

Ky Fan の定理の位相幾何的な一般化について

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

Graduate school of Science, Osaka University

1 序

$e_1, \dots, e_{n+1}$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の基本ベクトルとし, Γ^n を $n+1$ 個の 0-sphere $\{\pm e_i\} (i = 1, 2, \dots, n+1)$ の join

$$\Gamma^n = \{\pm e_1\} * \{\pm e_2\} * \dots * \{\pm e_{n+1}\}$$

により定義する. Γ^n には, $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_{n+1}$ を頂点 (0-単体) とする自然な単体複体の構造が考えられるが, これを Γ^n の標準的な複体の構造と呼ぶことにする.

ユークリッド空間の中の単体複体 K が **antipodally symmetric** であるとは, $\sigma \in K$ に対して, $-\sigma \in K$ となっていることをいう. また, antipodally symmetric な複体 K に対して,

$$\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\} \quad (V(K) \text{ は } K \text{ の } 0\text{-単体の集合})$$

が $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ をみたすとき, λ を **antipodally symmetric な K の labeling** という. 特に, antipodally symmetric な K の labeling $\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ が, K の任意の 1-単体 $\{v_0, v_1\}$ に対して, $\lambda(v_0) \neq -\lambda(v_1)$ をみたすとき, **complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling** と呼ぶ.

$$\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\} \text{ に対して, } d\text{-単体 } \sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} \text{ が}$$

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \dots, \lambda(v_d)\} = \{+j_0, -j_1, +j_2, \dots, (-1)^d j_d\} \quad (1 \leq j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して **+alternating** といい,

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \dots, \lambda(v_d)\} = \{-j_0, +j_1, -j_2, \dots, (-1)^{d+1} j_d\} \quad (1 \leq j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して **--alternating** という. 本稿のタイトルにある Ky Fan の定理は次のものである (cf.[3]).

Ky Fan の定理. Γ^n に標準的な複体の構造を考え, K をその antipodally symmetric な細分とする. $\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とするとき, K には λ に関して +alternating な n -単体が奇数個存在する.

以下では, 有限集合 X の元の個数を $\sharp X$ で表すことにする. 上の Ky Fan の定理の中にある単体複体 K は $\mathbf{Z}_2$ が作用し, 幾何的実現 $|K|$ が球面と同相なものと考えられる. 球面の対心作用 (自由な $\mathbf{Z}_2$ 作用) による軌道空間は実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ で $p: S^n \rightarrow \mathbf{R}P^n$ の第 1 Stiefel-Whitney class $w(S^n)$ は $w(S^n)^n \neq 0$ を満たしている. この観点から Ky Fan の定理は次のように拡張できる.

定理 1. m, n を $m \geq n+1$ を満たす自然数とし, K を $\mathbf{Z}_2$ 有限単体複体で, $|K|$ は 連結な n 次元 $\mathbf{Z}_2$ 多様体の構造を持つものとする. また, $w(K) \in H^1(K; \mathbf{Z}_2)$ を $p: |K| \rightarrow |K|/\mathbf{Z}_2$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とする. このとき, $\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とすると, 次が成り立つ.

$$\#\{\sigma \in K \mid \sigma \text{ is a } +\text{-alternating } n\text{-simplex}\} \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 2) \quad (w^n(K) \neq 0) \\ 0 & (\text{mod } 2) \quad (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

定理の中の complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling というのは球面のときと同様で, antipodally symmetric は $\mathbf{Z}_2$ の生成元を T とするとき, $\lambda(Tv) = -\lambda(v)$ を満たすことであり, complementary edge は 1-単体 $\{u, v\}$ で $\lambda(u) = -\lambda(v)$ となるもののことである.

