

時間遅れのある非線形方程式について

東京大学大学院数理科学研究科 土谷 洋平 (Yohei Tutiya)
Graduate School of Mathematical Science,
The University of Tokyo

1 概要

本稿では非局所非線形 Schrödinger (INLS) 方程式

$$iu_t = u_{xx} - u(i + T)(|u|^2)_x \quad (1)$$

の多ソリトン解を報告する。また内容は異なるが、最後に追従型交通流モデルの進行波解に関する短い報告もつけた。INLS 方程式も追従モデルも遅れ型非線形偏微分方程式とみなすことができる。研究全体の主な興味も遅れ型非線形偏微分方程式の特殊解を可積分系の方法を用いて発見できるかというところにある。

まず (1) であるが、 $u(x, t)$ は実数 x, t の関数であり、複素数の値をとる。また T は主値積分

$$T[u](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta} \coth\left[\frac{\pi}{2\delta}(y-x)\right] u(y) dy. \quad (2)$$

を表す。ただし δ は正の定数である。本来、INLS 方程式とは非線形項の前の符号が正であるものを指す。これは内部波方程式に通減摂動法を適用して得られるもので [14]、いわゆる暗いソリトン解を持つことや逆散乱スキームが知られている [15, 11, 12]。本研究により INLS 方程式も非線形 Schrödinger (NLS) 方程式と同様非線形項の前の符号に対応してソリトン解の明暗が決まり、従来知られていた方が暗いソリトン解を持つ [14, 15, 11, 12] のに対して、本研究で提案された (1) は明るいソリトン解を持つことがわかった。実際のところ (2) の積分変換は $T = -\frac{1}{\delta}\partial^{-1} + \frac{\delta}{3}\partial + O(\delta^3)$ と展開できるので、 $U = u/\sqrt{2\delta}$ とおくと (1) は

$$iU_t = U_{xx} - 2\delta U(T + i)|U|^2_x \quad (3)$$

と書き換えられ、さらに $\delta \rightarrow 0$ の極限で

$$iU_t = U_{xx} + 2U|U|^2 \quad (4)$$

となりいわゆる明るいソリトン解を持つ NLS 方程式に移行する。非線形項の前の符号は $\delta \rightarrow 0$ の極限で NLS 方程式のソリトン解の明暗の型に矛盾することなく引き継がれるわけである。このあたりの事情には第 6 節で簡単に触れる。

本稿の具体的な内容は次のようである。まず変数変換を行って (1) を遅れ型非線方程式に書き直す (2 節)。そして、縮約を行って独立変数を一つ減らすとこの遅れ系に一致するような $2+1$ 次元方程式を佐藤理論の枠組みで導出する (3 節)。佐藤理論の枠組みによって導出されたことにより、 $2+1$ 次元方程式の特殊解は二重 Wronski 行列を用いて簡単に書くことができるのだが、その中から縮約を行うと (1) の解となるようなものを探す (4,5,6,7 節)。8 節は冒頭で触れた追従型交通流モデルの進行波解を簡単に紹介する。

2 INLS 方程式の遅れ型非線形偏微分方程式への書き換え

一般に積分変換 T の入ったソリトン方程式を解く際には、下の命題が非常に重要であるといえる。

命題 2.1. ([1] などに詳しい説明がある。)

$f(y)$ を実関数とし、次の複素関数を $F(z)$ を $\{z|z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} + 2ni\delta\}\}$ において定義する。

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left[\frac{\pi}{2\delta}(y-z)\right] f(y) dy. \quad (5)$$

$f(y)$ が実軸上で Hölder 条件を満たすならば、 $F(z)$ の実軸上の境界値は次で与えられる。

$$F^{\pm}(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^{\pm}} F(x + i\epsilon) = T[f] \pm if(x). \quad (6)$$

このとき $F^+(x)$ と $F^-(x)$ は $F^+(x + 2i\delta) = F^-(x)$ を満たす。

(6) は次の変数変換を与えるものとみなせる。

$$f(x) = \frac{i}{2}(F^- - F^+), \quad T[f] = \frac{1}{2}(F^+ + F^-).$$

すなわち f に関する積分変換を含んだ方程式が与えられたとき、この変数変換によって F に関する遅れ型の方程式に直すことができるのである。また、解 F が求まったとして、それが変数変換を逆に遡って元の f に関する方程式の解としてよいかどうかに関しては、上の命題の逆の役割を果たすものとして次が成り立つ。

命題 2.2. x を実数とする。複素関数 $G(z)$ が条件 a.~c. を満たすならば

$$T[G(x + 2i\delta) - G(x)] = -i(G(x + 2i\delta) + G(x))$$

が成立する。

a. $G(z)$ は帯状領域 $0 \leq \text{Im } z \leq 2\delta$ において正則。

b. 任意の y ($0 \leq y \leq 2\delta$) に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x + iy)$ は有限であり $-\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x + iy)$ と等しい.

c. $G(x + 2i\delta) - G(x)$ は実軸上可積分.

ただし $0 \leq \text{Im } z \leq 2\delta$ において正則であるとは, $0 \leq \text{Im } z \leq 2\delta$ を含むある開集合が存在してそこで正則という意味である. 条件 a.~c. を今後解析的条件と呼ぶことにする. これはもう少し弱めることができるが, 本稿においてはこれで十分である.

それでは本題に戻って (1) を命題 2.2 を用いて遅れ型方程式に直す. それにはまず従属変数 w^+, w^- を下のように導入する.

$$w^\pm := -\frac{\sigma}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta} \coth\left[\frac{\pi}{2\delta}(y - x \mp \epsilon i)\right] |u(y)|^2 dy.$$

このとき $w^\pm$ は関係式

$$w^+(x + 2i\delta) = w^-(x), \quad \{w^+(x)\}^\dagger = w^-(x) \quad (7)$$

を満たす. また $v := u^\dagger$ とおく. ただし † は複素共役を意味するものとする.

以上により (1) は次の連立方程式系に書き換わる.

$$\begin{cases} iu_t = u_{xx} - 2uw_x^+ \\ -iv_t = v_{xx} - 2vw_x^- \\ w^- - w^+ = i\sigma uv \end{cases} \quad (8)$$

以降の節においてはまず (8) のソリトン解を求め, 続いてそれが命題 2.2 の解析的条件を満たす, すなわち (1) の解となることを示す.

3 2成分 KP 階層の変形と佐藤方程式

本節では 2 成分 KP 階層の佐藤理論 [16, 9] を応用して, 縮約の結果 (8) に一致するような方程式を導出する. まず変数 y に関する次の擬微分作用素を考える.

$$P = I + W^{(1)}\partial_y^{-1} + W^{(2)}\partial_y^{-2} + \dots + W^{(n)}\partial_y^{-n}.$$

以下 ∂_y は ∂ と略記することにする. 式中, $W^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$) は 2×2 行列であり, I は単位行列を表すものとする. また, $W^{(j)}$ の k, l -成分を $w_{kl}^{(j)}$ と表すことにする. また, $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ の成分は頻繁に用いるので

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \quad W^{(2)} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad W^{(3)} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

と書くことにする. ただし, $w_{kl}^{(j)}, w_{kl}, v_{kl}, u_{kl}$ は (8) の u, v, w とは関係無い.

