのは、あるひとつの定められた x の関数を通じてその性質が表わされるという性質を備えた曲線のことである。これに対し、ある曲線のいくつかの異なる部分 $BM, MD, DM, \dots$ の各々が x の別々の関数を用いて書き表わされ、部分 BM がある関数により規定された後に、部分 MD が他の関数により描写される等々、という様子が認められるなら、そのような曲線は不連続曲線、あるいは複合曲線とか非正則曲線などという名で呼ばれる。というのは、この種の曲線はある一定の法則に基づいて描かれているのではなく、いくつかの異なる連続曲線の断片を素材にして組み立てられているからである。

この記述により、オイラーは曲線を「関数のグラフ」として認識しようとしたことがわかる。オイラーはこのアイデアをヨハン・ベルヌーイに学び、『無限解析序

説』において明確に表明したことになる。オイラーの言う関数はいつでも「連続曲線」のようにも見える。連続曲線のグラフが不連続曲線なのであるから、不連続曲線をグラフにもつ関数を考えると、それが、フーリエのいう不連続関数なのではないかと思う。

【引用例 3】

[第220節より]

以上のことから、等式

$$\frac{1}{2} \pi \varphi(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \cdots$$

に含まれる係数 $a, b, c, d, e, f, \cdots$ は、前に逐次消去法で得られてはいるが、一般項

$$\int \varphi(x) \sin ix \, dx$$

で表される定まった積分値となることがわかる。ここで i は求める係数をもつ項の番号である。この注意は、まったく任意の関数さえも、どうすれば弧の倍数の正弦の作る級数に展開できるかを示している点で重要である。実際、関数 $\varphi(x)$ が何らかの曲線の可変縦座標によって表され、その横座標は $x=0$ から $x=\pi$ に及ぶとしよう。横座標軸上のこの部分に $y=\sin x$ を縦座標とする既知の三角曲線を描けば、積分項の値を表現するのは簡単である。各横座標 x に対して、 $\varphi(x)$ の値と $\sin x$ の値が対応するが、後者の値に前者の値を掛けて、座標軸の同じ点に積 $\varphi(x) \sin x$ に相当する縦座標を立てると思えばよい。この手続きを連続的に行うことによって、三番目の曲線が構成されるが、その縦座標は $\varphi(x)$ を表す任意曲線の縦座標に比例した三角曲線の縦座標となる。このようにすれば、変型された曲線の面積を $x=0$ から $x=\pi$ までとるとき、その面積は $\sin x$ の係数の正確な値を与える。 $\varphi(x)$ に対応する与えられた曲線がどうあろうと、すなわちその曲線に解析的な方程式が与えられても、その曲線が規則正しいいかなる法則にも束縛されないとしても、それが何らかの形でつねに三角曲線を変形する役割を担っていることは明白である。したがって、変型された曲線の面積は、どんな場合においてもある定値をとり、それが関数の展開式における $\sin x$ の係数の値を与える。次の係数 b 、すなわち $\int \varphi(x) \sin 2x \, dx$ についても同様である。

このあたりのフーリエの記述は、フーリエが手中にしていた関数概念を考えるうえで重要な示唆を与えていると思う。フーリエは、曲線の縦座標により関数が表される、というのであるから、フーリエの念頭にまずはじめにあるのは曲線であり、曲線が関数を規定することになる。まずはじめに関数があって、そのグラフを描いて曲線が生成されるのではない。曲線が先で、その後に関数が現れる。不思議なことに曲線というものの概念規定はどこにも見られないが、「与えられた曲線がどうあろうとも」というのであるから、たとえば紙の上に鉛筆でめちやくちやに線を描けば、それはまったく任意の曲線と見なされることになるであろう。曲線の素朴なイメージには実在感があり、フーリエはそれを頼りにして関数を考えていたのではないかと思う。ただし、曲線の縦座標を関数と見るというアイデアはフーリエに独自というわけではなく、この種の関数概念もまたオイラーに由来する。

この関数概念では、規定されるのは「横座標 x に対応する縦座標 $y = \varphi(x)$ 」という対応関係のみである。横座標 x は変化するわけではないし、縦座標 $y = \varphi(x)$ もただ単に x に対応するというだけのことで、別段変化するわけではない。この点に着目し、しかもあくまでも「関数を先、曲線を後」にするという視点を採ることにするならば、「抽象的な一価対応」というディリクレの関数概念が抽出されるであろう。これが、今日の関数概念の淵源である。オイラーにもフーリエにもディリクレにも共通して見られるのは、何らかの形で関数概念を提示しようとする強固な意志である。

