

粘性が場所に依存する遅い流れ問題の 安定化有限要素近似

九州大学 大学院数理学研究院 鈴木 厚 (Atsushi Suzuki) *

田端 正久 (Masahisa Tabata) †

Department of Mathematical Sciences,
Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan

概要

粘性が場所に依存する遅い流れ問題の安定化有限要素近似を考える。流速, 圧力に P1/P1 要素を用い, 安定化手法を用いてスキームを構成する。Galerkin 最小自乗型とペナルティー型の安定化有限要素法について比較を行う。ペナルティー型のスキームは適合性を持つスキームではないが Galerkin 最小自乗型に比較し計算量が少ない特徴を持つ。両者のスキームの近似精度は同等の 1 次精度であることを, 数値実験結果とともに示す。

1 はじめに

遅い流れを記述する Stokes 方程式で, 変数粘性のものに対する有限要素解法を考える。3 次元問題での膨大な計算量と記憶容量の削減のため, 流速, 圧力ともに P1/P1 要素を用い, 安定化手法を用いてスキームを構成する。既知関数である粘性に有限要素補間を行わない場合に, 連続問題の解が有限要素方程式を満たすという適合性を持つ Galerkin 最小自乗型安定化有限要素法と, 簡便なスキームではあるが適合性を持たないペナルティー型のものの比較を行う。

粘性が場所に依存する遅い流れ問題は, 地球マントル対流問題 [5, 6] で, 流体の粘性が温度に依存するモデルに現れる。このため変数粘性の Stokes 方程式の効率的なソルバーは有用である。

2 変数粘性の Stokes 方程式

3 次元の有界な多面体領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内で, 流速 $u = (u_1, u_2, u_3)$ と圧力 p が

$$-2\nabla \cdot [\mu D(u)] + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

を満たし, 境界 $\Gamma(:= \partial\Omega)$ で Dirichlet 境界条件

$$u = g \quad (3)$$

*email : asuzuki@math.kyushu-u.ac.jp

†email : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

を課す Stokes 方程式を考える. ここで, Dirichlet データは

$$\int_{\Gamma} g \cdot n \, ds = 0$$

をみたすものとする. n は境界での単位外向き法線である. D は変形速度テンソル $D_{ij}(u) := \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ ($1 \leq i, j \leq 3$) である. $\mu \in C^1(\bar{\Omega})$ は粘性を表し, ある正定数 μ_0 が存在し

$$\mu(x) \geq \mu_0 \quad (x \in \bar{\Omega})$$

を満たす既知関数である. f は外力を表す既知関数である.

3 P1/P1 安定化有限要素法

3 次元問題の膨大な計算量を軽減するため, 最も経済的な P1/P1 要素を流速と圧力の近似に用いる. T_h を $\bar{\Omega}$ の正則な四面体分割とする. ここで h は四面体要素の最大直径を表す. $S_h(\Omega) \subset H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ を P1 要素からなる有限要素空間とする. 流速, 圧力に関し次の有限要素空間を導入する.

$$\begin{aligned} X_h &:= S_h(\Omega)^3, \\ V_h(g) &:= \{v_h \in X_h; v_h(P) = g(P) \quad (\forall P)\}, \\ V_h &:= V_h(0), \\ M_h &:= S_h(\Omega), \\ Q_h &:= \{q_h \in M_h; (q_h, 1) = 0\}. \end{aligned}$$

ここで P は境界 Γ 上の節点である. $(\cdot, \cdot)$ は X_h あるいは M_h での L^2 内積である. $u_h, v_h \in X_h$ と $p_h, q_h \in M_h$ に対し, 次の双一次形式を定義する.

$$a(u_h, v_h; \mu_h) := 2 \int_{\Omega} \mu_h D(u_h) : D(v_h) \, dx, \quad (4)$$

$$b(v_h, q_h) := -(\nabla \cdot v_h, q_h). \quad (5)$$

$\mu_h \in M_h$ は μ の P1 要素による補間である. 以下 h_K は要素 K の直径, $(\cdot, \cdot)_K$ は K 上の L^2 内積とする.