次の常微分方程式を考える.

$$P\partial^n \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

(9) の $2n$ 個の線形独立な解を一組として $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_{2n} \\ g_{2n} \end{pmatrix}$ と表すことにする. ここで $W^{(j)}, f_j, g_j$ は y に加えて, 無限個の変数 $t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, t_3^{(1)}, t_3^{(2)}, \dots$ および $z^{(1)}, z^{(2)}$ の関数でもあると考える. そして f_j と g_j に次の分散関係式を課す.

$$\frac{\partial}{\partial t_k^{(1)}} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} = E_1 \partial^k \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t_k^{(2)}} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} = E_2 \partial^k \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} i \left\{ \begin{pmatrix} f_j^{(1)} \\ g_j^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \right\} &= E_1 \partial \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}, \\ i \left\{ \begin{pmatrix} f_j^{(2)} \\ g_j^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \right\} &= E_2 \partial \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10b)$$

ただし

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 式中 $\langle \mu \rangle$ ($\mu = 1, 2$) は $z^{(\mu)}$ に関する $2i\delta$ シフトを表す, すなわち $a^{(\mu)}(z^{(\mu)}) = a(z^{(\mu)} + 2i\delta)$ であるとする. (10a) は 2 成分 KP 階層 [16, 4, 8, 9] を導く分散関係として知られている. すなわち, P の $t_j^{(\mu)}$ 方向の時間発展は 2 成分 KP 階層の佐藤方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t_j^{(\mu)}} = B_j^{(\mu)} P - P E_\mu \partial^j, \quad (11a)$$

$$B_j^{(\mu)} := (P E_\mu \partial^j P^{-1})_+ \quad (11b)$$

となる. ただし記号 $(A)_+$ は, 慣例に従って擬微分作用素 A の非負べき部分を表すものとする. 一方, 離散変数 $z^{(\mu)}$ に関する時間発展は次のようになる.

$$i(P^{(\mu)} - P) = C_\mu P - P^{(\mu)} E_\mu \partial, \quad (12a)$$

$$C_\mu = (P^{(\mu)} E_\mu \partial P^{-1})_+ = E_\mu \partial + W^{(\mu)} E_\mu - E_\mu W. \quad (12b)$$

まず, (11) を $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ のいくつかの成分に関して具体的に書くと次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{21}}{\partial t_1^{(1)}} &= w_{21} w_{11} - v_{21}, & \frac{\partial v_{21}}{\partial t_1^{(1)}} &= w_{21} v_{11} - u_{21}, \\ \frac{\partial w_{12}}{\partial t_1^{(2)}} &= w_{12} w_{22} - v_{12}, & \frac{\partial v_{12}}{\partial t_1^{(2)}} &= w_{12} v_{22} - u_{12}, \\ \frac{\partial w_{22}}{\partial t_1^{(1)}} &= w_{21} w_{12}, & \frac{\partial v_{22}}{\partial t_1^{(1)}} &= w_{21} v_{12}, \\ \frac{\partial w_{11}}{\partial t_1^{(2)}} &= w_{12} w_{21}, & \frac{\partial v_{11}}{\partial t_1^{(2)}} &= w_{12} v_{21}. \end{aligned} \quad (13)$$

これから u_{ij}, v_{ij} を消去して w_{ij} に関する方程式を求めると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{21}}{\partial t_2^{(1)}} &= -\frac{\partial^2 w_{21}}{\partial t_1^{(1)2}} + 2w_{21} \frac{\partial w_{11}}{\partial t_1^{(1)}}, & \frac{\partial w_{12}}{\partial t_2^{(1)}} &= \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial t_1^{(1)2}} - 2w_{12} \frac{\partial w_{11}}{\partial t_1^{(1)}}, \\ \frac{\partial w_{21}}{\partial t_2^{(2)}} &= \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial t_1^{(2)2}} - 2w_{21} \frac{\partial w_{22}}{\partial t_1^{(2)}}, & \frac{\partial w_{12}}{\partial t_2^{(2)}} &= -\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial t_1^{(2)2}} + 2w_{12} \frac{\partial w_{22}}{\partial t_1^{(2)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

これら 2 成分 KP 階層の低次の方程式を佐藤方程式から導出する方法は文献 [9] により詳しく書いてある.

一方, 離散変数に関する佐藤方程式 (12a) の ∂^{-1} の係数から

$$i(w_{22}^{(1)} - w_{22}) = w_{21}^{(1)} w_{12} \quad (15a)$$

および

$$i(w_{11}^{(2)} - w_{11}) = w_{12}^{(2)} w_{21} \quad (15b)$$

が得られる. 従って (14) と (15) から

$$\begin{cases} \frac{\partial w_{21}}{\partial t_2^{(1)}} = -\frac{\partial^2 w_{21}}{\partial t_1^{(1)2}} + 2w_{21} \frac{\partial w_{11}}{\partial t_1^{(1)}} \\ \frac{\partial w_{12}^{(2)}}{\partial t_2^{(1)}} = \frac{\partial^2 w_{12}^{(2)}}{\partial t_1^{(1)2}} - 2w_{12}^{(2)} \frac{\partial w_{11}}{\partial t_1^{(1)}} \\ i(w_{11}^{(2)} - w_{11}) = w_{12}^{(2)} w_{21} \end{cases} \quad (16a)$$

および

$$\begin{cases} \frac{\partial w_{12}}{\partial t_2^{(2)}} = -\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial t_1^{(2)2}} + 2w_{12} \frac{\partial w_{22}}{\partial t_1^{(2)}} \\ \frac{\partial w_{21}^{(1)}}{\partial t_2^{(2)}} = \frac{\partial^2 w_{21}^{(1)}}{\partial t_1^{(2)2}} - 2w_{21}^{(1)} \frac{\partial w_{22}}{\partial t_1^{(2)}} \\ i(w_{22}^{(1)} - w_{22}) = w_{21}^{(1)} w_{12} \end{cases} \quad (16b)$$

という 2 つの方程式系が得られることになる. しかし (16a) と (16b) は本質的に同じであるので簡単のため (16a) のみを今後扱うこととする.

4 縮約条件およびソリトン解

(16a) は (8) に大変よく似た見かけをしているが, 3 つの独立変数を持った系である. そこで $t_2^{(1)} = it$ と変数変換をして, 次の縮約条件を課す.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^{(2)}} - \frac{\partial}{\partial t_1^{(1)}} \right) P = 0, \quad (17)$$

これによって P は $t^{(1)}, z^{(2)}$ に $t^{(1)} + z^{(2)}$ という和の形でしか依存しなくなる。そこで新しい独立変数 $x := t^{(1)} + z^{(2)}$ を導入し、(16a) を次のように書き換える。

$$\begin{cases} iw_{21,t} = w_{21,xx} - 2w_{21}w_{11,x} \\ -i\bar{w}_{12,t} = \bar{w}_{12,xx} - 2\bar{w}_{12}\bar{w}_{11,x} \\ i(\bar{w}_{11} - w_{11}) = \bar{w}_{12}w_{21} \end{cases} \quad (18)$$

ただし、式中では $\bar{a}(x) = a(x + 2i\delta)$ という前進シフトを表すものとする。(18) は (8) に他ならない。よって、さらに (18) において w_{21} と $\bar{w}_{12}$ が x, t が実であるとき複素共役の関係にあり、しかも w_{11} が命題 2.2 の解析的条件を満たすならば w_{21} は、

$$iw_{21,t} = w_{21,xx} - w_{21}(T + i)(|w_{21}|^2)_x \quad (19)$$

すなわち INLS 方程式 (1) を満たすことになる。

これからそのようなソリトン解を求める。まず方程式 (9) を $\begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} (j = 1, 2, \dots, 2n)$ に関して次のように書き直す。

$$\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & \partial^{n-1}f_1 & | & g_1 & \cdots & \partial^{n-1}g_1 \\ f_2 & \cdots & \partial^{n-1}f_2 & | & g_2 & \cdots & \partial^{n-1}g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \cdots & \partial^{n-1}f_{2n} & | & g_{2n} & \cdots & \partial^{n-1}g_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11}^{(n)} & w_{21}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ w_{11}^{(1)} & w_{21}^{(1)} \\ \hline w_{12}^{(n)} & w_{22}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ w_{12}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial^n f_1 & \partial^n g_1 \\ \vdots & \vdots \\ \partial^n f_{2n} & \partial^n g_{2n} \end{pmatrix}.$$