本稿は [1] で与えた Ky Fan の定理の視点から Ky Fan の定理の一般化を与えたものであり、定理 1 の証明のアイデアは、交叉理論など [1] と同様の考察に基づくものである。

2 同変写像の交点数

以下では、多様体は境界がないものとし、球面上には対心作用により $\mathbf{Z}_2$ 作用を考えるものとする。定理 1 の証明の証明に必要な交点数に関する定理は次のものであり、これを証明することを本節の目標とする。

定理 2.1. m, n を $m \geq n \geq 0$ を満たす整数とし、 X を S^m の $\mathbf{Z}_2$ 部分多様体で、 X は S^{m-n} と同相であるものとする。 N を $\mathbf{Z}_2$ が自由に作用する n 次元連結閉多様体とし、 $w(N)$ を $p: N \rightarrow N/\mathbf{Z}_2$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とする。 $f: N \rightarrow S^n$ を X と transversal な $\mathbf{Z}_2$ 写像とすると、 $f^{-1}(X)$ の元の個数 $\#f^{-1}(X)$ について次が成り立つ。

$$\#f^{-1}(X) \equiv \begin{cases} 2 & (\text{mod } 4) \quad (w^n(N) \neq 0) \\ 0 & (\text{mod } 4) \quad (w^n(N) = 0) \end{cases}.$$

この定理を証明する前に、交叉理論について復習しておこう。

M を m 次元 (位相) 多様体とし、 N_1 をその $m-n$ 次元部分多様体、 N_2 を n 次元部分多様体とすると $(0 \leq n \leq m)$ 、任意の $p \in N_1 \cap N_2$ において、 p の近傍 U で $(U, U \cap N_1, U \cap N_2)$ が $(\mathbf{R}^{m+n}, \mathbf{R}^m \times \{0\}, \{0\} \times \mathbf{R}^n)$ と同相になるようなものが存在するとき、 N_1 と N_2 は **trensverse に交わる** という。

M を m 次元 (位相) 多様体、 N を n 次元多様体とし $(0 \leq n \leq m)$ 、 L を M の $(n-m)$ 次元部分多様体とする、連続写像 $f: N \rightarrow M$ が L と **transversal な写像** とは、 $N \times M$ の部分多様体 $\{(x, f(x)) \mid x \in N\}$ と $N \times L$ が transversal に交わることをいう。 N がコンパクトであれば、 $f: N \rightarrow M$ が L と transversal な写像であるとき、 f^{-1} は有限集合であることに注意しておく。

以下、多様体は向きづけ不可能なものも扱うのでホモロジー、コホモロジーの係数は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (以下では $\mathbf{Z}_2$ と書く) とし、閉多様体 M に対し、その基本ホモロジー類を $[M]$ で表すことにする。 N を閉多様体とし、 $f: N \rightarrow N$ を連続写像とする。このとき、 $(\text{id}, f): N \rightarrow N \times M$ を考えると、[5] の定理 15.3 と同様の証明で次が成り立つことがわかる。

命題 2.2. $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$ をそれぞれ $H^*(M), H^*(N)$ の同次基とし、 $f^*(\alpha_i) = \sum_j a_{ij} \beta_j$ ($a_{ij} \in \mathbf{Z}_2$) とおくと、

$$\theta^{-1}(\text{id}, f)_*[N] = \sum_{i,j} a_{ij} \beta_j \times \alpha_i^\sharp.$$

ここで, $\theta: H^*(N \times M) \rightarrow H_{m+n-*}(N \times M)$ は Poincaré 双対同型写像であり, $\alpha_i^\sharp$ はすべての j に対して $\langle \alpha_j \cup \alpha_i^\sharp \rangle = \delta_{ij}$ を満たすものである.

定理 2.1 は次の命題より証明される.

