

格子ボルツマン法¹

— 新しい流体シミュレーション法 —

京都大学大学院 工学研究科 稲室 隆二²

(2001 年 9 月 18 日受理)

格子ボルツマン法について、その基礎と応用を解説する。非圧縮性粘性流体ならびに気液・液液二相流体に適用可能な格子ボルツマン法を取り上げる。また、格子ボルツマン法と Navier-Stokes 方程式との関係を漸近理論を用いて明らかにする。さらに、格子ボルツマン法を発展させた Lattice Kinetic スキームについて紹介する。

1 はじめに

近年、非圧縮性粘性流体ならびに気液・液液二相流体の流れ解析法として格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と呼ぶ) が注目されている。LBM とは、流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体 (格子気体モデルと呼ばれる) で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し、その速度分布関数のモーメントから巨視の流れ場を求める数値計算法である。すなわち、流体を微視的立場からとらえる気体分子運動論をアナロジーとする数値計算法である。したがって、LBM を理解するためには、気体分子運動論すなわちボルツマン方程式に対する多少の知識が必要である。この事情が Navier-Stokes 方程式に慣れた人々には LBM は理解し難い特殊な数値スキームと見なされる原因の一つである。しかしながら、その基礎さえ理解すれば、LBM は非常に簡単な効率の良い数値スキームである。すなわち、LBM は、複雑な流れ場に対してもアルゴリズムが簡単であり、また、並列計算に適しているなどの利点をもっている。これまで、多孔質内流れなどの複雑な境界をもつ流れ場や気液二相流などの界面が複雑に変化する流れ場に適用され成功をおさめている。しかしながら、手法の開発が急速に進んでいるために、その基礎が理解されないままに应用される傾向も見られ、手法の正当な評価が誤解されている向きもある。

本稿では、LBM の基礎および応用について、主に筆者らの研究結果を用いて解説する。なお、以下の構成は次の通りである。2 章では、非圧縮性粘性流体に対する LBM の定式化を行い、LBM と Navier-Stokes 方程式との関係を漸近理論を用いて明らかにする。3 章では、LBM を発展させた Lattice Kinetic スキームを紹介する。4 章では、気液および液液

¹本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。²E-mail: inamuro@cheme.kyoto-u.ac.jp

二相流体に適用可能な二相系 LBM について述べる。最後に、5 章で本稿をまとめる。なお、LBM 全般の最新の解説として、文献 [1, 2, 3, 4] が挙げられる。

2 格子ボルツマン法

本章では、非圧縮性粘性流体³に対する LBM について述べる。非圧縮性流体では、流速および圧力場は温度場と分離して求めることができる。すなわち、流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p は、連続の式ならびに Navier-Stokes 方程式によって求めることができ、一方、流体の温度 T は、流れ場 $\mathbf{u}$ における移流-拡散方程式によって決定される。そこで、まず、等温場の流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p を求める LBM について説明する。その後、温度場を求める LBM について述べる。なお、圧縮性流体を扱う Thermal LBM については、文献 [4] を参照されたい。

なお、以下の変数はすべて、代表長さ L 、代表粒子速さ c 、代表時間 $t_0 = L/U$ (U : 代表流れ速さ)、基準密度 ρ_0 、基準温度 T_0 を用いて無次元化した無次元変数である（詳細は Appendix A を参照）。

2.1 格子気体モデル

等温場の格子気体モデル⁴としては、幾つか提案されているが、本稿では、空間 2 次元の 9 速度モデルおよび空間 3 次元の 15 速度モデルを用いて説明する（図 2.1）。2 次元 9 速度モデルの粒子速度は、 $\mathbf{c}_i = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ で与えられる。また、3 次元 15 速度モデルの粒子速度は、 $\mathbf{c}_i = (0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ で与えられる。

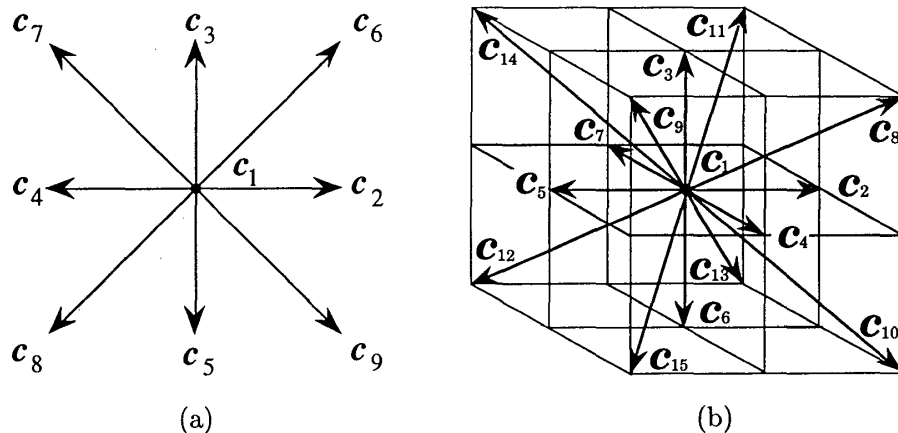


図 2.1 格子気体モデル：(a) 2 次元 9 速度モデル，(b) 3 次元 15 速度モデル。

³あとでわかるように、厳密には“非圧縮性”ではなく、“ほとんど非圧縮性”である流体を扱う。

⁴非熱流体モデル (athermal model) と呼ばれる。

2.2 基礎方程式

まず、座標 $\mathbf{x}$ および時刻 t における速度 $\mathbf{c}_i$ をもつ仮想粒子の速度分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ は、次の離散ボルツマン方程式 (discrete Boltzmann equation) に従う [5]。

$$\text{Sh} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\varepsilon} \Omega_i[f(\mathbf{x}, t)] \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

ここで、 $\text{Sh} = U/c$ はストローハル数、 ε はクヌーセン数に相当する小さなパラメーター、 $\Omega_i[\cdot]$ は仮想粒子の衝突による速度分布関数 f_i の増減を表す衝突演算子、また、 N ($=9$ or 15) は粒子速度の個数である。上式の左辺は仮想粒子の自由運動を、右辺は仮想粒子の衝突を表している。次に、物理空間を正方形 (2次元9速度モデルの場合) あるいは立方体 (3次元15速度モデルの場合) 格子 (格子間隔 Δx) に分割し、時間刻みを $\Delta t = \text{Sh} \Delta x$ (仮想粒子が隣りの格子点まで移動する時間⁵) として、(2.1) 式の左辺を1次差分で近似して整理すると、次式が得られる。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i[f(\mathbf{x}, t)] \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

ただし、 $\varepsilon = \Delta x$ としている。上式は、格子ボルツマン方程式 (lattice Boltzmann equation) と呼ばれ LBM の基礎式である。すなわち、この式を用いて速度分布関数 f_i の時間発展を陽的に追いかけることができる。さて、右辺の衝突項は複雑な形をしており、例えば、2次元9速度モデルで二体衝突に限定したときの静止粒子 ($i = 1$) については、次のようになる [5]。

$$\Omega_1 = M[(f_2 f_3 - f_1 f_6) + (f_3 f_4 - f_1 f_7) + (f_4 f_5 - f_1 f_8) + (f_2 f_5 - f_1 f_9)],$$

ここで、 M は静止粒子と衝突相手の粒子との相対速度差に比例する定数である。

巨視的変数である流体の密度 ρ および流速 $\mathbf{u}$ は、速度分布関数 f_i を用いて次式より求めることができる。

$$\rho = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i f_i. \quad (2.4)$$

また、圧力 p は、次式で定義される。

$$p = \frac{2}{D} \rho e, \quad (2.5)$$

ここで、 D は空間次元数、 e は内部エネルギーを表し、次式で求められる。

$$e = \frac{1}{2\rho} \sum_{i=1}^N (\mathbf{c}_i - \mathbf{u})^2 f_i. \quad (2.6)$$

なお、ここでは等温モデルを扱っているの、実際には内部エネルギーを求める必要はなく、 $e = D/6$ となり $p = \rho/3$ となることは2.5節で確かめられる。

⁵有次元 (* で表す) では $\Delta t^* U/L = \Delta x^* U/(Lc)$ 、すなわち、 $\Delta t^* = \Delta x^*/c$ となり、確かに粒子は Δt^* の間にちょうど隣りの格子点に移動する。

2.3 衝突項の取り扱い

一般のボルツマン方程式と同様に、格子ボルツマン方程式においても衝突項の取り扱いが重要なポイントとなる。LBM の発展の初期段階では衝突項に衝突散乱行列モデル [6, 7] を用いていたが、最近では衝突項に BGK モデル [9, 10] を用いるのが一般的になっている。

2.3.1 衝突散乱行列モデル

衝突散乱行列モデルでは、(2.2) 式の右辺の衝突項を次のように表す。

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} [f_j(\mathbf{x}, t) - f_j^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (2.7)$$

ここで、 A_{ij} は衝突散乱行列と呼ばれている。また、 f_j^{eq} は局所平衡分布関数である。上式は、(2.2) 式の右辺の衝突項を局所平衡分布のまわりで展開して線形化したもので、 $A_{ij} \equiv \partial \Omega_i(f^{\text{eq}}) / \partial f_j$ である⁶。行列 A_{ij} は、衝突による速度 $\mathbf{c}_i$ をもつ仮想粒子と速度 $\mathbf{c}_j$ をもつ仮想粒子との間の遷移確率から決まる行列である。行列 A_{ij} の固有値および固有ベクトルは、衝突によって保存される物理量（固有値 = 0）あるいは拡散する物理量（固有値 $\neq 0$ ）に対応している。等温モデルでは、保存される物理量は質量と運動量であり、拡散する物理量は応力テンソルなど（一般に、非物理量も含まれることに注意）である。一方、(2.2) 式の左辺は仮想粒子の自由運動を表していることから、質量および運動量の保存は満たされる。したがって、(2.2)、(2.3) および (2.4) 式から求めた密度 ρ および運動量 $\rho \mathbf{u}$ は完全に保存される。すなわち、LBM は質量および運動量の保存性に優れた計算方法である。

このモデルでは、行列 A_{ij} の応力テンソルに対応する固有値が流体の粘性を決めることになるが（粘性係数は固有値に反比例）、流体の粘性係数を小さくできない問題点がある。すなわち、本モデルでは、中程度（100 程度）のレイノルズ数の計算は可能であるが、高レイノルズ数の計算はできない。その理由は、仮想粒子の速度を N 個に制限しているため、衝突による運動量の拡散が小さいためである。そのため、粘性を決める固有値を修正する試みもなされてきた。その延長線上にあるのが、次に示す BGK モデルである。

なお、最近、衝突散乱行列モデルが見直され始めていることを付け加えておく。 f_i のモーメントからなる変数を考え、その変数に対して衝突散乱行列モデルを適用するものである。行列を対角化し、その固有値を適当に選ぶことにより、高レイノルズ数の計算が可能で安定性の優れた方法が提案されている [8]。

2.3.2 BGK モデル

(2.7) 式において、 $A_{ij} = -\frac{1}{\tau} \delta_{ij}$ と仮定すると（固有値が等しい対角行列にすると）、次のようになる。

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (2.8)$$

⁶ f_j^{eq} は一般に非線形なので、(2.7) 式の衝突項全体は非線形であることに注意。

ここで、 $\tau = O(1)$ は緩和時間と呼ばれるものである。上式は、一般のボルツマン方程式において BGK モデル [11] と呼ばれている衝突項モデルに対応している。

(2.2) および (2.8) 式より、BGK モデルを用いた LBM の基礎式は、

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (2.9)$$

となる。現在、LBM と呼ばれるほとんどの方法は、この BGK モデルを用いたものである。

2.4 局所平衡分布関数

(2.9) 式の右辺にある局所平衡分布関数 f_i^{eq} は、次式で与えられる [10]。

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \rho \left[1 + 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right], \quad (2.10)$$