よって Cramer の公式により、 w_{21}, w_{12}, w_{11} は次のように二重 Wronski 行列を用いて書くことができる。

$$w_{21} = (-)^{n+1} \frac{\begin{vmatrix} f_1 & \partial_y f_1 & \cdots & \partial_y^{n-2} f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^n g_1 \\ f_2 & \partial_y f_2 & \cdots & \partial_y^{n-2} f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^n g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \partial_y f_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-2} f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^n g_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & \partial_y f_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_1 \\ f_2 & \partial_y f_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \partial_y f_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} g_{2n} \end{vmatrix}}, \quad (20a)$$

$$w_{12} = (-)^n \frac{\begin{vmatrix} f_1 & \partial_y f_1 & \cdots & \partial_y^n f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^{n-2} g_2 \\ f_2 & \partial_y f_2 & \cdots & \partial_y^n f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^{n-2} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \partial_y f_{2n} & \cdots & \partial_y^n f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-2} g_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & \partial_y f_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_1 \\ f_2 & \partial_y f_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \partial_y f_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} g_{2n} \end{vmatrix}}, \quad (20b)$$

$$w_{11} = - \frac{\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & \partial_y^{n-2} f_1 & \partial_y^n f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_2 \\ f_2 & \cdots & \partial_y^{n-2} f_2 & \partial_y^n f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-2} f_{2n} & \partial_y^n f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} g_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & \partial_y f_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_1 & g_1 & \partial_y g_1 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_1 \\ f_2 & \partial_y f_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} f_2 & g_2 & \partial_y g_2 & \cdots & \partial_y^{n-1} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2n} & \partial_y f_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} f_{2n} & g_{2n} & \partial_y g_{2n} & \cdots & \partial_y^{n-1} g_{2n} \end{vmatrix}}. \quad (20c)$$

(18) の n -ソリトン解は f_j, g_j を次のように選ぶと得られる.

$$\begin{cases} f_j = c_j \exp \left(k_j y + k_j t_1^{(1)} + k_j^2 t_2^{(1)} + a_j \right) \\ g_j = \exp \left(-k_j z^{(2)} + i \left(e^{-2i\delta k_j} - 1 \right) y \right) \end{cases}.$$

ただし (18) に現れない独立変数はすべて省略するした. また c_j は a_j に吸収させることもできるのだが, 後に特別な役割をするので分離しておく.

さらに (20a) と (20c) の分子分母の第 j 行をことごとく g_j で割る. また (20b) についても同様に分子分母の第 j 行を f_j で割る. そうすることによって, w_{21}, w_{12}, w_{11} は f_j と g_j を比の形でしか含まなくなる. f_j/g_j が $t_1^{(1)}$ と $z^{(2)}$ を $x = t_1^{(1)} + z^{(2)}$ の形でしか依存していないことに注意して,

$$\begin{aligned} f_j/g_j &= c_j e^{\lambda_j} := c_j \exp \left\{ (k_j - L_j) y + k_j x + i k_j^2 t + a_j \right\}, \\ L_j &:= i (e^{-2i\delta k_j} - 1) \end{aligned}$$

とおくと, w_{21}, w_{12}, w_{11} は次のように表される.

$$w_{21}(x) = (-)^{n+1} \times \begin{vmatrix} c_1 e^{\lambda_1} & k_1 c_1 e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-2} c_1 e^{\lambda_1} & 1 & L_1 & \dots & L_1^n \\ c_2 e^{\lambda_2} & k_2 c_2 e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-2} c_2 e^{\lambda_2} & 1 & L_2 & \dots & L_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & k_{2n} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-2} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & 1 & L_{2n} & \dots & L_{2n}^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 e^{\lambda_1} & k_1 c_1 e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1} & 1 & L_1 & \dots & L_1^{n-1} \\ c_2 e^{\lambda_2} & k_2 c_2 e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-1} c_2 e^{\lambda_2} & 1 & L_2 & \dots & L_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & k_{2n} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-1} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & 1 & L_{2n} & \dots & L_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (21a)$$

$$w_{12}(x) = (-)^n \times \begin{vmatrix} 1 & k_1 & \dots & k_1^n & c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & L_1 c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & \dots & L_1^{n-2} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} \\ 1 & k_2 & \dots & k_2^n & c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & L_2 c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & \dots & L_2^{n-2} c_2^{-1} e^{-\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_{2n} & \dots & k_{2n}^n & c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & L_{2n} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & \dots & L_{2n}^{n-2} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & k_1 & \dots & k_1^{n-1} & c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & L_1 c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & \dots & L_1^{n-1} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} \\ 1 & k_2 & \dots & k_2^{n-1} & c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & L_2 c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & \dots & L_2^{n-1} c_2^{-1} e^{-\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_{2n} & \dots & k_{2n}^{n-1} & c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & L_{2n} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & \dots & L_{2n}^{n-1} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} \end{vmatrix}, \quad (21b)$$

$$w_{11}(x) = (-) \times \begin{vmatrix} c_1 e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-2} c_1 e^{\lambda_1} & k_1^n c_1 e^{\lambda_1} & 1 & L_1 & \dots & L_1^{n-1} \\ c_2 e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-2} c_2 e^{\lambda_2} & k_2^n c_2 e^{\lambda_2} & 1 & L_2 & \dots & L_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-2} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & k_{2n}^n c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & 1 & L_{2n} & \dots & L_{2n}^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 e^{\lambda_1} & k_1 c_1 e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1} & 1 & L_1 & \dots & L_1^{n-1} \\ c_2 e^{\lambda_2} & k_2 c_2 e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-1} c_2 e^{\lambda_2} & 1 & L_2 & \dots & L_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & k_{2n} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-1} c_{2n} e^{\lambda_{2n}} & 1 & L_{2n} & \dots & L_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (21c)$$

こうしておいて, (21) の w_{21}, w_{12}, w_{11} にいくつかの条件を課すことで (21a) は (19) の解になるのである. 次の命題は本研究の主結果である.

定理 4.1. 下の条件 C1~C3 を k_j, a_j, c_j に課すことによって $w_{21}(x-i\delta)$ と $w_{12}(x+i\delta)$ は複素共役となり, $w_{11}(x-i\delta)$ は適当な定数を足すことで解析的条件を満たす. すなわち $w_{21}(x-i\delta)$ は INLS 方程式 (19) の解となる.

C1 y は実数であり, k_j, a_j は $k_j^\dagger = -k_{j+n}, a_j^\dagger = -a_{n+j}$ を満たす,

$$C2 \quad \frac{\pi}{2\delta} > \operatorname{Re} k_1 > \operatorname{Re} k_2 > \cdots > \operatorname{Re} k_n > 0$$

C3 c_j , ($j = 1, 2, \dots, n$) は次で与えられる.

$$c_j = \prod_{r=1}^n \frac{L_j - L_{n+r}}{k_j - k_{n+r}}, \quad c_{n+j} = - \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n \frac{L_{n+j} - L_{n+r}}{k_{n+j} - k_{n+r}}.$$

C1~C3を課したあとでもこの解はまだ $4n$ 個の自由なパラメータを持っている. k_j ($j = 1, 2, \dots, n$)の実部と虚部は波の振幅および群速度, 位相速度を支配する. また, a_j ($j = 1, 2, \dots, n$)の実部と虚部は初期位相の自由度となる. y への依存性は a_j に組み込まれるので自由度とはならない. 命題の証明に入る前に, ソリトン解の例をいくつか挙げる.