命題 2.3. m, n を $0 \leq n \leq m$ をみたす整数とする. N を n 次元閉多様体とし, L を $\mathbf{R}P^m$ の $(m-n)$ 次元閉部分多様体で, 包含写像から誘導される $(m-n)$ 次ホモロジー群の準同型 $i_*: H_{m-n}(L) \rightarrow H_{m-n}(\mathbf{R}P^m)$ が同型であるものとする. このとき, $f: N \rightarrow \mathbf{R}P^n$ が L と transversal regular な写像であれば,

$$\sharp f^{-1}(L) \equiv \langle f^* w^n, [N] \rangle \pmod{2}$$

である. ここで, $w \in H^1(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ は 2 重被覆 $S^m \rightarrow \mathbf{R}P^m$ の第 1 Stiefel-Whitney 類 ($H^1(\mathbf{R}P^m) \cong \mathbf{Z}_2$ の生成元) である.

証明. $N \times \mathbf{R}P^m$ の部分多様体 $\{(x, f(x)) | x \in N\}$ を X と書くことにすると, 部分多様体の交点数について,

$$\sharp f^{-1}(L) = \sharp(X \cap (N \times L)) \equiv \langle \theta^{-1}[X] \cup \theta^{-1}[N \times L], [N \times \mathbf{R}P^m] \rangle \pmod{2}$$

が成り立つ.

$[X] = (\text{id}, f)_*[N]$, $\theta^{-1}[N \times L] \cap [N \times \mathbf{R}P^m] = [N \times L]$ であり, $\{\beta_j\}$ を $H^*(N)$ の同次基とする. $w \in H^1(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ を $S^m \rightarrow \mathbf{R}P^m$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とし, $f^*(w^i) = \sum_j a_{ij} \beta_j$ ($a_{ij} \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) とおくと,

$$\begin{aligned} \langle \theta^{-1}[X] \cup \theta^{-1}[N \times L], [N \times \mathbf{R}P^m] \rangle &= \langle \theta^{-1}(\text{id}, f)_*[N], [N \times L] \rangle \\ &= \langle \sum_{i,j} a_{ij} \beta_j \times w^{m-i}, [N] \times [L] \rangle \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \langle \beta_j, [N] \rangle \langle w^{m-i}, [L] \rangle \\ &= \sum_j a_{nj} \langle \beta_j, [N] \rangle = \langle f^* w^n, [N] \rangle. \end{aligned}$$

ここで, 3 行目から 4 行目の変形のところで $i_*: H_{m-n}(L) \rightarrow H_{m-n}(\mathbf{R}P^m)$ が同型であることを用いている. 以上で命題 2.3 が成り立つことが証明された. ■

定理 2.1 の証明. 定理 2.1 の $X, N, f: N \rightarrow S^m$ に対して, f が X と transverse な $\mathbf{Z}_2$ 写像であることから, f より定まる写像 $\bar{f}: N/\mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{R}P^m$ は $X/\mathbf{Z}_2$ と transverse な写像であり, X が S^{m-n} と同相であることから $i_*: H_{m-n}(X/\mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{m-n}(\mathbf{R}P^m)$ は同型なので, $\sharp \bar{f}^{-1}(X/\mathbf{Z}_2) \equiv \langle f^* w^n, [N] \rangle = \langle w(N)^n, [N/\mathbf{Z}_2] \rangle \pmod{2}$ が成り立つ. N と S^m 上の $\mathbf{Z}_2$ 作用が自由で, f が X と transverse な $\mathbf{Z}_2$ 写像なので, $\sharp f^{-1}(X) = 2\sharp \bar{f}^{-1}(X/\mathbf{Z}_2)$ である. したがって, 上の結果と合わせて定理 2.1 が成り立つことがわかる. ■

3 定理 1 の証明

以下では, $\Gamma^{m-1} = \{\pm e_1\} * \{\pm e_2\} * \cdots * \{\pm e_m\}$ に自然な単体複体の構造を考えたときの頂点の集合を簡単のため $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$ と書くことにする. このとき, Γ_m の単体複体の構造は

$$Q_m = \{S \subset \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\} \mid S \cap -S = \emptyset\}$$

に集合の包含関係により辺単体を考えて得られる Q_m の単体複体の構造と一致している. 以下では, Γ^{m-1} の標準的な複体の構造を Q_m と同じものと見る (したがって, Q_m の元を $\mathbf{R}^m$ における単体と見ることもある).