P1/P1 要素は双一次形式 $b(\cdot, \cdot)$ に関する下限上限条件を満たさないため, 通常の混合型有限要素法を適用することができず, 安定化手法が必要である. 次の 2 種の安定化有限要素スキームを考える.

スキーム 1 Galerkin 最小自乗 (GLS) 型 [2, 4]

$\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\} \in X_h \times M_h$ に対し, 次の双一次形式を定義する.

$$\begin{aligned} A_{\delta}^{\text{GLS}}(\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h) &:= a(u_h, v_h; \mu_h) + b(v_h, p_h) + b(u_h, q_h) \\ &\quad - \delta \sum_{K \in T_h} h_K^2 (-2 \nabla \cdot [\mu_h D(u_h)] + \nabla p_h, -2 \nabla \cdot [\mu_h D(v_h)] + \nabla q_h)_K. \end{aligned} \quad (6)$$

$\{v_h, q_h\} \in X_h \times M_h$ に対し, 次の線形汎関数を定義する.

$$F_\delta^{\text{GLS}}(\{v_h, q_h\}) := (f, v_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, -2 \nabla \cdot [\mu_h D(v_h)] + \nabla q_h)_K. \quad (7)$$

GLS 型の安定化有限要素スキームは任意の $\{v_h, q_h\} \in V_h \times Q_h$ に対し,

$$A_\delta^{\text{GLS}}(\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h) = F_\delta^{\text{GLS}}(\{v_h, q_h\}) \quad (8)$$

を満す $\{u_h, p_h\} \in V_h(g) \times Q_h$ を求めよ, となる. ここで, δ は h に依存しない安定化パラメータであり

$$0 < \delta < \frac{1}{4} \min_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \frac{\min_{x \in K} \mu_h(x)}{h_K^2 |\nabla \mu_h|^2} \right\} \quad (9)$$

を満すように選ぶ.

スキーム 2 ペナルティー型 [1]

$\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\} \in X_h \times M_h$ に対し, 次の双一次形式を定義する.

$$\begin{aligned} A_\delta^{\text{Penalty}}(\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h) &:= a(u_h, v_h; \mu_h) + b(v_h, p_h) + b(u_h, q_h) \\ &\quad - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla p_h, \nabla q_h)_K. \end{aligned} \quad (10)$$

$\{v_h, q_h\} \in X_h \times M_h$ に対し, 次の線形汎関数を定義する.

$$F_\delta^{\text{Penalty}}(\{v_h, q_h\}) := (f, v_h). \quad (11)$$

ペナルティー型の安定化有限要素スキームは任意の $\{v_h, q_h\} \in V_h \times Q_h$ に対し,

$$A_\delta^{\text{Penalty}}(\{u_h, p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h) = F_\delta^{\text{Penalty}}(\{v_h, q_h\}) \quad (12)$$

を満す $\{u_h, p_h\} \in V_h(g) \times Q_h$ を求めよ, となる. 安定化パラメータ δ は任意の正定数である.

$$\delta > 0. \quad (13)$$

双一次形式 $a(\cdot, \cdot; \mu_h)$ の強圧性が成り立つ.

補題 1

ある正定数 α_0 が存在し, 任意の正数 h と任意の $v_h \in V_h$ に対し,

$$a(v_h, v_h; \mu_h) \geq \alpha_0 \|v_h\|_1^2$$

が成り立つ. ここで α_0 は, μ_0 に依存しない定数 C_0 を用いて $\alpha_0 = \mu_0 C_0$ と表される.

また, 弱い下限上限条件が成り立つ [3].

補題 2

ある正定数 β_0 と β_1 が存在し, 任意の正数 h と任意の $q_h \in Q_h$ に対し,

$$\sup_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \geq \beta_0 \|q_h\|_0 - \beta_1 |q_h|_h$$

が成り立つ. ここで $|\cdot|_h$ は次で定義されるセミノルムである.

$$|q_h|_h := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla q_h, \nabla q_h)_K \right\}^{1/2}.$$

GLS 型の双一次形式 $A^{\text{GLS}}(\cdot, \cdot)$ に関し次の安定性に関する不等式が成り立つ.