ここで、2次元9速度モデルでは、 $E_1 = 4/9$, $E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 1/9$, $E_6 = E_7 = E_8 = E_9 = 1/36$ である。一方、3次元15速度モデルでは、 $E_1 = 2/9$, $E_2 = E_3 = \dots = E_7 = 1/9$, $E_8 = E_9 = \dots = E_{15} = 1/72$ である。

(2.10) 式の右辺の括弧の中は、一般の気体分子運動論の局所平衡解である Maxwell 分布 [12] において、流速 $\mathbf{u}$ が小さいとして展開し $\mathbf{u}^2$ まで残したものである。ただし、格子気体モデルに対しても Maxwell 分布が成立するかどうかは不明である。したがって、この展開形はあくまで仮定である。係数 E_i は、(2.3) および (2.4) 式ならびに Navier–Stokes 方程式の応力テンソルが成り立つように決められる [13, 14]。等温モデルでは、係数 E_i は定数となる。なお、一般に (2.10) 式がよく用いられているが、(2.10) 式の右辺の括弧の中の係数ならびに E_i は唯一決まるものではないことに注意が必要である。

2.5 流体力学的方程式の導出

(2.9), (2.10), (2.3) および (2.4) 式を用いて計算される巨視的変数 $\mathbf{u}$ および $p (= \rho/3)$ が非圧縮性流体の連続の式および Navier–Stokes 方程式を近似的に満足することは、曾根の漸近理論 (S 展開) [16] を用いて次のようにして確かめることができる [15]。一般には、Chapman–Enskog 展開を用いて確かめられることが多いが [2], S 展開を用いた方が理解しやすい。特に、S 展開では、巨視的物理量のオーダー比較がわかりやすい。なお、以下では 2次元9速度モデルを用いて説明する。3次元15速度モデルに対しても同様に確かめることができる。

一般にマッハ数 Ma , クヌーセン数 Kn およびレイノルズ数 Re の間には、 $Ma \sim Kn \times Re$ の関係が成り立つ。したがって、レイノルズ数が有限でクヌーセン数が小さい場合 (非圧縮性流体の流れに相当), マッハ数はクヌーセン数と同じく小さくなる。そこで、 f_i は静止平衡状態からのずれがクヌーセン数と同じオーダーになると考えて、 f_i を次のように展開する。

$$f_i = E_i (1 + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \varepsilon^3 f_i^{(3)} + \varepsilon^4 f_i^{(4)} + \dots), \quad (2.11)$$

ここで, $\varepsilon = O(\Delta x)$ は, τ に関する小さなパラメーターである。(2.11) 式の展開に対して, 巨視的変数は次のように展開される。

$$\rho = 1 + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \varepsilon^3 \rho^{(3)} + \dots, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{u}^{(3)} + \dots, \quad (2.13)$$

$$e = \frac{1}{3} + \varepsilon e^{(1)} + \varepsilon^2 e^{(2)} + \varepsilon^3 e^{(3)} + \dots, \quad (2.14)$$

$$p = \frac{1}{3} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots. \quad (2.15)$$

次に, (2.9) 式を (x, t) のまわりで $O[(\Delta x)^3]$ までテイラー展開し, 両辺を Δx で割ると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\text{Sh} \frac{\partial}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) f_i + \frac{1}{2} \Delta x \left(\text{Sh} \frac{\partial}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^2 f_i + \frac{1}{6} (\Delta x)^2 \left(c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^3 f_i \\ + O[(\Delta x)^3] = -\frac{1}{\tau \Delta x} (f_i - f_i^{\text{eq}}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで, 下付き添え字 $\alpha = x, y$ は, デカルト座標を表し総和規約に従うものとする⁷。

(2.11)–(2.15) の展開式を (2.16) 式に代入してオーダーをそろえて整理すると (穏やかな解を考えているので, $\partial f_i / \partial t = O(f_i)$, $\partial f_i / \partial x_\alpha = O(f_i)$ に注意),

$$f_i^{(1)} = \rho^{(1)} + 3c_{i\alpha} u_\alpha^{(1)}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} f_i^{(2)} = & \rho^{(2)} + 3\rho^{(1)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(1)} + 3c_{i\alpha} u_\alpha^{(2)} \\ & + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(1)} - \frac{3}{2} u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(1)} - \tau \frac{\Delta x}{\varepsilon} c_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_i^{(3)} = & \rho^{(3)} + 3\rho^{(2)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(1)} + 3\rho^{(1)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(2)} + 3c_{i\alpha} u_\alpha^{(3)} \\ & + \frac{9}{2} \rho^{(1)} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(1)} + 9c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} - \frac{3}{2} \rho^{(1)} u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(1)} - 3u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \\ & - \tau \frac{\Delta x}{\varepsilon} c_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(2)}}{\partial x_\alpha} - \tau \frac{\text{Sh} \Delta x}{\varepsilon^2} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} \right)^2 c_{i\alpha} c_{i\beta} \frac{\partial^2 f_i^{(1)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} f_i^{(4)} = & \rho^{(4)} + 3\rho^{(3)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(1)} + 3\rho^{(2)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(2)} + 3\rho^{(1)} c_{i\alpha} u_\alpha^{(3)} + 3c_{i\alpha} u_\alpha^{(4)} \\ & + \frac{9}{2} \rho^{(2)} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(1)} + 9\rho^{(1)} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} + 9c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(3)} + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha^{(2)} u_\beta^{(2)} \\ & - \frac{3}{2} \rho^{(2)} u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(1)} - 3\rho^{(2)} u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} - \frac{3}{2} u_\alpha^{(2)} u_\alpha^{(2)} - 3u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(3)} \\ & - \tau \frac{\Delta x}{\varepsilon} c_{i\alpha} \frac{\partial f_i^{(3)}}{\partial x_\alpha} - \tau \frac{\text{Sh} \Delta x}{\varepsilon^2} \frac{\partial f_i^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} \right)^2 c_{i\alpha} c_{i\beta} \frac{\partial^2 f_i^{(2)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ & - \tau \frac{\text{Sh}(\Delta x)^2}{\varepsilon^3} c_{i\alpha} \frac{\partial^2 f_i^{(1)}}{\partial t \partial x_\alpha} - \frac{1}{6} \tau \left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} \right)^3 c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} \frac{\partial^3 f_i^{(1)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁷以下, 下付き添え字 β, γ, δ についても同じである。また, 3次元15速度モデルでは, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = x, y, z$ である。

上式は未知数 $f_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) に対する連立方程式になっており、次のようにまとめることができる。

$$f_i^{(1)} - \sum_{j=1}^9 E_j f_j^{(1)} - 3c_{i\alpha} \sum_{j=1}^9 E_j c_{j\alpha} f_j^{(1)} = 0, \quad (2.21)$$

$$f_i^{(m)} - \sum_{j=1}^9 E_j f_j^{(m)} - 3c_{i\alpha} \sum_{j=1}^9 E_j c_{j\alpha} f_j^{(m)} = Ih_i^{(m)} \quad (m \geq 2), \quad (2.22)$$

ここで、非同次項 $Ih_i^{(m)}$ ($m \geq 2$) は、(2.18), (2.19) および (2.20) 式の右辺の第2段目以降の項からなっている。

さて、(2.21) 式は同次連立方程式でありその解は (2.17) 式で与えられる。このとき、(2.17) 式を (2.6) 式に代入すると、

$$e^{(1)} = 0, \quad (2.23)$$

が得られる。一方、(2.22) 式は非同次連立方程式であり、その係数は m によらず同じ値になっている。以下では、(2.22) 式の可解条件をこの係数行列をもとに調べてみることにする。まず、係数行列 A を具体的に書き出してみると、

$$A = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 20 & -4 & -4 & -4 & -4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -16 & 20 & -4 & 8 & -4 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ -16 & -4 & 20 & -4 & 8 & -4 & -4 & 2 & 2 \\ -16 & 8 & -4 & 20 & -4 & 2 & -4 & -4 & 2 \\ -16 & -4 & 8 & -4 & 20 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ -16 & -16 & -16 & 8 & 8 & 29 & -1 & 5 & -1 \\ -16 & 8 & -16 & -16 & 8 & -1 & 29 & -1 & 5 \\ -16 & 8 & 8 & -16 & -16 & 5 & -1 & 29 & -1 \\ -16 & -16 & 8 & 8 & -16 & -1 & 5 & -1 & 29 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

となる。

行列 A に対して、 $\text{rank}(A) = 6$ であり、同次方程式が3つの自明でない解 $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $[0, 1, 0, -1, 0, 1, -1, -1, 1]^T$ および $[0, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, -1]^T$ をもつことは容易に確かめることができる。なお、後者の2つの解は $c_{i\alpha}$ に対応している。また、行列 A の各行に E_i をかけると対称行列になることも容易に確かめることができる。ここで、線形代数の基本定理⁸[17]を用いると、(2.22) 式の可解条件は、

$$\sum_{i=1}^9 E_i Ih_i^{(m)} = 0 \quad (m \geq 2), \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^9 E_i c_{i\alpha} Ih_i^{(m)} = 0 \quad (m \geq 2), \quad (2.26)$$

となる。さて、 $m = 2$ から上の可解条件を調べてみよう（なお、このとき、Appendix B の公式が役立つ）。

⁸ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつのは、 $A^T \mathbf{y} = 0$ のすべての解 $\mathbf{y}$ に $\mathbf{b}$ が直交しているときかつそのときに限る。

まず, $m = 2$ の可解条件から,

$$\frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.28)$$

が得られる。このとき, (2.18) 式を (2.6) 式に代入すると,

$$e^{(2)} = 0, \quad (2.29)$$

が得られる。次に, $m = 3$ の可解条件から,

$$\frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial t} + u_\beta^{(1)} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta^2}, \quad (2.31)$$

が得られる。このとき, (2.19) 式を (2.6) 式に代入すると,

$$e^{(3)} = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\alpha}, \quad (2.32)$$

が得られる。最後に, $m = 4$ の可解条件から,

$$\frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho^{(1)} u_\alpha^{(2)} + \rho^{(2)} u_\alpha^{(1)} + u_\alpha^{(3)}) = 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(1)} u_\alpha^{(1)} + u_\alpha^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho^{(1)} u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(1)} + u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} + u_\beta^{(1)} u_\alpha^{(2)}) = \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial \rho^{(3)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u_\beta^{(2)}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\beta} \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

が得られる。

さて, (2.28) 式から $\rho^{(1)} = \text{定数}$ (場所によらない), になることがわかる。したがって, もし $\rho^{(1)}$ に対する境界条件が時間に無関係だとすると, 結局, $\rho^{(1)}$ は時間にも空間にも依存しない定数となる。そこで, この定数を基準密度 ρ_0 に組み入れると, 一般性を失うことなく $\rho^{(1)} = 0$ とすることができる。そうすると, (2.27)–(2.34) 式の中で, $u_\alpha^{(1)}$ および $p^{(2)}$ に対する支配方程式は,

$$\frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial t} + u_\beta^{(1)} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta^2}, \quad (2.36)$$

となり, $u_\alpha^{(2)}$ および $p^{(3)}$ に対する支配方程式は,

$$\frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\text{Sh}}{\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial t} + u_\beta^{(1)} \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\beta} + u_\beta^{(2)} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p^{(3)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\alpha^{(2)}}{\partial x_\beta^2}, \quad (2.38)$$

となる。(2.35) 式 $\times \varepsilon$ + (2.37) 式 $\times \varepsilon^2$ および (2.36) 式 $\times \varepsilon^2$ + (2.38) 式 $\times \varepsilon^3$ を考えると,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}) = 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}) + \varepsilon u_\beta^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}) + \varepsilon^2 u_\beta^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varepsilon u_\alpha^{(1)}) \\ = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)}) + \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta x \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} (\varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