$S \in Q_m$ に対して, S の部分集合 $\{x_1, \dots, x_k\} (|x_1| < |x_2| < \dots < |x_k|)$ が alternating subsequence であるとは, $x_i x_{i+1} < 0 (i = 1, 2, \dots, k-1)$ をみたすときにいう. つまり, 絶対値の小さい方からならべたとき, 正負が交互になるようなものである.

$$\text{alt}(S) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid \{x_1, \dots, x_k\} \subset S \text{ が alternating subsequence}\}$$

により $\text{alt}(S)$ を定義する. Q_m の部分集合 $R_m^k (k \leq m)$ を

$$R_m^k = \{S \in Q_m \mid \text{alt}(S) \geq m - k\}$$

により定める. R_m^k は単体複体にならないが,

$$\Delta R_m^k = \{(S_1, S_2, \dots, S_l) \mid S_i \in R_m^k, S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \dots \subsetneq S_l\}$$

は Q_m の重心細分 $\text{sd}(Q_m)$ の部分複体になっている. この単体複体 ΔR_m^k の多面体 $|\Delta R_m^k|$ の位相について次のことがわかっている.

定理 3.1 ([6, 7]). $m \geq 1, 0 \leq k \leq m$ とするとき, $|\Delta R_m^k|$ は S^k と同相である.

次に, ΔR_m^k と transverse に交わる単体について考察する.

Q_m の重心細分 $\text{sd}(Q_m)$ を考え, $\text{sd}(Q_m)$ の頂点 $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} (|x_1| < |x_2| < \dots < |x_k|)$ をとる. $\text{sd}(Q_m)$ の部分複体 $K_1(v), K_2(v)$ を

$$K_1(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m, v_1 \subsetneq v_2 \subsetneq \dots \subsetneq v_l \subset v\}$$

$$K_2(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m, v \subset v_1 \subset v_2 \subset \dots \subset v_l\}$$

により定義する. このとき, [1] にあるように $|K_1(v)| \approx D^{k-1}, |K_2(v)| \approx D^{m-k}$ ($\approx$ は同相であることを表している) で, $|K_1(v)|$ と $|K_2(v)|$ は v において transverse に交わる.

$v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ を $\text{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $K_1(v)$ の v 以外の頂点 u を取ると $u \subsetneq v$ を満たすことより, $\text{alt}(u) < k$ となる. したがって, $K_1(v)$ と ΔR_m^{m-k} は v 以外に共有点を持たない. また, $K_2(v)$ は ΔR_m^{m-k} の部分複体で, $|K_2(v)|$ は $|\Delta R_m^{m-k}|$ における v の近傍となっている. したがって, 次のことがわかる.

補題 3.2. $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ を $\text{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $|K_1(v)|$ は $|\Delta R_m^{m-k}|$ と transverse に交わる.

以上で準備ができたので, 定理 1 を証明しよう.

(定理 1 の証明) m, n を $m \geq n+1$ を満たす自然数とし, K を $\mathbf{Z}_2$ 有限単体複体で, $|K|$ は連結な n 次元 $\mathbf{Z}_2$ 多様体の構造を持つものとする. $\lambda: V(K) \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とすると, λ により, 単体複体 K から Q_m への単体写像 $\lambda(\{v_1, \dots, v_k\}) = \{\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_k)\}$ が定まり, それより K と Q_m の重心細分 사이의 単体写像 $\text{sd}(\lambda): \text{sd}(K) \rightarrow \text{sd}(Q_m)$ を得る. また, $\text{sd}(\lambda)$ から定まる連続写像

$|\text{sd}(\lambda)|: |\text{sd}(K)| \rightarrow |\text{sd}(Q_m)|$ は λ が antipodally symmetric であることから $|\text{sd}(\lambda)|(Tx) = -|\text{sd}(\lambda)|(x)$ (T は $\mathbf{Z}_2$ の生成元) をみたす連続写像であることに注意しておこう.