例 4.2. 1ソリトン解 ($n = 1$ のとき) は次のようになる. パラメータは $k_1 = p + qi$, $k_2 = -k_1^\dagger = -p + qi$ とっており, 解析的条件を満たすためには $0 < p < \frac{\pi}{2\delta}$ でなくてはならない. また簡単のため $y = 0$, $a_1 = \alpha + \beta i$, $a_2 = -a_1^\dagger$ としている.

$$w_{21}(x - i\delta) = \frac{-\sqrt{p \sin 2\delta p} e^{-i\{qx + (p^2 - q^2)t + \beta\}}}{\cosh \left[p(x - i\delta - 2qt) + \delta q + \frac{1}{2} \log \frac{\sin 2\delta p}{p} + \alpha \right]}$$

例 4.3. $k_1 = 0.2 + 0.02i$, $k_2 = 0.11 + 0.1i$, $\delta = 4$, $y = a_1 = a_2 = 0$ の場合の 2 ソリトン解の相互作用領域を下に図示する. $|w_{21}(x - i\delta)|^2$ が $-1200 \leq t \leq 600$ and $-130 \leq x \leq 130$ の範囲で描かれている.

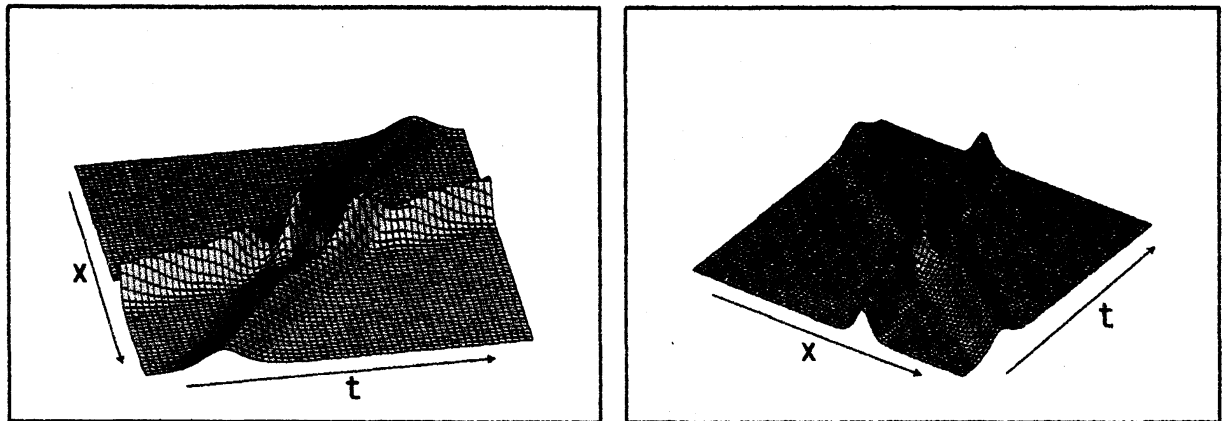


図 1: 2 ソリトン解の相互作用の例

この解で特徴的なのは, 追い越しの前後で各ソリトンの振幅が変わることである. 適当な動画ソフトを用いると遅いソリトンの振幅が早いソリトンに追いつかれる前に小さくなり, 追い越しのあとまた元の高さに復元する様子を見ることができる.

2 ソリトンに関しては, 相互作用の前後における位相のずれを明示的に計算することができる.

$k_j = p_j + iq_j$ とし簡単のため $q_1 < q_2 < 0$ とすると, 早いソリトンの群速度は $-2q_1$ となる. 絶対枠から早いソリトンとともに動く運動枠にうつると, (21a) は漸近的に次のようにあらわされる.

$$|w_{21}(x, t)| \sim \begin{cases} \cosh(p_1 x) & (t \rightarrow -\infty) \\ \cosh(p_1 x + \theta) & (t \rightarrow \infty) \end{cases}.$$

位相のずれ θ は

$$e^{2\theta} = \frac{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2} \times \frac{\cosh 2\delta(q_1 - q_2) - \cos 2\delta(p_1 + p_2)}{\cosh 2\delta(q_1 - q_2) - \cos 2\delta(p_1 - p_2)}$$

となる. 遅いソリトンにおける位相のずれも同様に計算でき, ちょうど $-\theta$ となることが確認できる.

5 定理 4.1 の証明

定理 4.1 を示すには $w_{21}(x - i\delta) = \{w_{12}(x + i\delta)\}^\dagger$ と $w_{11}(x - i\delta)$ が命題 2.2 の解析的条件を満たすことをいえばよい. これらを次の 3 段階で説明する.

i) $w_{21}(x - i\delta) = \{w_{12}(x + i\delta)\}^\dagger$ を示す.

ii) $w_{21}(x - i\delta)$ と $w_{12}(x + i\delta)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ において指数関数的に 0 に近づく. (これはとりもなおさず, $w_{11}(x + i\delta) - w_{11}(x - i\delta)$ が指数関数的に 0 に近づくということを意味しており, $w_{11}(x + i\delta) - w_{11}(x - i\delta)$ 解析的条件の c. を満たすということに他ならない.)

また, $w_{11}(x - i\delta)$ は適当な定数を足すことで解析的条件の b. を満たすことも示す. 実は w_{11} そのものは, b. を満たさない. しかし w_{11} は定数を加えても (18) を満たし, 解析的な性質は変わらないので, b. 以外の項目に関しては定数を加えないまま議論することにする.

iii) $w_{11}(x - i\delta)$ は $0 \leq \text{Im } x \leq 2\delta$ において解析的であることを示す.

これらの証明では k_j, L_j の差積が頻繁に登場するので, 簡単のために次の記号を導入しておく.

定義 5.1. 添え字の集合 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_a\}$ (以後一般性を失うことなく添え字は常に昇順, すなわち $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_a$ であると仮定する.) に対して $k_{\sigma_j}, L_{\sigma_j}$ の差積を以下で表す.

$$k_\sigma := \prod_{1 \leq j < j' \leq a} (k_{\sigma_j} - k_{\sigma_{j'}}), \quad L_\sigma := \prod_{1 \leq j < j' \leq a} (L_{\sigma_j} - L_{\sigma_{j'}}).$$

また, σ と互いに共通部分を持たない添え字集合 $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_b\}$ との組に関する差積について次の記号を用いる.

$$k_{\sigma \rightarrow \mu} := \prod_{j=1}^a \prod_{j'=1}^b (k_{\sigma_j} - k_{\mu_{j'}}), \quad L_{\sigma \rightarrow \mu} := \prod_{j=1}^a \prod_{j'=1}^b (L_{\sigma_j} - L_{\mu_{j'}}).$$

また, これらに関連して次の事実を頻繁に用いる.

注意 5.2. 条件 C1 より, x, t が実であるとき $k_j^\dagger = -k_{n+j}$, $L_j^\dagger = -L_{n+j}$, $\lambda_j^\dagger = -\lambda_{n+j}$ が成立する. ただし添え字は $2n$ を法として考える.

注意 5.3. 条件 C2 により, L_j , ($j = 1, 2, \dots, n$) の実部は正となる.

注意 5.4. 添え字集合 $\sigma := \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_a\}$ を共通部分を持たない二つの添え字集合 $\mu := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_b\}$, $\kappa := \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_c\}$ ($b + c = a$) の和集合に分割した場合, 次が成り立つ.

$$\frac{L_\sigma}{k_\sigma} = \frac{L_\mu L_\kappa L_{\mu \rightarrow \kappa}}{k_\mu k_\kappa k_{\mu \rightarrow \kappa}}, \quad L_\sigma k_\sigma = L_\mu L_\kappa L_{\mu \rightarrow \kappa} k_\mu k_\kappa k_{\mu \rightarrow \kappa}. \quad (22)$$

ただし, この等式は L_σ や k_σ 単独では成立しない, すなわち

$$L_\sigma \neq L_\mu L_\kappa L_{\mu \rightarrow \kappa}, \quad k_\sigma \neq k_\mu k_\kappa k_{\mu \rightarrow \kappa}$$

であることに注意する. 添え字はいつも昇順に直すと決めたので, 右辺と左辺で符号が異なる可能性があるからである. しかし (22) のような分数や積を考える限り, この問題は起こらない.