補題 3

安定化パラメータ δ が (9) を満たすならば, ある正定数 C_1 が存在し, 任意の正数 h と任意の $v_h \in V_h$ と $q_h \in Q_h$ に対し,

$$A_\delta^{\text{GLS}}(\{v_h, q_h\}, \{v_h, -q_h\}; \mu_h) \geq C_1 \|v_h\|_1^2 + \delta |q_h|_h^2$$

が成り立つ.

証明 $v_h \in V_h$ は要素 $K \in \mathcal{T}_h$ 毎に一次関数であることより $\partial_l D_{kl}(v_h) = 0$ ($x \in K, 1 \leq k, l \leq 3$) であるため, 次の関係が成立する.

$$[\nabla \cdot [\mu_h D(v_h)]]_k = \sum_{1 \leq l \leq 3} (\partial_l \mu_h) D_{kl}(v_h) \quad (x \in K, 1 \leq k \leq 3).$$

したがって,

$$\begin{aligned} A_\delta^{\text{GLS}}(\{v_h, q_h\}, \{v_h, -q_h\}; \mu_h) &= a(v_h, v_h; \mu_h) - \delta \sum_K h_K^2 (-2 \nabla \cdot [\mu_h D(v_h)], -2 \nabla \cdot [\mu_h D(v_h)])_K + \delta |q_h|_h^2 \\ &= 2 \sum_K \int_K \mu_h \sum_{1 \leq k, l \leq 3} |D_{kl}(v_h)|^2 dx - 4\delta \sum_K h_K^2 \int_K \sum_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \sum_{1 \leq l \leq 3} (\partial_l \mu_h) D_{kl}(v_h) \right\}^2 dx + \delta |q_h|_h^2 \\ &\geq 2 \sum_K \int_K \mu_h \sum_{1 \leq k, l \leq 3} |D_{kl}(v_h)|^2 dx - 4\delta \sum_K h_K^2 \int_K |\nabla \mu_h|^2 \sum_{1 \leq k, l \leq 3} |D_{kl}(v_h)|^2 dx + \delta |q_h|_h^2 \\ &= 2 \sum_K \int_K (\mu_h - 2\delta h_K^2 |\nabla \mu_h|^2) \sum_{1 \leq k, l \leq 3} |D_{kl}(v_h)|^2 dx + \delta |q_h|_h^2 \\ &\geq \mu_0 \|D(v_h)\|_0^2 + \delta |q_h|_h^2. \end{aligned}$$

が成り立つ. ここでベクトルに関する Schwarz の不等式を用いた. Korn の不等式より求める結果を得る. $C_1 = \frac{1}{2} \alpha_0$ である. $\square$

ペナルティ型の双一次形式 $A^{\text{Penalty}}(\cdot, \cdot)$ に関し次の不等式が成り立つ.

補題 4

任意の正数 h と任意の $v_h \in V_h$ と $q_h \in Q_h$ に対し,

$$A_\delta^{\text{Penalty}}(\{v_h, q_h\}, \{v_h, -q_h\}; \mu_h) \geq \alpha_0 \|v_h\|_1^2 + \delta |q_h|_h^2$$

が成り立つ.

補題 2 と 補題 3 および 補題 4 より双一次形式 $A^{\text{GLS}}(\cdot, \cdot)$ と $A^{\text{Penalty}}(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ, 安定性不等式を満たすことが分かる [3]. したがって, 次の命題を得る.

命題 1

1. (9) を満たす δ に関して, GLS 型の有限要素方程式 (8) は一意可解である.
2. (13) を満たす δ に関して, ペナルティー型の有限要素方程式 (12) は一意可解である.

$u \in H^2(\Omega)^3$, $p \in H^1(\Omega)$ を Stokes 方程式 (1)–(3) の解とする. 既知関数である粘性に有限要素補間を行わない GLS 型安定化有限要素法では, 連続問題の解が有限要素方程式を満たす適合性を持つ. $\{\tilde{u}_h, \tilde{p}_h\}$ を有限要素補間を行わない粘性 μ に対する (8) 式の有限要素解, $\{v_h, q_h\}$ を $V_h \times Q_h$ の任意の元として, 次の関係が成り立つ.

$$A_\delta^{\text{GLS}}(\{u - \tilde{u}_h, p - \tilde{p}_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu) = 0.$$

それぞれのスキームに関しては, 次の不等式が成立する.