$\sigma \in V(\text{sd}(K)) (= K)$ に対して, $v = \text{sd}(\lambda)(\sigma) (\in V(\text{sd}(Q_m)))$ とおくと, K の次元が n であることより, $\text{alt}(v) \leq n+1$ となっている. したがって, $\Delta R_m^{m-(n+1)}$ と $\text{sd}(\lambda)(\text{sd}(K))$ の共通部分は $\text{alt}(v) = n+1$ となるような 0-単体のみである. $\sigma \in V(\text{sd}(K))$ を $\text{sd}(\lambda)(\sigma) \in V(\Delta R_m^{m-(n+1)})$ をみたすものとし, $v = \text{sd}(\lambda)(\sigma)$ とおく ($v \in \Delta R_m^{m-(n+1)} \cap \text{sd}(\lambda)(\text{sd}(K))$ である). $\text{sd}(\lambda)$ の定義に注意すると, $\sigma \in V(\text{sd}(K))$ を K の単体と見たとき, $\dim K = n$ かつ $\text{alt}(\lambda(\sigma)) = n+1$ なので, σ は K の n -単体であり, $+$ または $--$ -alternating ということである. このことより, σ の $\text{sd}(K)$ における星状複体 $S_{\text{sd}K}(\sigma)$ の $\text{sd}(\lambda)$ による像は $K_1(v)$ となっていて, $S_{\text{sd}K}(\sigma)$ と $K_1(v)$ が $\text{sd}(\lambda)$ により 1 対 1 に対応していることがわかる. 補題 2.2 より $|K_1(v)|$ と $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ は transverse に交わり, このことが $\text{sd}(\lambda)(\sigma) \in R_m^{m-(n+1)}$ をみたすすべての $\sigma \in \text{sd}(K)$ について成り立つので, $|\text{sd}(\lambda)|: |\text{sd}(K)| \rightarrow |\text{sd}(Q_m)|$ は $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ と transversal な写像である.

したがって, 定理 2.1 より,

$$\sharp |\text{sd}(\lambda)|^{-1}(|\Delta R_m^{m-(n+1)}|) \equiv \begin{cases} 2 & (\text{mod } 4) \quad (w^n(K) \neq 0) \\ 0 & (\text{mod } 4) \quad (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

これは, $\text{alt}(\text{sd}(\lambda)(\sigma)) = n+1$ となる σ の個数であり, K の n 単体で λ に関して $+$ -alternating な n -単体の個数と $--$ -alternating な n -単体の個数の和が上で与えられることになる. λ が antipodally symmetric であることから, $+$ -alternating な n -単体の個数と $--$ -alternating な n -単体の個数は一致するので,

$$\sharp \{\sigma \in K \mid \sigma \text{ is a } +- \text{alternating } n\text{-simplex}\} \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 2) \quad (w^n(K) \neq 0) \\ 0 & (\text{mod } 2) \quad (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

が成り立つ. ■

References

- [1] 原靖浩, Borsuk-Ulam の定理の一般化とその組合せ論への応用, 京大数理解析研究所講究録 2098 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論 (2018), 83–88.
- [2] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波基礎数学選書 (1991).
- [3] M. de Longueville, A course in topological combinatorics, Universitext, Springer(2013).
- [4] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).
- [5] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店 (1977).
- [6] 小路史朗, 位相幾何的な手法による general Kneser hypergraph の彩色数の研究, 大阪大学理学研究科数学専攻修士論文 (2018).
- [7] G. M. Ziegler, Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs, Invent. math. 147(2002), 671–691