それでは定理 4.1 の証明にとりかかることにする.

補題 5.5. C1~C3 を満たし, x, t が実であるとき w_{21} と w_{12} は複素共役である.

この補題からただちに $(w_{21}(x - i\delta)) = w_{12}(x + i\delta)$ が導かれ, 段階 i) が終了するのだが証明がやや長いので第 7 節にまわすことにする.

続いて段階 ii) にとりかかる.

補題 5.6. x が $\pm\infty$ に近づくに従って $w_{21}(x - i\delta)$ と $w_{12}(x + i\delta)$ は指数関数的に 0 へと近づく.

(証明)

条件 C2 より, (21a) は $x \rightarrow \infty$ において分子の行列式の上から $n-1$, および分母の上から n 行が支配的となることがわかる. よって,

$$\begin{aligned} w_{21}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} (-)^{n+1} \frac{k_{\{1, \dots, n-1\}} L_{\{n, \dots, 2n\}} \prod_{r=1}^{n-1} e^{\lambda_r}}{k_{\{1, \dots, n\}} L_{\{n+1, \dots, 2n\}} \prod_{r=1}^n e^{\lambda_r}} \\ &= (-)^{n+1} \frac{L_{\{n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}}{k_{\{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{n\}}} e^{-\lambda_n} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる. 一方 $x \rightarrow -\infty$ においては, 分子の上から $n+1$ 行目から $2n-1$ 行目, 分母の $n+1$ 行目から $2n$ 行目が支配的となるため,

$$\begin{aligned} w_{21}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (-) \frac{k_{\{n+1, \dots, 2n-1\}} L_{\{1, \dots, n, 2n\}} \prod_{r=n+1}^{2n-1} e^{\lambda_r}}{k_{\{n+1, \dots, 2n\}} L_{\{1, \dots, n\}} \prod_{r=1}^n e^{\lambda_r}} \\ &= \frac{-L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{2n\}}}{k_{\{n+1, \dots, 2n-1\} \rightarrow \{2n\}}} e^{-\lambda_{2n}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (24)$$

となる. 同様のやり方で w_{12} の場合も示すことができる. これらはもちろん $w_{21}(x-i\delta)$, $w_{12}(x+i\delta)$ においても成り立つ. $\square$

補題 5.7. $w_{11}(x)$ は適当な定数を加えることで命題 2.2 の境界条件 b. を満たすようにできる.

(証明) 補題 5.6 の場合と同様の考察によって, 次がわかる.

$$\lim_{\operatorname{Re} x \rightarrow +\infty} w_{11}(x) = (-) \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & k_1^{n-2} & k_1^n \\ 1 & \cdots & k_2^{n-2} & k_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & k_n^{n-2} & k_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & k_1^{n-1} \\ 1 & \cdots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}},$$

$$\lim_{\operatorname{Re} x \rightarrow -\infty} w_{11}(x) = (-) \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & k_{n+1}^{n-2} & k_{n+1}^n \\ 1 & \cdots & k_{n+2}^{n-2} & k_{n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & k_{2n}^{n-2} & k_{2n}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & k_{n+1}^{n-1} \\ 1 & \cdots & k_{n+2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & k_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}}.$$

よって, $\tilde{w}_{11}(x) := w_{11}(x) - \{w_{11}(+\infty) + w_{11}(-\infty)\}/2$ と定義してやると, $\tilde{w}_{11}(x-i\delta)$ は命題 2.2 の条件 b. を満たす. $\square$

段階 iii) を証明するにはまず w_{11} を $n \times n$ の二つの行列の和の行列式に書き直す.

補題 5.8.

$$\frac{k_{\{n+1, \dots, 2n\}}}{L_{\{n+1, \dots, 2n\}}} \times \frac{1}{L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \times \tau$$

$$= (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} + \frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (25)$$

ただし τ は (21a) の分母である.

(証明)

まず, 右辺を $\left(\frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right)_{ij}$ および $\left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} \right)_{ij}$ という成分を持つ小行列式の積の和に書き直すことから始める. すなわち次のようになる.

$$(-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} + \frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right)$$

$$= (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\substack{\{\sigma, \sigma'\} \\ \{\mu, \mu'\}}} (-)^{[\sigma] + [\mu]} \det \left(\frac{1}{k_{\sigma_i} - k_{n+\mu_j}} \right) \det \left(\frac{1}{L_{\sigma'_i} - L_{n+\mu'_j}} \right). \quad (26)$$

もう少し詳しく述べる. (26) を展開する際, 成分 $\left(\frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right)_{ij}$ を選ぶ行の添え字を $\sigma := \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ とする. 選ばれなかった行を $\sigma' := \{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_s\}$ とすると, この行では $\left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} \right)_{ij}$ の成分を選ぶことになる. 列に関しても同様に添え字付けを行う. すなわち, $\left(\frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right)_{ij}$ を選んだ列を $\mu := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ とし, $\left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} \right)_{ij}$ を選んだ列を $\mu' :=$

$\{\mu'_1, \dots, \mu'_s\}$ とする. (σ と μ の要素の数は等しくなくてはならないことに注意する.) これらの添え字付けはもちろん昇順である.

(26) の右辺の和は可能なすべての分割 $\{\sigma, \sigma'\}$, $\{\mu, \mu'\}$ にわたってとるものとする. このような行列式の分割については文献 [10] に詳しく書いてある.

また, $\{n + \mu_1, \dots, n + \mu_r\}$ や $\{n + \mu'_1, \dots, n + \mu'_s\}$ という添え字集合も頻繁に登場するので, これらを簡単のため $n + \mu$ および $n + \mu'$ と記すことにする.

さて, (26) 右辺の各項は Cauchy 行列式であるので, 引き続き次のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 & (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left(\frac{e^{\lambda_{n+j}}}{L_i - L_{n+j}} + \frac{e^{\lambda_i}}{k_i - k_{n+j}} \right) \\
 &= (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\substack{\{\sigma, \sigma'\} \\ \{\mu, \mu'\}}} (-)^{[\sigma] + [\mu] + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2}} \\
 &\quad \times \frac{k_\sigma k_{n+\mu} L_{\sigma'} L_{n+\mu'}}{k_{\sigma \rightarrow n+\mu} L_{\sigma' \rightarrow n+\mu'}} e^{\sum_{j=1}^r \lambda_{\sigma_j} + \sum_{j=1}^s \lambda_{n+\mu'_j}} \\
 &= \sum_{\substack{\{\sigma, \sigma'\} \\ \{\mu, \mu'\}}} (-)^{[\sigma] + [\mu] + (n+1)r} \frac{k_\sigma k_{n+\mu} L_{\sigma'} L_{n+\mu'}}{k_{\sigma \rightarrow n+\mu} L_{\sigma' \rightarrow n+\mu'}} e^{\sum_{j=1}^r \lambda_{\sigma_j} + \sum_{j=1}^s \lambda_{n+\mu'_j}}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

ここで (25) の左辺を展開して, $e^{\sum_{j=1}^r \lambda_{\sigma_j} + \sum_{j=1}^s \lambda_{n+\mu'_j}}$ の係数が (27) のものと一致することを見る. ただし展開の際に生じる符号を当面, $(-)^S$ とおくことにする. 注意 5.4 によって次を得る.