となる。また,

$$e = \frac{1}{3} + O(\varepsilon^4), \quad (2.41)$$

もわかる。すなわち, $O(\varepsilon^3)$ までは等温であることがわかる。

以上より, $\varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}$ および $\varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)}$ は, 等温場における非圧縮性粘性流体の連続の式 (2.39) および Navier–Stokes 方程式 (2.40) を満たすことがわかる。また, 動粘性係数 ν は,

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad (2.42)$$

となることもわかる。

以上まとめると, (2.9), (2.10), (2.3) および (2.4) 式を用いて, 等温場の非圧縮性粘性流体の流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p を相対誤差 $= O[(\Delta x)^2]$ で計算できることがわかった⁹。

2.6 熱移動を伴う流れ

これまででは, 等温の流れ場を扱ってきたが, 熱移動を伴う流れも LBM で扱うことができる。ただし, 上述のように, f_i だけでは等温場しか表現できないので, 流体の温度 $T(\mathbf{x}, t)$ を表現する新しい速度分布関数 $g_i(\mathbf{x}, t)$ を導入する必要がある¹⁰。そうして, 二つの速度分布関数 f_i と g_i を連立させて同時に計算して行けばよい。

速度分布関数 $g_i(\mathbf{x}, t)$ の時間発展は, (2.9) 式と同様に次式で与えられる。

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_g} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.43)$$

温度 T は速度分布関数 g_i を用いて次式で求めることができる。

$$T = \sum_{i=1}^N g_i. \quad (2.44)$$

なお, 平衡分布関数 g_i^{eq} は次式のようなになる [18]。

$$g_i^{\text{eq}} = E_i T \left[1 + \frac{3}{2} c_{i\gamma} (u_\gamma + u_{T\gamma}) \right], \quad (2.45)$$

⁹(2.33) 式からわかるように, 巨視的変数 $u_\alpha^{(3)}$ には圧縮性の影響 $\partial \rho^{(2)} / \partial t \neq 0$ が現れる。すなわち, 圧縮性の影響は相対誤差 $= O[(\Delta x)^3]$ から現れる。

¹⁰ここでの温度は, 流れによって移動する単なるスカラー量として考えている。

ここで,

$$u_{T\gamma} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N c_{i\gamma} g_i, \quad (2.46)$$

である。

2.5 節と同様に, (2.43)–(2.46) 式に S 展開を適用すると, 可解条件から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial}{\partial t} (T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}) + (\varepsilon u_{\gamma}^{(1)} + \varepsilon^2 u_{\gamma}^{(2)}) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} (T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}) \\ = \frac{2}{3} \left(\tau_g - \frac{1}{4} \right) \Delta x \frac{\partial^2}{\partial x_{\gamma}^2} (T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

上式は, 温度 T の移流–拡散方程式を表しており, 温度伝導係数 α は,

$$\alpha = \frac{2}{3} \left(\tau_g - \frac{1}{4} \right) \Delta x, \quad (2.48)$$

となることがわかる。また, S 展開から熱流束 q_{γ} が次式で求めることができることもわかる。

$$q_{\gamma} = -k \frac{\partial T}{\partial x_{\gamma}} = T(u_{T\gamma} - u_{\gamma}), \quad (2.49)$$

ここで, k は熱伝導係数であり, 次式で与えられる。

$$k = \frac{2}{3} \tau_g \Delta x. \quad (2.50)$$

2.7 境界条件

LBM では, 境界上で境界から領域に入る方向の粒子速度の速度分布関数 f_i を規定する必要がある。すなわち, 境界上の流体側に向かう法線ベクトルを n_{α} とすると, $c_{i\alpha} n_{\alpha} > 0$ となる f_i を規定しなければならない。例えば, 図 2.1(a) の 2 次元 9 速度モデルで $y = 0$ の境界上 (流体は $y > 0$ にあるとする) では, f_3 , f_6 および f_7 を決める必要がある。

以下では, 簡単のため 2 次元 9 速度モデルを用いて説明する。なお, 3 次元 15 速度モデルについても同様にすればよい。

2.7.1 すべりなし壁

(1) bounce-back 条件

すべりなし壁の境界条件によく用いられているのが, bounce-back 条件である。bounce-back 条件では, 次のように与える。

$$\begin{cases} f_3 = f_5, \\ f_6 = f_8, \\ f_7 = f_9. \end{cases} \quad (2.51)$$

bounce-back 条件では, 壁に垂直な流体速度は 0 になるが, 壁に沿う流体速度は一般に 0 にならず, すべり流速が生じる。また, 壁が動いている場合には工夫が必要である [4]。

(2) counter-slip 条件

筆者らは、逆すべり速度を用いた新しい境界条件を提案している [19]。まず、未知の速度分布関数 f_3 , f_6 および f_7 を (2.10) 式を参考にして次式のように仮定する。

$$f_3 = \frac{1}{9}\rho' \left\{ 1 + 3u_{wy} + \frac{9}{2}u_{wy}^2 - \frac{3}{2}[(u_{wx} + u'_x)^2 + u_{wy}^2] \right\}, \quad (2.52)$$

$$f_6 = \frac{1}{36}\rho' \left\{ 1 + 3(u_{wx} + u'_x + u_{wy}) + \frac{9}{2}(u_{wx} + u'_x + u_{wy})^2 - \frac{3}{2}[(u_{wx} + u'_x)^2 + u_{wy}^2] \right\}, \quad (2.53)$$

$$f_7 = \frac{1}{36}\rho' \left\{ 1 + 3(-u_{wx} - u'_x + u_{wy}) + \frac{9}{2}(-u_{wx} - u'_x + u_{wy})^2 - \frac{3}{2}[(u_{wx} + u'_x)^2 + u_{wy}^2] \right\}, \quad (2.54)$$

ここで、 $u_{w\alpha}$ は壁の移動速度、 ρ' および u'_x は以下で決定される未知パラメーターである。上式は、壁から流体側に出て行く速度分布関数が壁に沿う方向に u'_x の逆すべり速度を持った局所平衡分布 (2.10) 式で決まると仮定していることを意味している。なお、固体壁上の密度 ρ_w も未知量である。したがって、合計 3 つの未知量 (ρ' , u'_x および ρ_w) があるが、これらの未知量は壁上で成立する (2.3) および (2.4) 式の 3 つの式から求めることができる。結果は次の通りになる。

$$\rho_w = \frac{1}{1 - u_{wy}} [f_1 + f_2 + f_4 + 2(f_5 + f_8 + f_9)], \quad (2.55)$$

$$\rho' = 6 \frac{\rho_w u_{wy} + (f_5 + f_8 + f_9)}{1 + 3u_{wy} + 3u_{wy}^2}, \quad (2.56)$$

$$u' = \frac{1}{1 + 3u_{wy}} \left[6 \frac{\rho_w u_{wx} - (f_2 - f_4 + f_9 - f_8)}{\rho'} - u_{wx} - 3u_{wx}u_{wy} \right]. \quad (2.57)$$

2.7.2 すべり壁

壁面上で自由にすべる場合には、次の境界条件が用いられる。

$$\begin{cases} f_3 = f_5, \\ f_6 = f_9, \\ f_7 = f_8. \end{cases} \quad (2.58)$$

2.7.3 圧力差のある入口および出口

ポアズイユ流れに代表されるように、計算領域の入口 ($x = 0$) と出口 ($x = L$) の間に圧力差 Δp があるが、入口および出口の対応点の流速 u が等しい条件の計算をする場合を考える。この場合、局所平衡分布関数 (2.10) 式の形を参考にして、入口での未知の速度分

布関数 $f_2(0)$, $f_6(0)$ および $f_9(0)$ を次のように仮定する [20]。

$$\begin{cases} f_2(0) = f_2(L) + C, \\ f_6(0) = f_6(L) + \frac{1}{4}C, \\ f_9(0) = f_9(L) + \frac{1}{4}C, \end{cases} \quad (2.59)$$

ここで, C は以下で決まる定数である。一方, 出口での未知の速度分布関数 $f_4(L)$, $f_7(L)$ および $f_8(L)$ も同様に次のように仮定する。

$$\begin{cases} f_4(L) = f_4(0) - C, \\ f_7(L) = f_7(0) - \frac{1}{4}C, \\ f_8(L) = f_8(0) - \frac{1}{4}C. \end{cases} \quad (2.60)$$

最後に, 定数 C を入口と出口との圧力差が Δp になるように (2.3) 式を用いて決めると,

$$C = \Delta p - \frac{1}{3} [f_1(0) - f_1(L) + f_3(0) - f_3(L) + f_5(0) - f_5(L)], \quad (2.61)$$

となる。

2.7.4 周期境界条件

計算領域の左面 ($x = 0$) と右面 ($x = L$) とに周期境界条件を課す場合には, (2.59) および (2.60) 式で $C = 0$ とすればよい。

2.7.5 等温壁

$y = 0$ 上にある等温壁 ($T = T_w$) の場合には, 次のように考える。ただし, 壁は静止しているものとする。まず, 未知の速度分布関数 g_3 , g_6 および g_7 を次のように仮定する [18]。

$$g_3 = \frac{1}{9}T', \quad (2.62)$$

$$g_6 = \frac{1}{36}T' \left(1 + \frac{3}{2}u'_{Tx} \right), \quad (2.63)$$

$$g_7 = \frac{1}{36}T' \left(1 - \frac{3}{2}u'_{Tx} \right), \quad (2.64)$$

ここで, 未知パラメータ T' および u'_{Tx} は, 壁面上で $T = T_w$ および $q_x = 0$ が満足されるように決められる。結果は次の通りになる。

$$T' = 6(T_w - g_1 - g_2 - g_4 - g_5 - g_8 - g_9), \quad (2.65)$$

$$u'_{Tx} = -\frac{12}{T'}(g_2 - g_4 - g_8 + g_9). \quad (2.66)$$

2.8 数値計算例

2.8.1 多孔質内流れ

まず, 複雑な境界をもつ流れ場への適用例として, 図 2.2 に示す 3 次元多孔質流れへの計算例を示す [21, 22]。全領域を $73 \times 69 \times 69$ 個の立方体格子に分割し, 領域の内部には相当直

径 $D_p = 29.4\Delta x$ の球を表す立方体格子の集合体を 9 個置いた。なお、空隙率 ϵ は 0.654 である。入口と出口との間の圧力差 Δp および粘性係数 μ を変化させることにより、レイノルズ数 $Re = \bar{\rho}_{in} \bar{u}_{in} D_p / \mu$ が $0.842 \leq Re \leq 159$ の範囲で計算した。ここで、 $\bar{\rho}_{in}$ および $\bar{u}_{in}$ は、それぞれ入口において時間および空間平均した密度および流速である。なお、領域の側面にはすべり壁条件を用いた。また、内部の物体上にはすべりなし壁条件 (counter-slip 条件) を用いた。

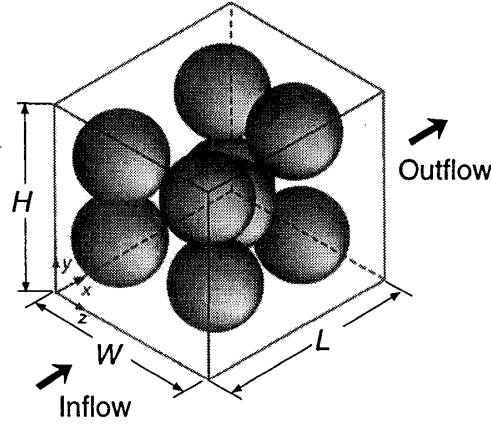


図 2.2 3次元多孔質構造モデル.