オイラーは「無限解析序説」の巻1の冒頭で、関数概念を「解析的な表示式」という言葉により抽象的に規定し、巻2に移ると、曲線を関数のグラフとして認識するという視点を採用した。関数の性質に基づいて曲線の性質を理解しようとするアイデアである。二次曲線のような代数曲線やサイクロイドや螺旋等、既知の超越曲線の性質の解明のためには、このアイデアは有効に作用した。使われる関数の範囲が限定されていて、諸性質がよく知られているからである。この場合には関数が先で、曲線が後になっている。

曲線と関数のどちらを先に規定するのがよいのだろうか。ロピタルの微分法のテキスト『曲線の理解のための無限小解析』（1996年）では、曲線を理解することが無限小解析のねらいであった。これは微分計算というものの源泉に由来するアイデアであり、ライプニッツもそうだったし、ロピタルに微積分を教えたヨハン・ベル

ヌーイも、そのヨハンに数学を学んだオイラーもこの点はみな同じである。ロピタルのテキストの冒頭には、「無限小の長さをもつ辺をつないで形成される無限多角形」という曲線の定義が現れる。オイラーはヨハン・ベルヌーイとともに関数概念を提示して、「関数のグラフ」として曲線を規定するという視点を打ち出した。

こんなふうに数学の諸相を具体的に観察すると、「関数概念」という普遍性を帯びた概念がどこかに存在するというのではなく、本来の探究の目的は別にあり、そのねらいに応じて概念規定の工夫を重ねるという道筋をたどることになるのではないと思う。既知の曲線の諸性質（接線や法線を引いたり、弧長を求めたりすることなど）を統一的な視点から理解したいというのであれば、「解析的表示式」としての関数概念で間に合うのである。サイクロイドのような超越曲線も既知の曲線の仲間だが、それらを認識するには、「円から生じる超越量」「指数量」「対数」を取り込めば十分である。これらの超越量はオイラーの著作『無限解析序説』巻1に出ているが、三角比や指数や対数はオイラーより前にすでに知られていた。ただしオイラー以前にはそれらは「関数」であったわけではなく、オイラーが関数概念を導入してはじめて関数の名を獲得したのである。変化量 x が与えられたとき、円の観察を基礎にして新たに $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ などの変化量が作られる。これらが「円から生じる超越量」である。 e^x は指数量、 $\log x$ は対数と呼ばれる超越量である。オイラーにならって「関数」という言葉を使うなら、これらはそれぞれ三角関数、指数関数、対数関数と呼ばれ、総体的に初等超越関数と称されることもある。

ロピタルの著作のタイトルには無限小解析の目的が「曲線を理解するため」と明記されているが、このねらいを変更して、たとえば弦の振動や熱の伝播の状況の記述という場面を想定すると、「解析的な表示式」では守備範囲が狭すぎて適切さを欠いてしまう。このような場合には関数概念をもっと広くとらなければならず、実際にオイラーは弦の振動の研究に際して「任意に描かれた曲線を通じて定められる関数」（リーマンの言葉）の概念を導入した。これがもっとも一般性の高い関数概念であり、フーリエのいう「まったく任意の関数」と同じものである。フーリエは解析学のための根本においてオイラーを継承したのである。

【引用例 4】

[第229節より]

それゆえ、弧の倍数の正弦や余弦を用いて作られる級数は、定められた限界の間において、およそ考えられる限りのあらゆる関数を表したり、不連続性をもつ線や面の縦座標を表すのに適している。展開の可能性が明らかにされただけでなく、級数の諸項を計算するのも簡単である。等式

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_i \sin ix + \cdots$$

において、任意の係数の値は定まった積分値、すなわち

$$\frac{2}{\pi} \int \varphi(x) \sin ix \, dx$$

の値である。関数 $\varphi(x)$ にかかわらず、すなわち、それを表す曲線の形がどうあろうと、この積分は微分積分計算に取り入れることのできる一定値をもつ。このような定まった積分値は、ある与えられた区間において曲線と軸に挟まれた領域の総面積 $\int \varphi(x) \, dx$ の値や、この領域の重心あるいは何らかの固体の重心の縦座標のような力学的量の値に類似している。こうした量は、物体の形に規則性が認められようが、まったく任意の形が与えられていようが、指定可能な値をもつことは明らかである。