補題 5

1. $\{u_h, p_h\} \in V_h(g) \times Q_h$ を GLS 型の有限要素方程式 (8) の解とする. ある正定数 C_2 が存在し, 任意の正数 h と任意の $\{v_h, q_h\} \in V_h \times Q_h$ に対し,

$$|A_\delta^{\text{GLS}}(\{u - u_h, p - p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h)| \leq C_2 h |\mu|_{1,\infty} \|u\|_1 \|v_h\|_1.$$

2. $\{u_h, p_h\} \in V_h(g) \times Q_h$ を ペナルティー型の有限要素方程式 (12) の解とする. ある正定数 C_3, C_4 が存在し, 任意の正数 h と任意の $\{v_h, q_h\} \in V_h \times Q_h$ に対し,

$$|A_\delta^{\text{Penalty}}(\{u - u_h, p - p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h)| \leq C_3 h |\mu|_{1,\infty} \|u\|_1 \|v_h\|_1 + C_4 h \|p\|_1 \|q_h\|_0.$$

証明 ペナルティー型のスキームでは, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \left| A_\delta^{\text{Penalty}}(\{u - u_h, p - p_h\}, \{v_h, q_h\}; \mu_h) \right| \\ &= \left| 2 \int_\Omega \mu_h (D(u) - D(u_h)) : D(v_h) dx + b(v_h, p - p_h) + b(u - u_h, q_h) \right. \\ & \quad \left. - \delta \sum_K h_K^2 (\nabla(p - p_h), q_h)_K \right| \\ &= \left| \left\{ 2 \int_\Omega \mu D(u) : D(v_h) dx + b(v_h, p) + b(u, q_h) \right\} - \delta \sum_K h_K^2 (\nabla p, \nabla q_h)_K \right. \\ & \quad \left. - \left\{ 2 \int_\Omega \mu_h D(u_h) : D(v_h) dx + b(v_h, p_h) + b(u_h, q_h) - \delta \sum_K h_K^2 (\nabla p_h, \nabla q_h)_K \right\} \right. \\ & \quad \left. - 2 \int_\Omega (\mu - \mu_h) D(u) : D(v_h) dx \right| \\ &\leq \delta \left| \sum_K h_K^2 (\nabla p, \nabla q_h)_K \right| + 2 \|\mu - \mu_h\|_{0,\infty} \|D(u)\|_0 \|D(v_h)\|_0. \end{aligned}$$

安定化項に関してはセミノルム $|\cdot|_h$ に関する不等式 [3] を用いて

$$\delta \left| \sum_K h_K^2 (\nabla p, \nabla q_h)_K \right| \leq \delta \left(\sum_K h_K^2 \|\nabla p\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} |q_h|_h \leq C' h \|\nabla p\|_0 \|q_h\|_0$$

を得る. 粘性は P1 補間を用いているため, 次の不等式が成り立つ.

$$\|\mu - \mu_h\|_{0,\infty} \leq C'' h \|\mu\|_{1,\infty}.$$

したがって, ペナルティー型のスキームに関して求める結果を得る. GLS 型のスキームは, 安定化項が要素毎に Stokes 方程式を付加したものであることより, 同様に示すことができる. $\square$

それぞれのスキームの有限要素解に関して次の誤差評価を得る.

定理 1 $u \in H^2(\Omega)^3$, $p \in H^1(\Omega)$ を Stokes 方程式の (1)–(3) の解とする. 安定化パラメータ δ は GLS 型のスキームでは (9) を満すように, ペナルティー型のスキームでは (13) を満すようにとる. $\{u_h, p_h\} \in V_h(g) \times Q_h$ を有限要素方程式 (8) あるいは (12) の解とする. それぞれのスキームに対し, ある正数 c が存在し, 任意の正数 h に対して

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq c h (\|u\|_2 + \|p\|_1)$$

が成立する. ここで, 十分小さな h に対して GLS 型のスキームの条件 (9) は満されることに注意する.