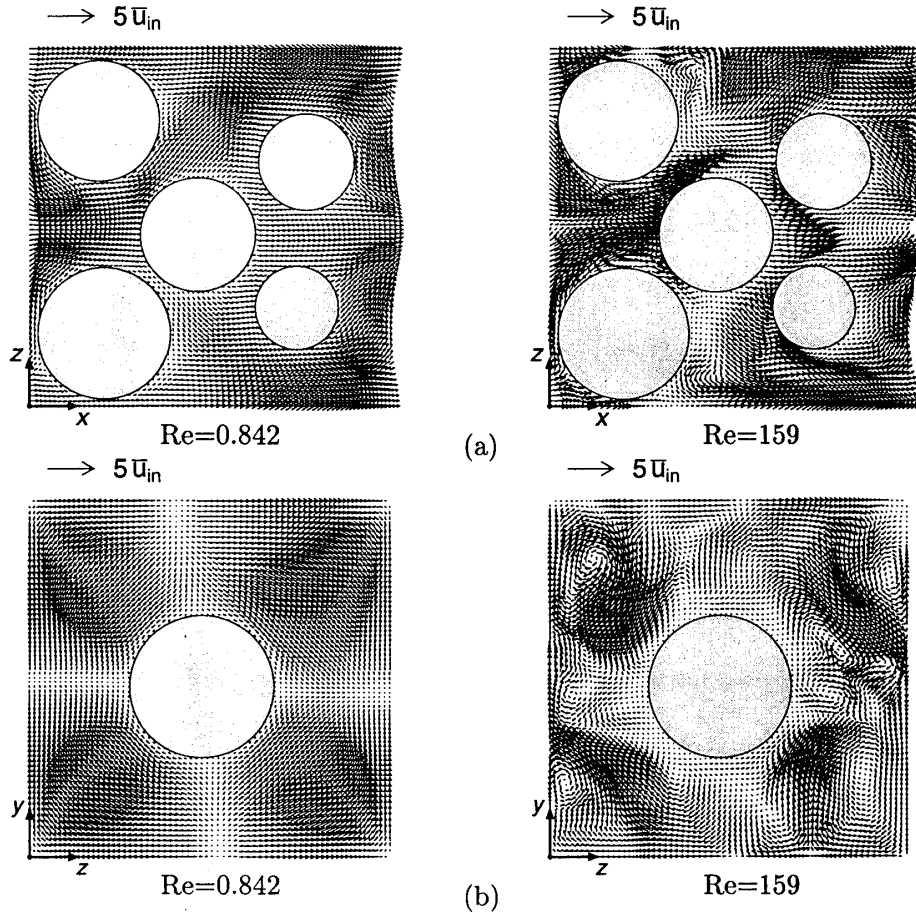


図 2.3 多孔質内の流速ベクトル：(a) $y/H = 0.62$, (b) $x/L = 0.51$.

計算結果の一例を図 2.3 に示す。(a) は $y/H = 0.62$ の, (b) は $x/L = 0.51$ の断面の結果を示している。低レイノルズ数 ($Re = 0.842$) の結果では, 流体が内部の物体を迂回し, 空間の広い部分に流れ込む様子がわかる。一方, 高レイノルズ数 ($Re = 159$) では, 流れのはく離が生じ物体の後方に様々な大きさの渦が形成されている。特に, 図 2.3(b) の右図は, 左図の結果とは全く異なった複雑な流れ場になっていることがわかる。また, 高レイノルズ数では, 物体後方の渦の位置および大きさが時間的に変動する結果が得られた。

次に, 圧力差とレイノルズ数との関係について, 本計算結果と既存の実験式とを比較したものを図 2.4 に示す。図 2.4 で, 横軸は $Re/(1-\epsilon)$, 縦軸は圧力差を無次元化した量を表している。また, 図中の破線および実線は, それぞれ Blake-Kozeny[23] および Ergun[24] による実験式を表している。図より, 本計算結果の圧力差は, 低レイノルズ数から高レイノルズ数まで既存の実験式とよく一致している。

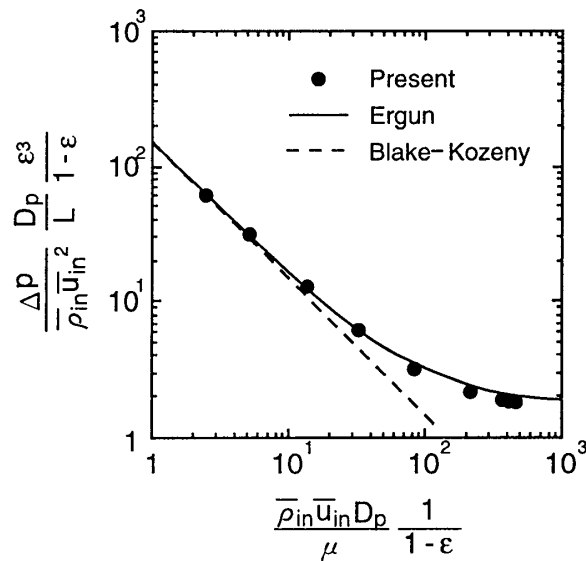


図 2.4 圧力差とレイノルズ数との関係.

2.8.2 レイリー・ベナール対流

次に, 熱輸送を伴う流れの代表例であるレイリー・ベナール対流の計算結果を示す [18]。高さ H , 幅 $2H$ の長方形領域内の流体を考え, 下面の温度 T_L が上面の温度 T_U より高く保たれており ($T_L > T_U$), 左右の面は周期境界条件が満たされているとする。ただし, 重力の効果には, Boussinesq 近似を用いる。すなわち, 次の項 $3E_i g \beta (T - T^*) c_{iy} \Delta x$ を (2.9) 式の右辺に加える。ここで, g は重力加速度, β は体膨張係数, $T^* = T_L - (T_L - T_U)y/H$ は基準温度である。領域は 100×50 の正方形格子に分割した。さて, 本問題の無次元パラメーターは, 次式で定義されるプラントル数 Pr およびレイリー数 Ra である。

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (2.67)$$

$$Ra = \frac{g \beta (T_L - T_U) H^3}{\nu^2} Pr. \quad (2.68)$$

プラントル数を $Pr = 0.71$ とし、レイリー数が $1650 \leq Ra \leq 100000$ の範囲で計算した。まず、対流が生じる臨界レイリー数 Ra_c を求めた。 $Ra = 1700$ 付近で初期の温度場に微小擾乱を加え、その後、流速の擾乱が減衰あるいは増加する成長率を求め、成長率が 0 になるレイリー数を臨界レイリー数 Ra_c とした。計算結果では $Ra_c = 1705.47$ となり線形安定性理論による理論値 (1707.76) と 0.134% の誤差で一致した。次に、高レイリー数の計算を行い、次式で定義されるヌッセルト数 Nu について既存の結果と比較し、計算精度を検証した。

$$Nu = 1 + \frac{\langle u_y T \rangle}{\alpha(T_L - T_U)/H}, \quad (2.69)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は領域全体についての平均を表している。図 2.5 に流速ベクトルおよび等温線の計算結果を示す。レイリー数が大きくになるにしたがって、熱対流が大きくなり、また、上下面近傍の温度勾配が大きくなり熱輸送が促進されていることがわかる。次に、ヌッセルト数とレイリー数との関係を図 2.6 に示す。本計算結果は既存の結果 [25, 26] とよく一致しており、LBM が十分な計算精度をもっていることがわかる。

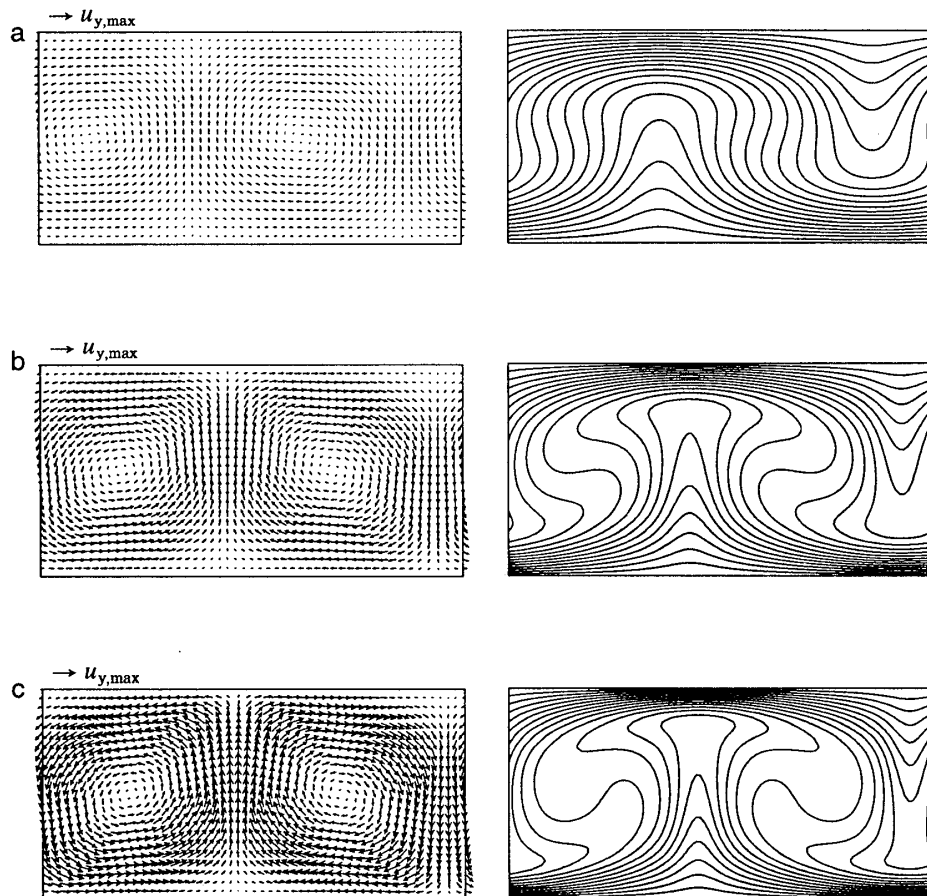


図 2.5 流速ベクトルおよび等温線：(a) $Ra=5000$ ，(b) $Ra=20000$ ，(c) $Ra=50000$ 。なお， $u_{y,max}$ は $Ra=50000$ の場合の y 方向の最大流速である。

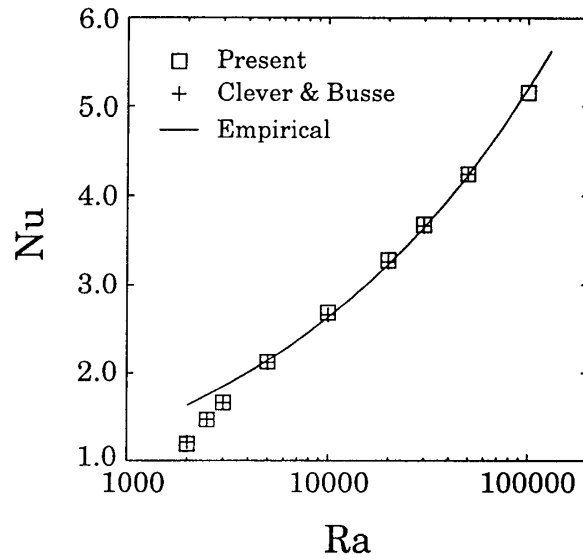


図 2.6 ヌッセルト数とレイリー数との関係.