ここでもまた、関数が曲線を表すのではなく、曲線が関数を表すのであると言われている。

【引用例 5】

[第230節より]

これらの原理を振動弦の運動に適用すれば、ダニエル・ベルヌーイの解析手法の中に初めて現れた諸困難が解決される。この幾何学者によって与えられた解は、任意関数が弧の倍数の正弦や余弦の作る級数につねに展開できることを仮定している。ところで、この命題のあらゆる証明の中で最も完全な証明は、与えられた関数を実際にこのような級数に分解して、その級数の諸係数を定めるといふものである。

偏微分方程式を適用する研究において、いくつかの積分を見つけて、それらの和を作るといっそう一般的な積分になるようにするのは多くの場合簡単である。しかし、これらの積分を使うには、その適用範囲を明確にし、これらが一般積分

を表す場合と、その部分的な積分を表すにすぎない場合とを明瞭に区別しなければならない。とりわけ、それらの値として定量を与える必要があったが、係数を求めることがこの方法を適用する上での困難となった。連続性をもたない線や面の縦座標が収束級数で表されることや、後でわかるように、定積分で表されることは注目に値する。これによってわかるように、次のような性質を備えた二つの関数を解析学に受け入れなければならない。すなわち、与えられた二つの限界に挟まれた任意の値を変化量がとるときには、それらの関数は等しい値をもつが、それらの二つの関数において、他の区間内の数を変化量に代入すると、その代入の結果は同一ではない。この特性をもつ二つの関数は異なる線で表される。それらの曲線は、ある一定の部分においてのみ重なり合い、特別な種類の有限次接触の例を与えている。こうした考えは偏微分方程式の理論から生れた。このような考えはこの理論に新たな光を投じ、物理学の諸理厘において偏微分方程式を使い易くするのに役立つであろう。

ここでは振動する弦の研究が回想され、数学の観点から見ると熱の伝播の研究に通じていると言われている。この洞察はフーリエに独自のアイデアである。

次に挙げる二つの引用例でも、曲線が関数を規定すると

【引用例 6】

[第234節の冒頭の言葉]

この等式に含まれる関数 $F(x)$ は任意の線 $F' F' F F$ によって表される。

【引用例 7】

[第235節より]

関数を三角級数に展開することに関して、この節で証明されたすべてのことから帰結する事柄は次の通りである。すなわち、関数 $f(x)$ が提示され、その値が $x=0$ から $x=X$ までの一定区間において任意に描かれた曲線の縦座標によって表されるとすれば、この関数はつねに、弧の倍数の正弦だけを含む級数や余弦だけを含む級数、あるいは正弦と余弦を含む級数、またあるいは弧の奇数倍の余

弦だけを含む級数に展開することができる。

これらの二つの引用例でも、先にくるのはあくまでも曲線である。曲線が関数を規定するのであり、今日の流儀のように関数が曲線を規定するのではない。

3. フーリエとオイラーの関数概念

上記の引用例の観察から判明するように、フーリエが三角級数展開の対象として設定した「まったく任意の関数」というのは、オイラーが提案した三通りの関数概念の一つである。オイラーからフーリエへと、解析学の基本線のつながりも明白で、ここにははっきりと数学史の流れが見て取れると思う。これが本稿の結論である。

オイラーとフーリエの関数概念は即座にディリクレの関数に接続し、そのまま今日の関数に及んでいる。この関数にも変化量という言葉が出ているが、**その変化量は実際には変化しない**。ライプニッツの用語例を見ると、定量 a に対して $da=0$ という記述がある。文字 x は大きくなったり小さくなったりし、ときには無限小にもなる。あたかも「変化する量」であるかのようでもあるが、実際には変化していないようにも見える。少なくとも動的な感じはまったく見られないし、変化量というよりも不定量というほうが相応しいと思う。オイラーには「変化する量」の観念がはっきりと現れているがそこには力学の影響も見べきであろう。すなわち、**オイラーの変化量は元来、実際に変化したのである**。ところが、曲線によって規定される関数という、変化しない変化量をもつ関数概念をどうにゆうしたのも同じオイラーなのであった。変化量は変化することもあるし、変化しないこともある。ライプニッツの段階ですでにこのような二面性が現れていたと理解しなければならないであろう。