有限要素剛性行列は, GLS 型, ペナルティー型それぞれ, (6) および (10) で定義される双一次形式 $A_\delta^{\text{GLS}}(\cdot, \cdot; \mu_h)$, $A_\delta^{\text{Penalty}}(\cdot, \cdot; \mu_h)$ から計算される. GLS 型では, 要素毎に Stokes 方程式を未知関数, テスト関数ともに付加しているため, 流速のみに関する剛性行列の成分を得るためにも (4) で定義される双一次形式 $a(\cdot, \cdot; \mu_h)$ の 2 倍以上の計算量を必要とする. 一方, ペナルティー型の安定化による付加項はスカラー値の圧力項に関するもののみである. したがって, ペナルティー型のスキームは GLS 型に比較し, 行列生成のための計算量が少ないことが分かる. また, ペナルティー型のスキームは安定化パラメータの上限は粘性に依存せず, 有限要素解の収束オーダーが GLS 型と同一であるという長所がある.

4 数値結果

粘性が場所に依存する遅い流れ問題は地球マントル対流の数学モデルに現れる. 熱流体の地球物理学モデルでは, 流体の粘性が温度に指数関数的に依存するものがある. このことを考慮し, 次のテスト問題の数値計算を行った.

Ω を 3 次元球殻領域とする, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3; 1/2 < |x| < 1\}$. 粘性を $b \geq 1$ なるパラメータを用いて

$$\mu = \exp((- \cos x_1 + \sin x_2 + x_1 \cos x_3) \log(b)).$$

とする. Stokes 方程式 (1)–(3) の解が

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin x_1 - x_1 \cos x_2, \\ u_2 &= 2(\sin x_2 - x_2 \cos x_3), \\ u_3 &= 2 \sin x_3 - x_3(\cos x_2 + \cos x_1), \\ p &= \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \end{aligned}$$

表 1: 粘性率変化

b	1.0	5.0	10.0	20.0
$\mu_{\max}/\mu_{\min}$	1.0	97.16	699.0	5,005.0

表 2: 離散化パラメータ

最大要素長	節点数	要素数
2.057×10^{-1}	4,692	23,184
1.081×10^{-1}	37,464	205,056
5.558×10^{-2}	324,532	1,868,544

となるよう、外力項と境界条件を設定し、GLS 型とペナルティー型の安定化有限要素スキームにより計算を行った。表 1 にパラメータ b による粘性の最小値と最大値の比の変化、表 2 に離散化パラメータを示す。安定化パラメータは $\delta = 0.1$ に固定した。 $b = 20.0$, $h = 2.057 \times 10^{-1}$ では GLS 型の安定化パラメータに関する条件 (9) を満足せず、解を得ることができない。図 1 にそれぞれの粘性率変化で、最大要素長 h に対する有限要素解の絶対誤差、流速 $\|u - u_h\|_1$, 圧力 $\|p - p_h\|_0$ を示す。ペナルティー型の有限要素解の圧力の誤差の値は GLS 型に比較して大きい。GLS 型、ペナルティー型ともに流速、圧力の有限要素解は最大要素長 h の 1 次以上のオーダーで厳密解に収束していることが分かる。

謝辞

本研究において、第一著者は科学研究補助金、奨励研究 (A), No. 12740068, 第二著者は科学研究補助金、基盤研究 (B)(2), No. 11554003 の援助を受けた。

参考文献

- [1] F. Brezzi and J. Douglas, Jr., Stabilized mixed methods for the Stokes problem, *Numer. Math.* **53**(1988), 225–235.
- [2] L. P. Franca, S. L. Frey, and T. J. R. Hughes, Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **95**(1992), 253–276.
- [3] L.P. Franca and R. Stenberg, Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**(1991), 1680–1697.
- [4] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions : Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **65**(1987), 85–96.

- [5] A. Suzuki, M. Tabata, and S. Honda, Numerical solution of an unsteady Earth's mantle convection by a finite element method, *Theoretical and Applied Mechanics* **48**(1999), 371–378.
- [6] M. Tabata and A. Suzuki, A stabilized finite element method for the Rayleigh-Bénard equations with infinite Prandtl number in a spherical shell, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **190**(2000), 387–402.