$$\begin{aligned}
 & \text{(25) の左辺の } e^{\sum_{j=1}^r \lambda_{\sigma_j} + \sum_{j=1}^s \lambda_{n+\mu'_j}} \text{ の係数} \\
 &= \frac{k_{\{n+1, \dots, 2n\}}}{L_{\{n+1, \dots, 2n\}}} \frac{1}{L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \times \prod_{j=1}^r c_{\sigma_j} \times \prod_{j=1}^s c_{n+\mu'_j} \\
 &\quad \times \begin{vmatrix} 1 & k_{\sigma_1} & \dots & k_{\sigma_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_{\sigma_r} & \dots & k_{\sigma_r}^{n-1} \\ 1 & k_{n+\mu'_1} & \dots & k_{n+\mu'_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_{n+\mu'_s} & \dots & k_{n+\mu'_s}^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & L_{\sigma'_1} & \dots & L_{\sigma'_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & L_{\sigma'_s} & \dots & L_{\sigma'_s}^{n-1} \\ 1 & L_{n+\mu_1} & \dots & L_{n+\mu_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & L_{n+\mu_r} & \dots & L_{n+\mu_r}^{n-1} \end{vmatrix} \times (-)^S \\
 &= (-)^S \times \frac{k_{\{n+1, \dots, 2n\}}}{L_{\{n+1, \dots, 2n\}}} \frac{k_{\{\sigma, n+\mu'\}} L_{\{\sigma', n+\mu\}}}{L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \prod_{j=1}^r c_{\sigma_j} \times \prod_{j=1}^s c_{n+\mu'_j} \\
 &= (-)^S \times \frac{k_{\{n+1, \dots, 2n\}}}{L_{\{n+1, \dots, 2n\}}} \frac{k_\sigma k_{n+\mu'} k_{\sigma \rightarrow n+\mu'} L_{\sigma'} L_{n+\mu} L_{\sigma' \rightarrow n+\mu}}{L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \\
 &\quad \times \prod_{j=1}^r \frac{L_{\sigma_j \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}}{k_{\sigma_j \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \times \left(\prod_{j=1}^s \frac{L_{n+\mu'_j \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{n+\mu'_j\}}}{k_{n+\mu'_j \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{n+\mu'_j\}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-)^S \times (-)^s \times \frac{k_{\{n+1, \dots, 2n\}}}{L_{\{n+1, \dots, 2n\}}} \frac{k_{\sigma} k_{n+\mu'} k_{\sigma \rightarrow n+\mu'} L_{\sigma'} L_{n+\mu} L_{\sigma' \rightarrow n+\mu}}{L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \\
&\quad \times \frac{L_{\sigma \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}}{k_{\sigma \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} \left(\frac{L_{n+\mu'}}{k_{n+\mu'}} \right)^2 \frac{L_{n+\mu' \rightarrow n+\mu}}{k_{n+\mu' \rightarrow n+\mu}} \\
&= (-)^S \times (-)^s \times \frac{k_{\sigma} k_{n+\mu} L_{\sigma'} L_{n+\mu'}}{k_{\sigma \rightarrow n+\mu} L_{\sigma' \rightarrow n+\mu'}}. \tag{28}
\end{aligned}$$

よって符号を除いて, $e^{\sum_{j=1}^r \lambda_{\sigma_j} + \sum_{j=1}^s \lambda_{n+\mu'_j}}$ の係数は (25) と (27) で等しいことがわかる. 符号に関してであるが, S は $\{1, 2, \dots, 2n\}$ を $\{\sigma, n+\mu', \sigma', n+\mu\}$ に並べ替えるのに必要な互換の数である. まず $\{1, 2, \dots, 2n\}$ を $\{\sigma, \sigma', n+\mu, n+\mu'\}$ に並べ替えることにすると, このとき生じる符号が $(-)^{[\sigma]+[\mu]}$ である. 引き続き $\{\sigma, \sigma', n+\mu, n+\mu'\}$ を $\{\sigma, n+\mu', \sigma', n+\mu\}$ に並べ替えるとさらに符号 $(-)^{ns}$ が生じる. よって,

$$(-)^S \times (-)^s = (-)^{[\sigma]+[\mu]+(n+1)s} = (-)^{[\sigma]+[\mu]+(n+1)r} \tag{29}$$

を得る. よって (27), (28), (29) より, 補題は示された. $\square$

補題 5.8 を用いると, 段階 iii) を完成させることができる.

系 5.9. k_j の絶対値を十分小さくとると, $w_{11}(x - i\delta)$ は $0 \leq \text{Im } x \leq 2\delta$ において正則となる.

(証明) $w_{11}(x)$ が $\delta \geq |\text{Im } x|$ において正則であることを示しても同じことである. まず最初に補題 5.8 を以下のように変形する.

$$\begin{aligned}
\tau &= (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \frac{L_{\{n+1 \dots 2n\}}}{k_{\{n+1 \dots 2n\}}} \times L_{\{1, \dots, n\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}} \times e^{\sum_{j=1}^n \lambda_{n+j}} \\
&\quad \times \det \left(\frac{1}{L_i - L_{n+j}} + \frac{e^{\lambda_i - \lambda_{n+j}}}{k_i - k_{n+j}} \right). \tag{30}
\end{aligned}$$

よって, $w_{11}(x)$ は右辺最後の行列式が 0 となるところ発散することがわかる. すなわち $w_{11}(x)$ が帯状領域 $\delta \geq |\text{Im } x|$ で正則であることを示すにはこの行列式が帯状領域内で 0 点を持たないことを示せばよい.

注意 5.2 によってこの行列式は次のように書き換えられる.

$$\det \left(\frac{1}{L_i + L_j^\dagger} + \frac{e^{\lambda_i + \lambda_j^\dagger}}{k_i + k_j^\dagger} \right). \tag{31}$$

このことから x が実ならば, (31) は正となることがわかる. なぜならば任意の 0 でないベクトル $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ に対して,

$$\begin{aligned}
 & (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1+L_1^\dagger} + \frac{e^{\lambda_1+\lambda_1^\dagger}}{k_1+k_1^\dagger} & \dots & \frac{1}{L_1+L_n^\dagger} + \frac{e^{\lambda_1+\lambda_n^\dagger}}{k_1+k_n^\dagger} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_n+L_1^\dagger} + \frac{e^{\lambda_n+\lambda_1^\dagger}}{k_n+k_1^\dagger} & \dots & \frac{1}{L_n+L_n^\dagger} + \frac{e^{\lambda_n+\lambda_n^\dagger}}{k_n+k_n^\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\dagger \\ \vdots \\ y_n^\dagger \end{pmatrix} \\
 &= \int_{-\infty}^0 du (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} e^{(L_1+L_1^\dagger)u} & \dots & e^{(L_1+L_n^\dagger)u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{(L_n+L_1^\dagger)u} & \dots & e^{(L_n+L_n^\dagger)u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\dagger \\ \vdots \\ y_n^\dagger \end{pmatrix} \\
 &\quad + \int_0^x du (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1+\lambda_1^\dagger}|_{x=u} & \dots & e^{\lambda_1+\lambda_n^\dagger}|_{x=u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_n+\lambda_1^\dagger}|_{x=u} & \dots & e^{\lambda_n+\lambda_n^\dagger}|_{x=u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\dagger \\ \vdots \\ y_n^\dagger \end{pmatrix} \\
 &= \int_{-\infty}^0 du \sum_{j=1}^n |y_j e^{L_j u}|^2 + \int_0^x du \sum_{j=1}^n |(y_j e^{\lambda_j}|_{x=u})|^2 > 0
 \end{aligned}$$

となるからである. 上式の積分において, 条件 C1 と注意 5.3 によって $k_j+k_j^\dagger$ と $L_j+L_j^\dagger$ が正となることに注意する. よって, (31) は少なくとも実軸上 0 とならないことがわかった. 帯状領域 $|\operatorname{Im} x| \leq \delta$ 全体に関しては次のように考える. まず, (23) と (24) があるので, w_{11} は帯状領域内, $|x|$ が十分大きいところでは正則である. すなわちある定数 R が存在して, w_{11} は $\{x \mid |\operatorname{Im} x| \leq \delta\} \cap \{x \mid |\operatorname{Re} x| \geq R\}$ で正則である. 残る長方形領域 $\{x \mid |\operatorname{Im} x| \leq \delta\} \cap \{x \mid |\operatorname{Re} x| < R\}$ において w_{11} は特異点を有するかもしれないが, w_{11} は実解析的なので, $\{x \mid -R \leq x \leq R\}$ を含むある開集合において正則となる. そして w_{11} は x を $k_j x$ の形でしか含んでいないので, k_j の絶対値を十分小さくすれば, この開集合を長方形全体を含むようになるまで大きくできるのである. $\square$