3 Lattice Kinetic スキーム

2章で述べたように, LBM は熱移動を伴う非圧縮性粘性流体の流れ場の新しいスキームとして有望な手法であることがわかった。しかしながら, 速度分布関数を用いるため, 通常の流体解析コードに比べてメモリーを多く使うことが短所であると言える。この短所を解決する一つの方法が, 次に説明する Lattice Kinetic スキームである [27]。

3.1 基礎式

(2.9) 式で $\tau = 1$ とし, $x \rightarrow x - c_i \Delta x$ と置き換えると,

$$f_i(x, t + \Delta t) = f_i^{\text{eq}}(x - c_i \Delta x, t), \quad (3.1)$$

となる。また, 巨視的変数は, 次式で計算できる。

$$\rho(x, t + \Delta t) = \sum_{i=1}^N f_i^{\text{eq}}(x - c_i \Delta x, t), \quad (3.2)$$

$$\rho(x, t + \Delta t)u(x, t + \Delta t) = \sum_{i=1}^N c_i f_i^{\text{eq}}(x - c_i \Delta x, t). \quad (3.3)$$

ところが, (2.10) 式からわかるように, (3.2) および (3.3) 式の右辺の局所平衡分布関数 f_i^{eq} は, c_i と巨視的変数 ρ および u のみから決まる。したがって, (3.2) および (3.3) 式を用いれば速度分布関数 f_i を求めることなく巨視的変数 ρ および u を求めることができる。また, 圧力は $p = \rho/3$ で求めることができる。ただし, このとき動粘性係数 ν は, (2.42) 式

より

$$\nu = \frac{1}{6}\Delta x, \quad (3.4)$$

となる。一見、問題はなさそうだが、このままでは、本スキームで高いレイノルズ数を効率よく計算することができない。例えば、間隔 H の平行壁面間の 2 次元ポアズイユ流れを本スキームで計算することを考えてみる。壁面間を 50 分割し、流速を $u = 0.1$ とすると、 $\text{Re} = uH/\nu = 30$ となり、レイノルズ数はそれ程大きくない。もちろん、分割数を多くすればレイノルズ数を大きくできるが、計算効率は非常に悪くなる。LBM では、(2.42) 式からわかるように、 τ を 0.5 に近づけることにより、分割数を変えずに動粘性係数 ν を小さくすることができる。

そこで、Lattice Kinetic スキームでも分割数を変えずに動粘性係数を変化させる方法を考える。2 章で見たように、LBM で変化できるものは τ と f_i^{eq} だけである。Lattice Kinetic スキームでは $\tau = 1$ としているので、あと変更できるのは f_i^{eq} だけである。一般の気体分子運動論では、Navier–Stokes 方程式に帰着できる局所平衡分布関数の一つとして、Chapman–Enskog タイプの速度分布関数がよく知られている [28, 29, 30]。そこで、次のような Chapman–Enskog タイプの局所平衡分布関数を考える。

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \rho \left[1 + 3c_{i\gamma}u_\gamma + \frac{9}{2}c_{i\gamma}c_{i\delta}u_\gamma u_\delta - \frac{3}{2}u_\gamma u_\gamma + A\Delta x \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\delta} \right) c_{i\gamma}c_{i\delta} \right], \quad (3.5)$$

ここで、 $A = O(1)$ は粘性係数を決めるパラメーターである。

一方、流体の温度 T に関しても、同様に取り扱うことができる。すなわち、速度分布関数 g_i を用いずに、以下のようにして T を求めることができる。

$$T(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_{i=1}^N g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t), \quad (3.6)$$

ここで、局所平衡分布関数 g_i^{eq} には次のような関数を考える。

$$g_i^{\text{eq}} = E_i T \left[1 + \frac{3}{2}c_{i\gamma}(u_\gamma + u_{T\gamma}) \right] + E_i B \Delta x c_{i\gamma} \frac{\partial T}{\partial x_\gamma}, \quad (3.7)$$

ここで、

$$u_{T\gamma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=1}^N c_{i\gamma} g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t - \Delta t), \quad (3.8)$$

である。また、 $B = O(1)$ は温度伝導係数を決めるパラメーターである。なお、(3.5) および (3.7) 式の中にある 1 階微分は、例えば、次式で近似することができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \approx \frac{1}{6\Delta x} \sum_{i=1}^9 c_{i\gamma} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \approx \frac{1}{10\Delta x} \sum_{i=1}^{15} c_{i\gamma} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x). \quad (3.10)$$

さて、詳細は省略するが、(3.2)、(3.3) および (3.6) 式に S 展開を適用すると、2 章と同様に非圧縮性流体に対する連続の式、Navier–Stokes 方程式および温度の移流–拡散方程式

が得られる。また、そのとき、動粘性係数 ν 、温度伝導係数 α および熱伝導係数 k は、次のようになることがわかる。

$$\nu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9}A \right) \Delta x, \quad (3.11)$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}B \right) \Delta x, \quad (3.12)$$

$$k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}B \right) \Delta x. \quad (3.13)$$

したがって、 A および B を適当に選ぶことによって、レイノルズ数 $Re = uL/\nu$ ならびにプラントル数 $Pr = \nu/\alpha$ を任意に変化させることができる。

なお、筆者らの予備計算結果によると、Lattice Kinetic スキームは、LBM に比べて数値安定性が良く、高レイノルズ数の計算に適していることがわかっている。

3.2 境界条件

Lattice Kinetic スキームでは、巨視的変数だけを用いて計算できるので、巨視的変数 u 、 p および T について境界条件が必要である。したがって、通常の方法（差分法や有限要素法など）で用いられる境界条件をそのまま用いることができる。ただし、(3.5) および (3.7) 式からわかるように、境界上で u および T の 1 階微分を求める必要がある。これには、例えば、2 次精度の片側差分を用いて計算すればよい。

3.3 数値計算例

Lattice Kinetic スキームの計算精度を調べるために、図 3.1 に示す 2 次元正方形領域内の熱対流問題を計算した。上下の壁は断熱とし、左右の壁はそれぞれ T_c および T_h に保たれてる ($T_c < T_h$)。ただし、重力の効果には、Boussinesq 近似を用いる。すなわち、2.8.2 節と同様に次の項 $3E_i g \beta (T - T^*) c_{iy} \Delta x$ を (3.5) 式に加える。ここで、基準温度は $T^* = (T_c + T_h)/2$ とした。さて、本問題の無次元パラメーターも、(2.67) および (2.68) 式で定義されるプラントル数 Pr およびレイリー数 Ra である。ただし、(2.68) 式で $(T_L - T_U) \rightarrow (T_h - T_c)$ とする。

$Ra = 10^5$ および $Pr = 0.1$ の場合の計算結果を図 3.2 に示す。計算条件は、分割数 = 200×200 、 $T_c = 1$ 、 $T_h = 2$ 、 $A = 0.74598$ 、 $B = 0.73658$ および $g\beta\Delta x = 10^{-7}$ である。図より、反時計回りの熱対流が生じ、温度場が流れ場の影響を受けて等温線が曲がっていることがわかる。計算精度は、次式で定義される平均ヌッセルト数について既存の計算結果と比較して検証した。

$$Nu = \frac{Q}{Q_c}, \quad (3.14)$$

ここで、 Q は領域内の実際の熱流束、 Q_c は流れのない場合の熱伝導だけによる熱流束を表す。本計算結果では $Nu = 3.95$ となり、Ferziger & Perić[31] による差分法を用いた結

果 $Nu = 3.9248$ と比べて 1% 以内で一致している。また、流速ベクトルおよび等温線図とも彼らの結果とよく一致している。

次に、図 3.3 に $Ra = 10^5$ および $Pr = 0.71$ の場合の計算結果を示す。計算条件は、分割数 $= 160 \times 160$, $T_c = 1$, $T_h = 2$, $A = 0.67326$, $B = 0.71397$ および $g\beta\Delta x = 10^{-5}$ である。この場合には、二つの反時計回りの熱対流が生じ、温度場も流れ場の影響を受けていることがわかる。また、等温線図を注意深く見ると、左上および右下の角部の近傍の温度勾配が図 3.2(b) と比較して大きくなっていることがわかる。したがって、 $Pr = 0.71$ の場合の方が熱流束が大きくなることが予測される。実際、この場合の平均ヌッセルト数は $Nu = 4.60$ となり、 $Pr = 0.1$ の場合に比べて大きくなる。なお、本計算結果の Nu は、Hortmann et al.[32] による有限体積法を用いた結果 $Nu = 4.5275$ と比較して 1% 以内で一致している。

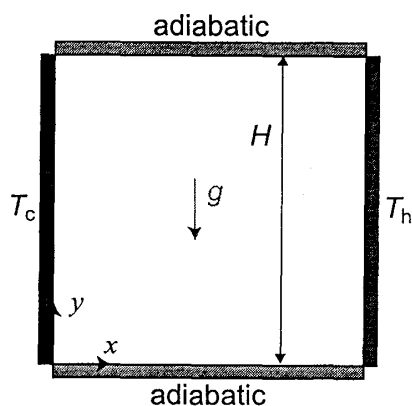


図 3.1 熱対流問題.

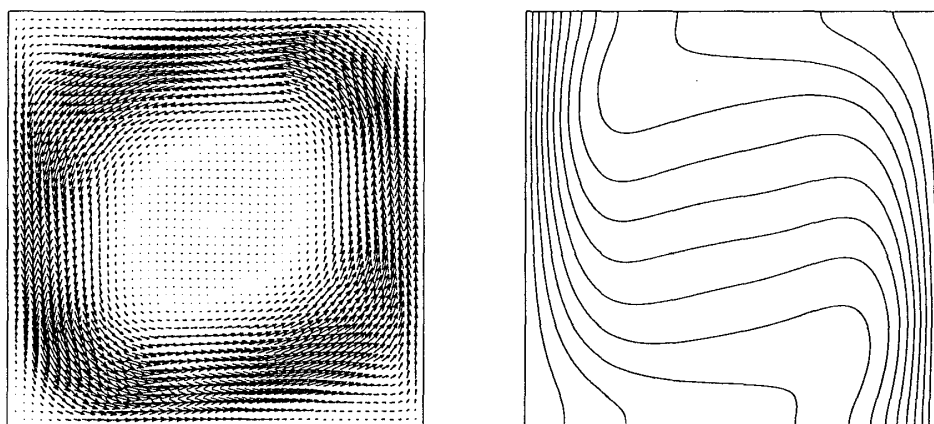


図 3.2 流速ベクトルおよび等温線 ($Ra = 10^5$, $Pr = 0.1$) .

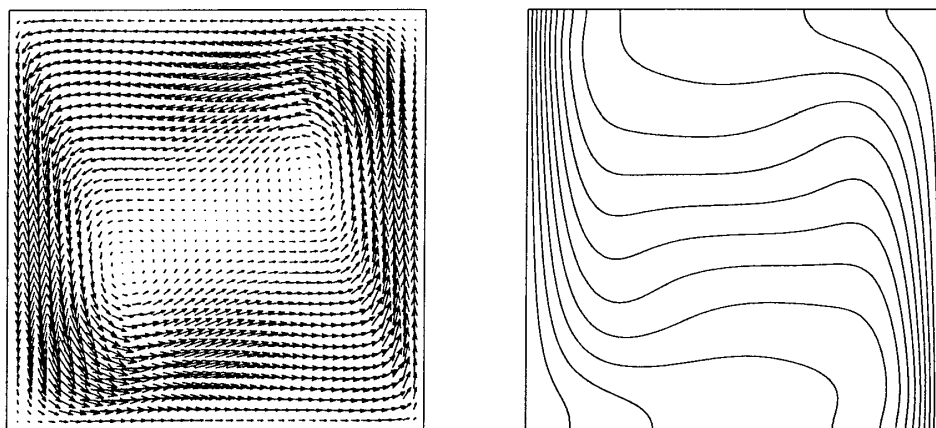


図 3.3 流速ベクトルおよび等温線 ($Ra = 10^5$, $Pr = 0.71$) .