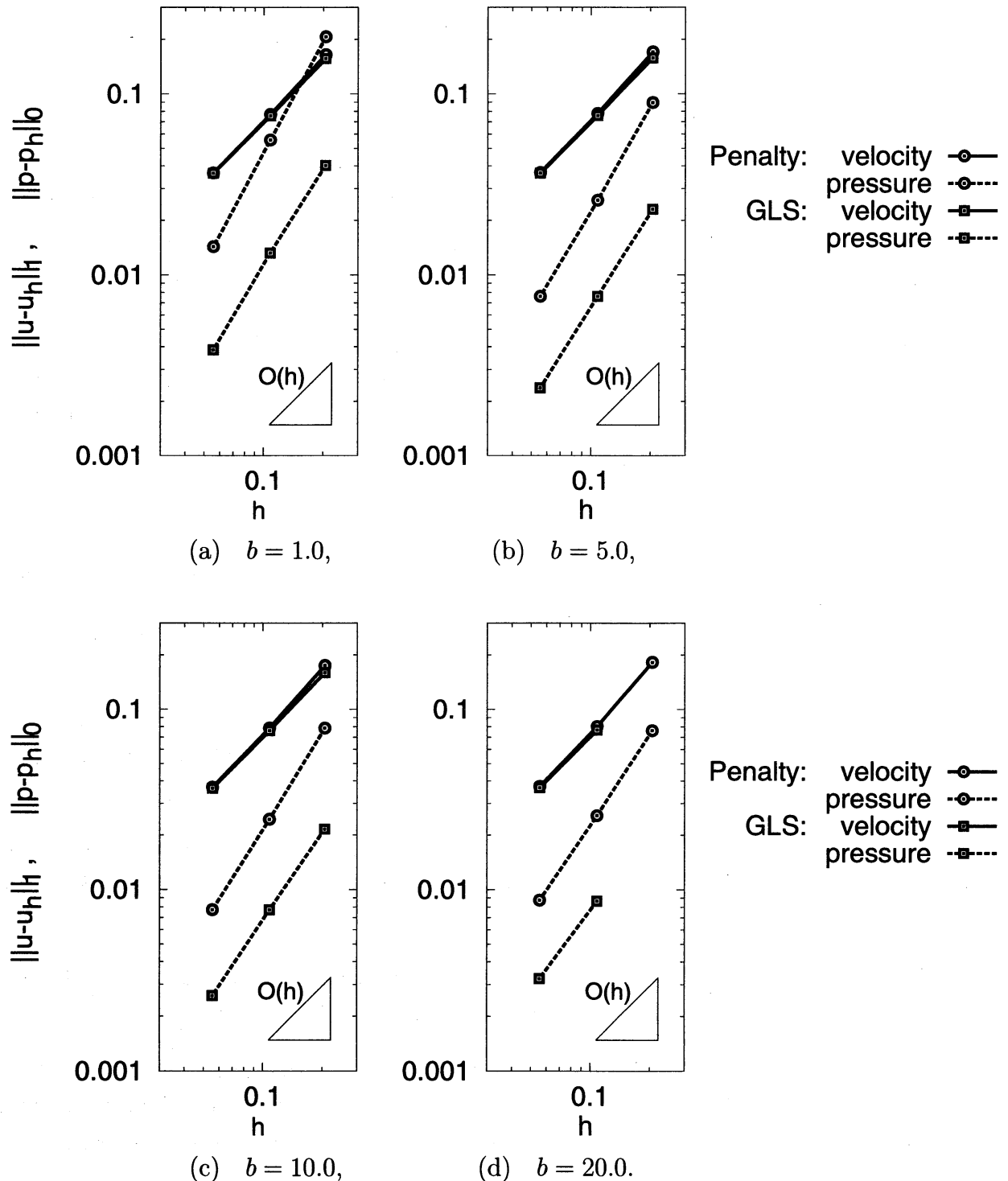


図 1: 最大要素長 h に対する, 流速, 圧力の有限要素解の絶対誤差, $\|u - u_h\|_1, \|p - p_h\|_0$.