6 INLS の極限としての NLS 方程式

方程式のレベルでは, INLS 方程式は $\delta \rightarrow 0$ の極限で NLS に移行することはすでに述べた. ソリトン解も $\delta \rightarrow 0$ の極限で NLS 方程式の明るいソリトン解に移行するというだけ簡単に説明しておく. $\delta \rightarrow 0$ の極限において $c_j \rightarrow (2\delta)^n$, $c_{n+j} \rightarrow -(2\delta)^{n-1}$, ($j = 1, 2, \dots, n$), $L_j \rightarrow 2\delta k_j$, ($j =$

$1, 2, \dots, 2n)$ であるので, w_{21} は漸近的に次の形になる.

$$w_{21}(x)/\sqrt{2\delta} = (-)^{n+1} \times \begin{vmatrix} \sqrt{2\delta}e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-2}\sqrt{2\delta}e^{\lambda_1} & 1 & k_1 & \dots & k_1^n \\ \sqrt{2\delta}e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-2}\sqrt{2\delta}e^{\lambda_2} & 1 & k_2 & \dots & k_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sqrt{2\delta})^{-1}e^{\lambda_{2n}} & \dots & -k_{2n}^{n-2}(\sqrt{2\delta})^{-1}e^{\lambda_{2n}} & 1 & k_{2n} & \dots & k_{2n}^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{2\delta}e^{\lambda_1} & \dots & k_1^{n-1}\sqrt{2\delta}e^{\lambda_1} & 1 & k_1 & \dots & k_1^{n-1} \\ \sqrt{2\delta}e^{\lambda_2} & \dots & k_2^{n-1}\sqrt{2\delta}e^{\lambda_2} & 1 & k_2 & \dots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sqrt{2\delta})^{-1}e^{\lambda_{2n}} & \dots & -k_{2n}^{n-1}(\sqrt{2\delta})^{-1}e^{\lambda_{2n}} & 1 & k_{2n} & \dots & k_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (32)$$

よって初期位相 a_j を $a'_j - \frac{1}{2} \ln(2\delta)$ と取り直すことで, 行列式内部の $\sqrt{2\delta}$ は初期位相に吸収され, (32) は知られている NLS 方程式の n ソリトン解 [5] に一致する.

7 補題 5.5 の証明

この節では残されていた補題 5.5 の証明を行う. 注意 5.2 があるので, (21a) の複素共役は次のようになる.

$$w_{21}^\dagger = (-)^{n+1} \times \begin{vmatrix} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & \dots & (-k_{n+1})^{n-2} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & 1 & \dots & (-L_{n+1})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & \dots & (-k_{2n})^{n-2} c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & (-L_{2n})^n \\ c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & \dots & (-k_1)^{n-2} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & (-L_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & \dots & (-k_n)^{n-2} c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & 1 & \dots & (-L_n)^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & \dots & (-k_{n+1})^{n-1} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & 1 & \dots & (-L_{n+1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & \dots & (-k_{2n})^{n-1} c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & (-L_{2n})^{n-1} \\ c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & \dots & (-k_1)^{n-1} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & (-L_1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & \dots & (-k_n)^{n-1} c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & 1 & \dots & (-L_n)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

行を λ_j の添え字が昇順になるように並べ替え, 負符号を前に出すと次のようになる.

$$w_{21}^\dagger = \frac{(-)^n \begin{vmatrix} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & \dots & k_1^{n-2} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & L_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & \dots & k_n^{n-2} c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & 1 & \dots & L_n^n \\ c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & \dots & k_{n+1}^{n-2} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & 1 & \dots & L_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-2} c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & L_{2n}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & \dots & k_1^{n-1} c_{n+1}^\dagger e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & L_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & \dots & k_n^{n-1} c_{2n}^\dagger e^{-\lambda_n} & 1 & \dots & L_n^{n-1} \\ c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & \dots & k_{n+1}^{n-1} c_1^\dagger e^{-\lambda_{n+1}} & 1 & \dots & L_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & \dots & k_{2n}^{n-1} c_n^\dagger e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & L_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}}. \quad (33)$$

こうしておいて分子を左から $n-1$ 列と残り $n+1$ 列とに分けて Laplace 展開し, また分母を左から n 列と残り n 列に分けて Laplace 展開すると次が得られる.

$$w_{21}^\dagger = \frac{(-)^{n+1} \sum_{\{\sigma_j\}, \{\sigma'_j\}} (-)^{[\sigma]} k_\sigma L_{\sigma'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\sigma_r}^\dagger e^{-\lambda_{\sigma_r}}}{\sum_{\mu, \mu'} (-)^{[\mu]} k_\mu L_{\mu'} \prod_{r=1}^n c_{n+\mu_r}^\dagger e^{-\lambda_{\mu_r}}}. \quad (34)$$

分子の $\sum$ の添え字は $\{1, 2, \dots, 2n\}$ を $n-1$ 個と $n+1$ 個の要素に分ける可能な分割 σ, σ' 全てをわたるものとする. また式中 $(-)^{[\sigma]}$ は分子の行列式において σ に属する行を上, σ' に属する行を下に移動するときに生じる符号を表すものとする. 分母の添え字 μ や符号に関しても同様に定義する. また, w_{12} に関しても同様の展開を行う. (21b) の列を並べ替えることで次の表式に到達する.

$$w_{12} = \frac{(-)^{n+1} \begin{vmatrix} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & \dots & L_1^{n-2} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & k_1^n \\ c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & \dots & L_2^{n-2} c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & 1 & \dots & k_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & \dots & L_{2n}^{n-2} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & k_{2n}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & \dots & L_1^{n-1} c_1^{-1} e^{-\lambda_1} & 1 & \dots & k_1^{n-1} \\ c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & \dots & L_2^{n-1} c_2^{-1} e^{-\lambda_2} & 1 & \dots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & \dots & L_{2n}^{n-1} c_{2n}^{-1} e^{-\lambda_{2n}} & 1 & \dots & k_{2n}^{n-1} \end{vmatrix}} \quad (35)$$

$$= \frac{(-)^n \sum_{\sigma, \sigma'} (-)^{[\sigma]} L_\sigma k_{\sigma'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{\sigma_r}^{-1} e^{-\lambda_{\sigma_r}}}{\sum_{\mu, \mu'} (-)^{[\mu]} L_\mu k_{\mu'} \prod_{r=1}^n c_{\mu_r}^{-1} e^{-\lambda_{\mu_r}}}.$$

よって $w_{21}^\dagger = w_{12}$ を示すには任意の σ, μ に対して次が成り立つことを示せばよいことがわかる.

$$\frac{(34) \text{ の分子の } e^{-\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{\sigma_j} \text{ の係数}}}{(35) \text{ の分子の } e^{-\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{\sigma_j} \text{ の係数}}} = \frac{(34) \text{ の分母の } e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_{\mu_j} \text{ の係数}}}{(35) \text{ の分母の } e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_{\mu_j} \text{ の係数}}}. \quad (36)$$

これは注意 5.4 を繰り返し使えば示すことができる. まず次を得る.

$$(36) \text{ の左辺} = -\frac{k_\sigma L_{\sigma'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\sigma_r}^\dagger}{L_\sigma k_{\sigma'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{\sigma_r}^{-1}} = -\frac{k_\sigma L_{\sigma'}}{L_\sigma k_{\sigma'}} \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\sigma_r}^\dagger c_{\sigma_r}. \quad (37)$$

ここで c_j が

$$c_j = \begin{cases} \frac{L_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}}{k_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\}}} = \frac{L_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{j\}}}{k_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{j\}}} & (j = 1, 2, \dots, n) \\ -\frac{L_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{j\}}}{k_{\{j\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{j\}}} & (j = n+1, n+2, \dots, 2n) \end{cases}$$

と書き換えられることに注意すると次が得られる.