4 二相系格子ボルツマン法

これまで単相流を扱ってきたが，LBM は液液や気液二相流体にも適用できる。二相流の特徴は，界面が存在することおよびその界面が自由に変形することである。したがって，二相流の数値解析の難しさは，シャープな界面を捉えること，界面を時々刻々追跡しなければならないこと，各相の質量保存を保証する必要があることなどである。二相系 LBM の特徴は，界面形状の時間変化を陽に追跡する必要がなく，また，質量保存性に優れていることである。

二相系 LBM は，現在，次の 3 つのモデルに大別される。

- Gunstensen & Rothman モデル [33]
- Shan & Chen モデル [34]
- Swift–Osborne–Yeomans モデル [35, 36]

何れのモデルも，界面の非平衡系熱力学との対応では一長一短があり，完成されたモデルとは言い難い。現在，Boltzmann–Enskog 方程式に基づいた新しいモデルの開発も行われている [38]。

本章では，Swift らのモデルを用いた筆者らの研究結果を紹介する。なお，以下では，3 次元 15 速度モデルを用いて説明する。2 次元 9 速度モデルを用いた定式化は，Appendix C を参照されたい。

4.1 Swift–Osborne–Yeomans モデル

二相（秩序パラメーター ϕ が ϕ_1 および ϕ_2 に分かれているとする¹¹⁾）が共存する系の自由エネルギー Ψ は、次のように表すことができる。

$$\Psi[\phi] = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\kappa}{2} |\nabla \phi|^2 + \psi(T, \phi) \right], \quad (4.1)$$

ここで、第1項は界面がもつ自由エネルギーを、第2項はバルクがもつ自由エネルギーを表している。なお、 κ は界面張力に関するパラメーターである。バルクの自由エネルギー ψ は、例えば、ファン・デル・ワールス流体では、

$$\psi(T, \phi) = \phi T \ln \left(\frac{\phi}{1 - b\phi} \right) - a\phi^2, \quad (4.2)$$

となる。上式で T, a, b は、 ϕ の関数形を決める任意の定数である。さて、非平衡系の熱力学によると、 $\delta \Psi / \delta \phi$ は化学ポテンシャルを表しており、系全体は化学ポテンシャルが同じ値になる ϕ_1 および ϕ_2 の二相に分離し、その界面の形状は、(4.1) 式で得られる系の自由エネルギーが最小となるように自律的に変形して決まる。このとき、二相系の圧力テンソルは次のようになる [37]。

$$P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} + \kappa \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}, \quad (4.3)$$

ここで、

$$p = \phi \frac{\delta \Psi}{\delta \phi} - \Psi = p_0 - \kappa \phi \nabla^2 \phi - \frac{\kappa}{2} |\nabla \phi|^2, \quad (4.4)$$

また、

$$p_0 = \phi \psi'(\phi) - \psi(\phi) = \phi T \frac{1}{1 - b\phi} - a\phi^2, \quad (4.5)$$

である。

さて、上記の二相系を LBM を用いて定式化してみよう。速度分布関数 f_i の時間発展式は、次式のようになる。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_f} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (4.6)$$

流体の密度 ϕ および流速 $\mathbf{u}$ は、次式で定義される。

$$\phi = \sum_{i=1}^{15} f_i, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^{15} \mathbf{c}_i f_i. \quad (4.8)$$

(4.7) および (4.8) 式を満足し、また、(4.3) 式で与えられる圧力テンソルが得られるように局所平衡分布関数 f_i^{eq} を決めると、その一つとして次式が得られる。

$$\begin{aligned} f_i^{\text{eq}} = & H_i \phi + F_i \left(p_0 - \kappa_f \phi \nabla^2 \phi - \frac{\kappa_f}{6} |\nabla \phi|^2 \right) \\ & + E_i \phi \left(3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} \right) + E_i \kappa_f G_{\alpha\beta}^\phi c_{i\alpha} c_{i\beta}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹¹⁾例えば、 ϕ を密度 ρ と考えればよい。

ここで,

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 2/9, \quad E_2 = E_3 = \cdots = E_7 = 1/9, \quad E_8 = E_9 = \cdots = E_{15} = 1/72, \\ H_1 &= 1, \quad H_2 = H_3 = \cdots = H_{15} = 0, \\ F_1 &= -7/3, \quad F_i = 3E_i \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, 15, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$p_0 = \phi T \frac{1}{1 - b\phi} - a\phi^2, \quad (4.11)$$

$$G_{\alpha\beta}^\phi = \frac{9}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} - \frac{3}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.12)$$

である。なお、 $\kappa_f = O[(\Delta x)^2]$ は界面の厚さおよび界面張力を決めるパラメーターである。また、(4.9) および (4.12) 式中の $\nabla \phi$ は (3.10) 式で、 $\nabla^2 \phi$ は次式で近似できる。

$$\nabla^2 \phi \approx \frac{1}{5\Delta x} \left[\sum_{i=1}^{15} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x) - 14\phi(\mathbf{x}) \right]. \quad (4.13)$$

上記のように、局所平衡分布関数は少し複雑な形をしているが、速度分布関数 f_i の時間発展は (4.6) 式で与えられるように単純であり、アルゴリズムは非常に簡単になる。また、各相の質量保存性に優れており、長時間計算を続けても界面がぼやけたり体積が変化したりしない。しかし、Swift らの二相系 LBM では、臨界点近傍の状態を扱っていることから二相間の移動の速さ（移動度は τ_f の大きさおよび自由エネルギーの関数形 (4.2) 式に依存する）が大きく、たとえば、大小の多数のドメイン（一方の相の領域）が存在する場合、ドメイン同士の合一がなくても小さなドメインが消滅して大きなドメインが成長する。そのため、臨界点から離れた一般の気液や液液二相を取り扱う場合には不具合が生じる。また、Swift らの二相系 LBM で温度を計算すると二相で異なる温度が得られることなど、熱力学的欠点も指摘されている [38]。

そこで以下では、Swift らの二相系 LBM を基に筆者らが開発した新しい二相系 LBM を紹介する。

4.2 液液二相系

まず、等密度の二種の液体が混在している場合を取り扱う [39]。この場合、Swift らの速度分布関数 f_i に加えて新しい速度分布関数 g_i を用いる。 f_i により界面を識別する index function ϕ を求め、 g_i により流体の速度および圧力を求める¹²[40]。速度分布関数 g_i の時間発展は、次式で計算する。

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_g} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (4.14)$$

流体の圧力 p および流速 $\mathbf{u}$ は、それぞれ g_i を用いて次式で定義される¹³。

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{15} g_i, \quad (4.15)$$

¹²このとき、(4.9) 式中の $\mathbf{u}$ には (4.16) 式で得られる $\mathbf{u}$ を用いることに注意。

¹³なお、界面内の圧力は (4.15) 式で求めた p に $\frac{2}{3}\kappa_g |\nabla \phi|^2$ を加える必要がある。なお、2次元9速度モデルでは $\frac{1}{2}\kappa_g |\nabla \phi|^2$ を加える必要がある。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{15} \mathbf{c}_i g_i. \quad (4.16)$$

また、局所平衡分布関数 g_i^{eq} は次式で与えられる。

$$g_i^{\text{eq}} = E_i \left(3p + 3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} \right) + E_i \kappa_g G_{\alpha\beta}^\phi c_{i\alpha} c_{i\beta}, \quad (4.17)$$

ここで、 $\kappa_g = O[(\Delta x)^2]$ は界面張力を決めるパラメーターである。

なお、流体の動粘性係数 ν は次式で与えられる。

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right) \Delta x. \quad (4.18)$$

したがって、 τ_g を変化させることにより、二相の粘性係数を変えることができる。また、界面張力 σ は次式で与えられる [41]。

$$\sigma = \kappa_g \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 d\xi, \quad (4.19)$$

ここで、 ξ は界面に垂直な座標である。

この方法では、二相間の移動度を小さくすることができ、また、界面張力の大きさを広範囲で変化させることができる。

4.3 気液二相系

次に、気液二相流のような密度差（気相の密度 ρ_G 、液相の密度 ρ_L ）がある場合を考える。基本的な取り扱い、4.2 節の液液二相系の場合とほぼ同じであるが、密度 ρ の変化を考慮しなければならない点が難しい。(4.14) 式の右辺に浮力項 ($-3E_i c_{iz}(\rho - \rho_L)g\Delta x$, g : 重力加速度) を加え、さらに、(4.15), (4.16) および (4.17) 式に次の変更が必要である¹⁴。

$$p = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{15} g_i - \rho \right), \quad (4.20)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{15} \mathbf{c}_i g_i, \quad (4.21)$$

$$g_i^{\text{eq}} = H_i \rho + E_i \left[3p + \rho \left(3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} \right) + \frac{5}{3} F_i \omega_g u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + E_i G_{\alpha\beta}^\rho c_{i\alpha} c_{i\beta} \right] \quad (4.22)$$

ここで、

$$G_{\alpha\beta}^\rho = \frac{9}{2} \left[\kappa_g \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} + \omega_g \left(u_\beta \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \right) - \frac{3}{2} \left(\kappa_g \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} + 2\omega_g u_\gamma \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} \right], \quad (4.23)$$

¹⁴なお、界面内の圧力は (4.20) 式で求めた p に $\frac{2}{3}\kappa_g |\nabla \rho|^2$ を加える必要がある。なお、2次元9速度モデルでは $\frac{1}{2}\kappa_g |\nabla \rho|^2$ を加える必要がある。

ここで、 ω_g の掛かった項は、系のガリレイ不変性を保証するために必要な項で、 $\omega_g = \frac{1}{3} \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right) \Delta x$ である [41]。なお、界面張力は (4.19) 式で $\phi \rightarrow \rho$ として求められる。

界面の密度 ρ は、 ϕ を用いて求める。例えば、次式を用いることができる。

$$\rho = \frac{\phi - \phi_{\min}}{\phi_{\max} - \phi_{\min}} (\rho_L - \rho_G) + \rho_G, \quad (4.24)$$

ここで、 $\phi_{\max}$ および $\phi_{\min}$ はそれぞれ index function の最大値および最小値である。あるいは、 ϕ の閾値 ϕ_G^* および ϕ_L^* を用いて、

$$\rho = \begin{cases} \rho_G, & \phi < \phi_G^*, \\ \frac{\Delta \rho}{2} \left[\sin \left(\frac{\phi - \bar{\phi}^*}{\Delta \phi^*} \pi \right) + 1 \right] + \rho_G, & \phi_G^* \leq \phi \leq \phi_L^*, \\ \rho_L, & \phi > \phi_L^*, \end{cases} \quad (4.25)$$

と表すこともできる。ここで、 $\Delta \rho = \rho_L - \rho_G$, $\Delta \phi^* = \phi_L^* - \phi_G^*$, $\bar{\phi}^* = (\phi_L^* + \phi_G^*)/2$ である。

なお、この方法を用いて、密度比が約 15 程度まで計算が可能である。しかし、それ以上密度比が大きくなると、圧力場の計算が不安定になり、非物理的な結果が生じてくる。

4.4 大きな密度比の気液二相系

4.3 節の方法では、100 程度以上の大きな密度比の気液二相系を安定して計算できない。この原因の一つとして、密度比が大きくなると、界面で $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ が満たされないことが考えられる。そこで、以下では、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満たす方法を提案する。本手法では、界面を識別する index function ϕ は、4.2 および 4.3 節と同じく 4.1 節の f_i を用いて求める。速度場および圧力場は、Projection 法 [42] を用いて次のようにして求める。

まず、流速の予測値 $\mathbf{u}^*$ を速度分布関数 g_i^* を用いて求める。 g_i^* の時間発展は、次のようになる。

$$\begin{aligned} g_i^*(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - g_i^*(\mathbf{x}, t) = & -\frac{1}{\tau_g} [g_i^*(\mathbf{x}, t) - g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ & - 3E_i c_{iz} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho} \right) g \Delta x + 3E_i c_{i\alpha} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} \mu \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

上式において、右辺第 2 項は気泡計算のときの重力項を表しており、液滴計算のときには $(1 - \rho_L/\rho) \rightarrow (1 - \rho_G/\rho)$ とする必要がある。また、 μ は粘性係数であり、次式で与えられる。

$$\mu = \frac{\rho - \rho_G}{\rho_L - \rho_G} (\mu_L - \mu_G) + \mu_G, \quad (4.27)$$

ここで、 μ_L および μ_G は、それぞれ液相および気相の粘性係数である。また、局所平衡分布関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} g_i^{\text{eq}} = E_i \left[1 + 3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right] \\ + E_i \frac{1}{\rho} \kappa_g G_{\alpha\beta}^* c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{2}{3} F_i \frac{\kappa_g}{\rho} |\nabla \rho|^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、 $A = \frac{3}{2}(\tau_g - \frac{1}{2})$ 、 $G_{\alpha\beta}^*$ は (4.12) 式で $\phi \rightarrow \rho$ としたものである。なお、界面張力も (4.19) 式で $\phi \rightarrow \rho$ として求められる。流速の予測値 $\mathbf{u}^*$ は、次のようになる。

$$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{15} g_i^* \mathbf{c}_i. \quad (4.29)$$

しかしながら、 $\mathbf{u}^*$ は $\nabla \cdot \mathbf{u}^* \neq 0$ であるため、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ となる $\mathbf{u}$ を次式で補正して求める。

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (4.30)$$

ここで、 p は次の Poisson 方程式を解くことにより求めることができる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (4.31)$$

上の Poisson 方程式を解くには様々な方法が考えられるが、ここでは、LBM を用いて解くことにする。すなわち、新たな速度分布関数 h_i を導入し、次の発展方程式を考える。

$$h_i^{n+1}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x) - h_i^n(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\tau_h} [h_i^n(\mathbf{x}) - E_i p^n(\mathbf{x})] + \frac{1}{3} E_i \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial x_\alpha}, \quad (4.32)$$

ここで、 n は計算の繰り返し回数である。 τ_h は次式で与えられる。

$$\tau_h = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}. \quad (4.33)$$

なお、 p は次式で定義される。

$$p = \sum_{i=1}^{15} h_i. \quad (4.34)$$

(4.32) の発展方程式を $|p^{n+1} - p^n| < \varepsilon$ (たとえば、 $\varepsilon = 10^{-6}$ とする) が満足されるまで繰り返し p を求める。したがって、本手法では 4.2 および 4.3 節のように圧力 p を陽的に求めることはできない。

なお、本手法を用いて、密度比 1000 までの計算が安定に行えることを確認しているが、密度比が大きくなるに従って (4.32) 式の反復計算の回数が増大するため、Poisson 方程式 (4.31) の高速解法が今後の検討課題である。

4.5 数値計算例

4.5.1 セン断流れ場中の液滴の変形・分裂

まず、4.2 節の液液二相系 LBM を用いてセン断流れ場中の液滴の変形・分裂の計算を行った結果を示す [43]。図 4.1 に示すように、高さ H の平行平板間の中央に半径 R の液滴を配置し、液滴が十分に平衡状態に達した後、急に上下の壁を反対方向に速さ u_w で動かし（動かし始めた時刻を $t = 0$ とする）、その後の液滴の変形および分裂状態を追跡した。上下の壁にはすべりなし境界条件（counter-slip 条件）を、側面には周期境界条件を用いた。計算領域は、 $128 \times 64 \times 128$ の立方体格子に分割した。この問題の無次元数は、レイ

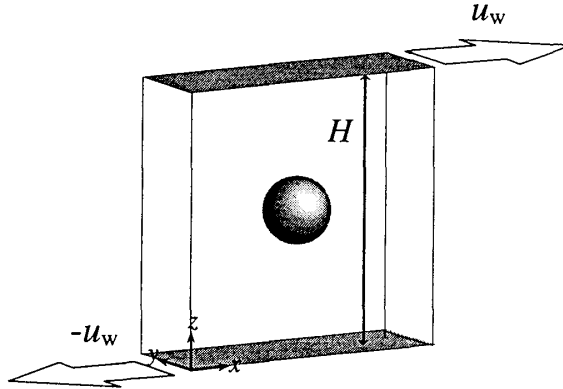
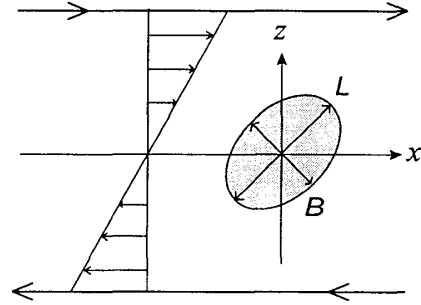


図 4.1 セン断流れ場中の液滴.


 図 4.2 液滴の変形度 $D = (L - B)/(L + B)$.

ノルズ数 $Re = \rho \Gamma R^2 / \mu_c$, キャピラリー数 $Ca = \mu_c \Gamma R / \sigma$ および粘度比 $\eta = \mu_d / \mu_c$ である。ここで, $\Gamma = 2u_w / H$ はせん断強さ, μ_c は連続相の粘性係数, μ_d は液滴の粘性係数である。計算条件は, $a = 9/49$, $b = 2/21$, $T = 0.55$ (このとき, $\phi_{\max} = 4.895$, $\phi_{\min} = 2.211$ となる) とし, また, $\kappa_f = 0.01(\Delta x)^2$, $\tau_f = 0.7$, $R = 16\Delta x$ とした。その他のパラメーター u , τ_g および κ_g の値は, $Re = 0.2, 10$, $0.1 \leq Ca \leq 0.45$ になるように変化させた。また, 粘度比は $\eta = 1$ とした。なお, 液滴の変形度 D は, $D = (L - B)/(L + B)$ で定義した。ここで, L および B は, それぞれ液滴の長軸および短軸の長さである (図 4.2 参照)。

図 4.3 に $Re = 0.20$ で $Ca = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ と変化させた場合の液滴の変形が定常に達した後の計算結果を示す。液滴は, 楕円体に変形し, Ca が大きくなるにしたがって細長い楕円体になることがわかる。この状態で, セン断力と界面張力が釣り合っていると考えられる。同じ Re で $Ca = 0.45$ と少し大きくした場合の計算結果を図 4.4 に示す。この場合, 楕円体に変形した後, さらにダンベル型に変形し, 最後には二つの液滴に分裂することがわかる。種々の条件で計算を行い, キャピラリー数 Ca と液滴の変形度 D との関係を求めた結果を図 4.5 に示す。図には, 既存の実験 [44, 46], 数値計算 [47] および理論解析 [45] の結果を合わせて示している。なお, 既存の結果のレイノルズ数は非常に小さく ($Re < 10^{-2}$), 特に, 理論解析結果は $Re = 0$ に対するものである。図 4.5 より, $Re = 0.2$ で $Ca = 0.10, 0.20, 0.30$ の結果は, 既存の結果と非常によく一致している。一方, $Ca = 0.40$ の結果は, 低レイノルズ数における既存の結果より, 変形度 D が少し大きくなる。さらに, $Ca = 0.45$ では, 本計算結果の液滴は図 4.4 で示したように分裂するが, 低レイノルズ数における既存の結果では分裂せずに変形度が確定する。これらの差異は, レイノルズ数の違いによるものと考えられる。実際に, さらにレイノルズ数を大きくした $Re = 10$ の計算結果は, 同様の傾向を示している。すなわち, 本計算結果より, レイノルズ数が大きくなるにしたがって, 液滴は変形および分裂し易くなることがわかる。

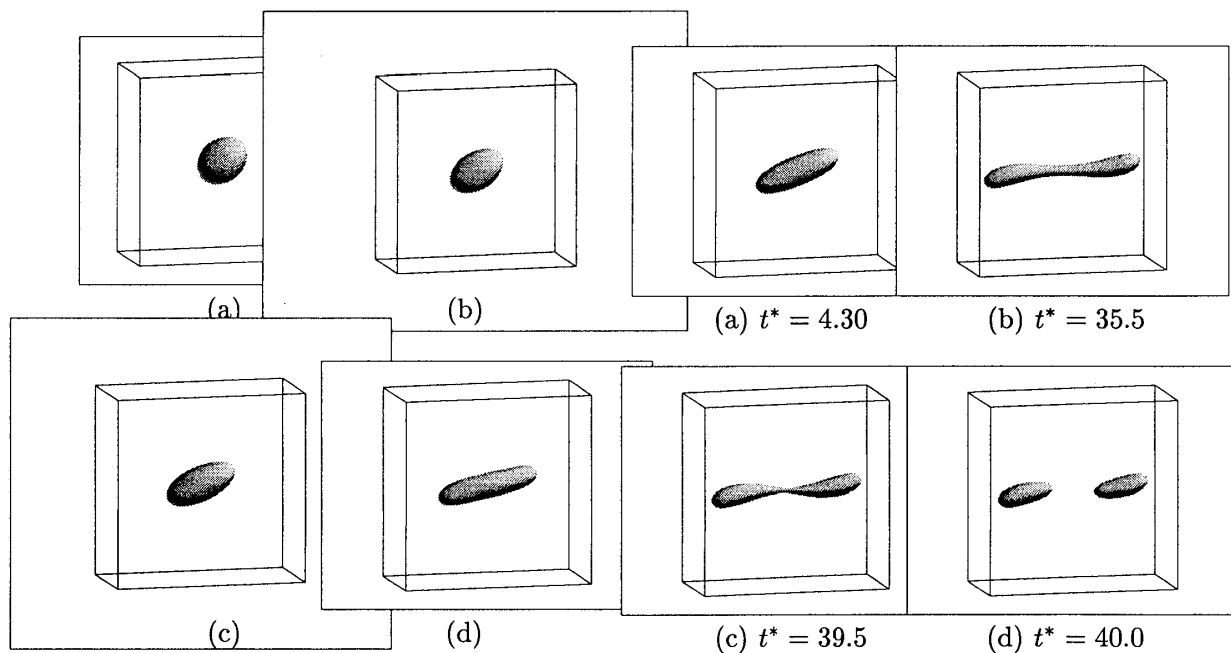


図 4.3 液滴の変形 ($Re = 0.20$): (a) $Ca=0.10$, (b) $Ca=0.20$, (c) $Ca=0.30$, (d) $Ca=0.40$.

図 4.4 液滴の分裂 ($Re = 0.20$, $Ca = 0.45$, $t^* = t\Gamma$).

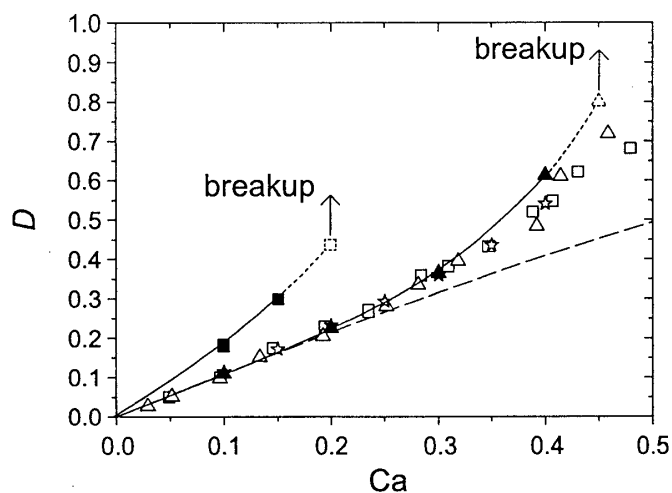


図 4.5 変形度 D とキャピラリー数 Ca との関係:

- ▲ $Re=0.20$, ■ $Re=10$, present results;
- Cox[45] (theoretical); △ Rumcheidt & Mason[44] (experimental);
- Bruijn[46] (experimental); ☆ Li et al.[47] (numerical).