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\sigma_r}^\dagger c_{\sigma_r} \\ &= \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ - \left(\frac{L_{\{n+\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{n+\sigma_r\}}}{k_{\{n+\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{n+\sigma_r\}}} \right)^\dagger \frac{L_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}}{k_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}} \right\} \\ &= (-)^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{L_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma_r\}}}{k_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma_r\}}} \frac{L_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}}{k_{\{\sigma_r\} \rightarrow \{n+1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}} \\ &= (-)^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{L_{\sigma_r \rightarrow \{1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}}{k_{\sigma_r \rightarrow \{1, \dots, 2n\} \setminus \{\sigma_r\}}} = (-)^{n-1} \left(\frac{L_\sigma}{k_\sigma} \right)^2 \frac{L_{\sigma \rightarrow \sigma'}}{k_{\sigma \rightarrow \sigma'}}. \end{aligned} \quad (38)$$

(38) を (37) の右辺に代入すると,

$$\begin{aligned} (37) \text{ の右辺} &= -(-)^{n-1} \frac{k_\sigma L_{\sigma'}}{L_\sigma k_{\sigma'}} \left(\frac{L_\sigma}{k_\sigma} \right)^2 \frac{L_{\sigma \rightarrow \sigma'}}{k_{\sigma \rightarrow \sigma'}} \\ &= (-)^n \frac{L_{\{1, \dots, 2n\}}}{k_{\{1, \dots, 2n\}}} \end{aligned} \quad (39)$$

となる. 同様に

$$\begin{aligned} (36) \text{ の右辺} &= \frac{k_\mu L_{\mu'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\mu_r}^\dagger}{L_\mu k_{\mu'} \prod_{r=1}^{n-1} c_{\mu_r}^{-1}} = \frac{k_\mu L_{\mu'}}{L_\mu k_{\mu'}} \prod_{r=1}^{n-1} c_{n+\mu_r}^\dagger c_{\mu_r} \\ &= \frac{k_\mu L_{\mu'}}{L_\mu k_{\mu'}} \times (-)^n \left(\frac{L_\mu}{k_\mu} \right)^2 \frac{L_{\mu \rightarrow \mu'}}{k_{\mu \rightarrow \mu'}} = (-)^n \frac{L_{\{1, \dots, 2n\}}}{k_{\{1, \dots, 2n\}}} \end{aligned} \quad (40)$$

となる. よって (39), (40) より $w_{21}^\dagger = w_{12}$ であるとわかる. $\square$

8 追従型交通流モデルの進行波解について

この節では二種類の追従型交通流モデル方程式の衝撃波解を簡単に報告する。追従型交通流モデルは次のような時間遅れのある微差分方程式である。

$$\dot{x}_n(t) = F(\Delta x_n(t - \tau)) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

$x_n(t)$ は一次元的に並んで移動する車の列における n 番目の車の時刻 t における位置をあらわし、 $\Delta x_n(t) := x_{n-1}(t) - x_n(t)$ は車間距離を表す。関数 F は Optimal Velocity (OV) 関数と呼ばれ、モデルに固有の関数である。今回は指数関数型 OV 関数 [13]

$$\dot{x}_n(t) = V \left[1 - \exp \left(-\frac{\gamma}{V} (\Delta x_n(t - \tau) - L) \right) \right] \quad (42)$$

および、 $\tanh$ 型 OV 関数 [2, 3, 6, 7] を持つ方程式

$$\dot{x}_n(t) = \xi + \eta \tanh \left(\frac{\Delta x_n(t - \tau) - \rho}{2A} \right) \quad (43)$$

をとりあげる。これらの進行波解に関しては (42) のキンク解が [17] に、(43) の楕円関数を用いて書ける進行波解が [2, 3, 6, 7] などでも報告されている。本稿では両モデルにおいて指数関数で書けるキンクの進行波解を報告する。どちらも解に 1 パラメータの自由度がある新しい解であるが、特に $\tanh$ 型モデルの解は知られている他の解と違って波の進行速度が自由に選べる点で興味深い (42) はまず、

$$x_n(t) = V_0 t - L_0 n + y_n(t) \quad (44)$$

$$(45)$$

とにおいて一様な流れの成分を除いて考える。 V_0, L_0 はそれぞれ一様流の速度と車間距離であり次の関係式を満たす。

$$V_0 = V \left[1 - \exp \left(-\frac{\gamma}{V} (L_0 - L) \right) \right] \quad (46)$$

さらに $s_n(t) = (\gamma/V) \{y_{n-1}(t) - y_n(t)\}$ とおくことによって次の形に書き換わる。

$$\frac{1}{\alpha_0} \dot{s}_n(t) = -\exp(-s_{n-1}(t - \tau)) + \exp(-s_n(t - \tau)). \quad (47)$$

(47) は $g/f = \exp(-s_n(t))$ とおくことで f と g に関する双線形形式に書き換わり、指数関数を用いてキンク解を仮定することで次の解を導くことができる。

$$s_n(t) = \log \frac{\alpha_0 \sinh(b\tau)}{b} \frac{\cosh(b(t - \tau n))}{\cosh(b[t - \tau(n+1)])}. \quad (48)$$

一方 (43) は $g/f = \tanh\{(\Delta x_n(t) - \rho)/2A\}$ とおくことでやはり双線形形式に書き換わり、適当なキンクの形を仮定することで次の解を見つけることができる。

$$\Delta x_n(t) = \rho + A \log \left(\frac{2\eta \sinh(b\tau)}{bA} \frac{\cosh\left(bt - \frac{a}{2}n\right)}{\cosh\left(b(t - \tau) - \frac{a}{2}n\right)} - 1 \right).$$

ただし

$$e^a = \frac{bA/\eta + 1 - e^{2b\tau}}{bA/\eta - 1 + e^{-2b\tau}}$$

であり, これはキンクの速度成分 $2b/a$ に 1 パラメータの自由度があることを示している.

参考文献

- [1] M.J.Ablowitz, P.A.Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge University Press, Cambridge) (1991).
- [2] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata and Y.Sugiyama, Phys. Rev. E 51 (1995) 1035.
- [3] M.Bando, K.Hasebe, K.Nakanishi, A.Nakayama, A.Shibata and Y.Sugiyama, J. Phys. I France 5 (1995) 1389.
- [4] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara, T.Miwa, J. Phys. Soc. J. 50 (1981) 3806.
- [5] N.C.Freeman, IMA J. Appl. Math. 32 (1984) 125.
- [6] K.Hasebe, A.Nakayama and Y.Sugiyama, Phys. Lett. 259 (1999) 135.
- [7] Y.Igarashi, K.Itoh and K.Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. 68 (1999) 791.
- [8] M.Jimbo, T.Miwa, Publ. RIMS Kyoto Univ. 19 (1983) 943.
- [9] V.G.Kac, J.W.van de Leur, J. Math. Phys. 44 (2003) 3245.
- [10] V.E.Korepin, N.M.Bogoliubov, A.G.Izergin *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, (Cambridge University Press, Cambridge) (1993).
- [11] Y.Matsuno, Inverse Problems 17 (2001) 501.
- [12] Y.Matsuno, Inverse Problems 18 (2002) 1101.
- [13] G.F.Newell, Oper. Res. 9 (1961) 209.
- [14] D.Pelinovsky, Phys.Lett. A 197 (1995) 401.
- [15] D.Pelinovsky, J. Math. Phys. 36 (1995) 4203.
- [16] M.Sato, RIMS Kôkyûroku 439 (1981) 30.
- [17] G.B.Whitham, Proc. R. Soc. Lond. A 428 (1990) 49.