4.5.2 上昇気泡流

液体中の気泡の挙動解析は、機械工学、原子力工学、化学工学などの分野で重要な課題である。しかし、数値計算の上からは、密度比および粘度比が大きいことが取り扱いを困難にしている。さらに、気泡同士の合一の取り扱いも問題である。4.3 および 4.4 節の気液二相系 LBM は、気泡同士の合一の取り扱いが容易である。以下では、密度比が 5 および 50 の場合について、2 次元 9 速度モデルを用いた 2 次元計算結果を紹介する [48]。密度比 5 の場合には 4.3 節の方法、密度比 50 の場合には 4.4 節の方法を用いた。

長さ L_y 、間隔 L_x の平行壁面間 ($L_y/L_x=2$) の液体中に初期直径 D ($D/L_x=0.156$) の 2 次元気泡を 30 個配置し、上昇しながら変形する複数の気泡の挙動を計算した。なお、領域の上下の境界には周期境界条件を、左右の境界にはすべりなし境界条件 (counter-slip 条件) を用いた。また、領域は 256×512 個の正方形格子に分割した。なお、 $T=3.5 \times 10^{-2}$ 、 $a=1$ 、 $b=6.7$ とし、index function ϕ の最大値および最小値をそれぞれ $\phi_{\max} = 9.714 \times 10^{-2}$ および $\phi_{\min} = 1.134 \times 10^{-2}$ とした。液相と気相との密度比 $\rho_L/\rho_G = 5$ ($\rho_L = 0.5$ 、 $\rho_G = 0.1$) とした。また、界面の密度は (4.24) 式で求めた。その他の計算条件は、 $\kappa_f = 0.5(\Delta x)^2$ 、 $\kappa_g = 3(\Delta x)^2$ 、 $\tau_f = 1$ 、 $\tau_g = 0.8377$ 、 $g = 3.914 \times 10^{-6}$ である。このとき、モートン数 $M = g\mu_L^4(\rho_L - \rho_G)/(\rho_L^2\sigma^3)$ およびエトベス数 $E = g(\rho_L - \rho_G)D^2/\sigma$ は、それぞれ $M = 5 \times 10^{-4}$ および $E = 5 \times 10^{-1}$ である。ここで、 μ_L は液相の粘性係数である。計算結果を図 4.6 に示す。白い部分が気相を、黒い部分が液相を表している。(a) および (b) では、最初、小さな気泡同士が合体して徐々に大きくなるが、ほぼ円形を保ちながら上昇していることがわかる。その後、(c) では、比較的大きな気泡が複雑に変形しながら合体し、上昇して行くことがわかる。さらに、(d) および (e) では、1 つの大きな砲弾型のスラグ気泡が流路断面を満たすように上昇していることがわかる。以上の計算結果は、2 次元気泡の計算であるが、スラグ流の流動様式が得られ、定性的には妥当な結果であると考えられる。次に、図 4.6(e) の $y/L_y = 0.391$ における密度分布および y 方向流速分布を図 4.7 に示す。図 4.7(a) より、シャープな界面が計算されていることがわかる。一方、(b) より、気相および液相では滑らかな流速分布が得られているが、界面近傍において流速分布に小さなスパイクが

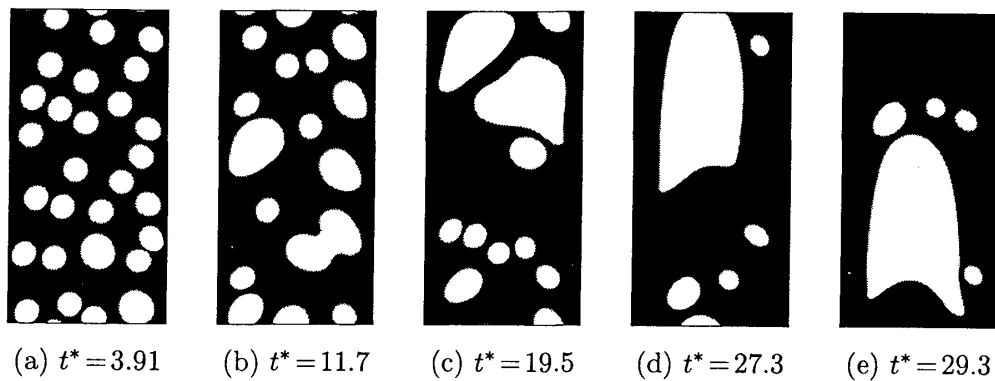


図 4.6 2 次元上昇気泡の計算結果 ($\rho_L/\rho_G = 5$, $t^* = tU/L_x$, $U = 0.1$: 最大気泡上昇速度)。

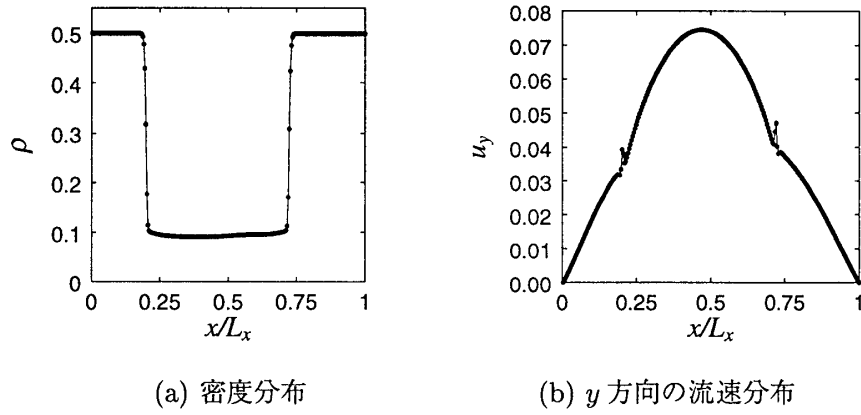


図 4.7 密度分布および y 方向の流速分布 ($\rho_L/\rho_G = 5$, $t^* = 29.3$, $y/L_y = 0.391$) .

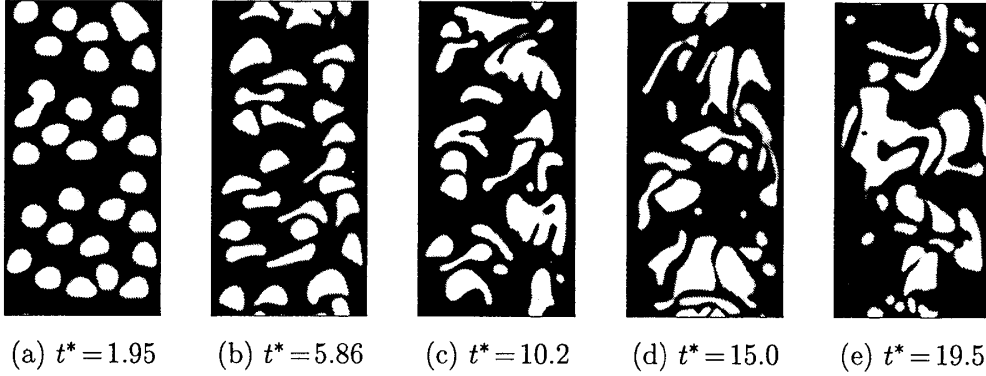


図 4.8 2次元上昇気泡の計算結果 ($\rho_L/\rho_G = 50$, $t^* = tU/L_x$, $U = 0.1$: 最大気泡上昇速度) .

生じている。スパイクの生じる原因としては、圧力場の計算が不安定になっていることが考えられる。なお、このスパイクは密度比が大きくなるにしたがって増大し、そのため大きな密度比では計算が不安定になる。

そこで、次に 4.4 節の方法を用いて、液相と気相との密度比が $\rho_L/\rho_G = 50$ ($\rho_L = 50$, $\rho_G = 1$) の場合を計算した。index function ϕ については上記と同じとし、界面の密度は (4.25) 式で求めた。ただし、 $\phi_L^* = 9.2 \times 10^{-2}$, $\phi_G^* = 1.5 \times 10^{-2}$ とした。その他、上記と異なる計算条件は、 $\kappa_f = 1.5(\Delta x)^2$, $\kappa_g = 1 \times 10^{-5}(\Delta x)^2$, $\tau_f = 1$, $\tau_g = 1$, $g = 6.815 \times 10^{-7}$, $\mu_L = 1.034 \times 10^{-1}$, $\mu_G = 2.067 \times 10^{-3}$ である。このとき、モートン数およびエトベス数は、それぞれ $M = 1 \times 10^{-5}$ および $E = 10$ である。計算結果を図 4.8 に示す。図より、(a), (b) では、気泡が徐々に変形し、底部が少しくぼんだ形や偏平した形で上昇してゆくことがわかる。(c) では、気泡同士の接近に伴って、気泡が合一し複雑な形状の気泡が形成される。さらに、(d), (e) では、合一と分裂を繰り返し、様々な形状の気泡が複雑に変形しながら

ら上昇している様子がわかる。このように、図 4.8 の結果は、図 4.6 の結果よりも気泡が複雑に変形する。これは、エトベス数が大きくなったこと（気泡径が大きくなったことに相当）、および液相と気相との密度比が大きくなったことが原因と考えられる。次に、図 4.8(e) の $y/L_y = 0.613$ における密度分布および y 方向流速分布を図 4.9 に示す。図 4.9(a) より、密度比 50 のシャープな界面が計算されていることがわかる。さらに、(b) より、滑らかな流速分布になっており、界面近傍においてもスパイクは生じていないことがわかる。すなわち、4.4 節の方法により、密度比 50 の気泡の計算が安定に行なえることがわかる。

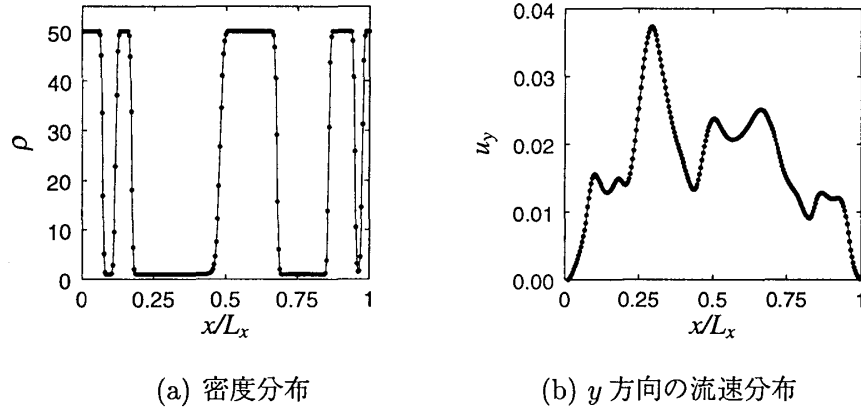


図 4.9 密度分布および y 方向の流速分布 ($\rho_L/\rho_G = 50$, $t^* = 19.5$, $y/L_y = 0.613$) .

4.5.3 液面に衝突する液滴

最後に、4.4 節の方法を用いて、液面に衝突する液滴の挙動を計算した結果を示す [49]。ただし、2 次元計算である。幅 L_x 、高さ L_y の領域 ($L_y/L_x = 0.5$) に初期直径 D の液滴および深さ H の液面を配置し、 $t = 0$ に液滴を初速度 V で落下させた。液相と気相との密度比は $\rho_L/\rho_G = 50$ ($\rho_L = 50$, $\rho_G = 1$) とした。なお、領域の左右には周期境界条件、上下にはすべりなし境界条件 (counter-slip 条件) を用いた。計算条件は、index function ϕ については 4.5.2 節と同じとし、界面の密度は (4.25) 式で求めた。その他については $L_x = 256\Delta x$, $L_y = 128\Delta x$, $D = 40\Delta x$, $H = 20\Delta x$, $\kappa_g = 1 \times 10^{-5}(\Delta x)^2$, $\tau_g = 1$, $g = 6.25 \times 10^{-8}$, $\mu_L = 1 \times 10^{-2}$, $\mu_G = 2 \times 10^{-4}$ とした。なお、このとき、ウェーバー数 $We = \rho_L V^2 D / \sigma$, フルード数 $Fr = V^2 / gD$ およびレイノルズ数 $Re = \rho_L V D / \mu_L$ は、それぞれ $We = 147$, $Fr = 158$ および $Re = 3975$ である。計算結果を図 4.10 に示す。液滴が液面に衝突すると、衝撃により液面が跳ね上げられていることがわかる。その後、衝突した液面は徐々に押し下げられる。一方、跳ね上げられた液面は、ミルククラウンで見られるように先端部が丸くなって分裂する。

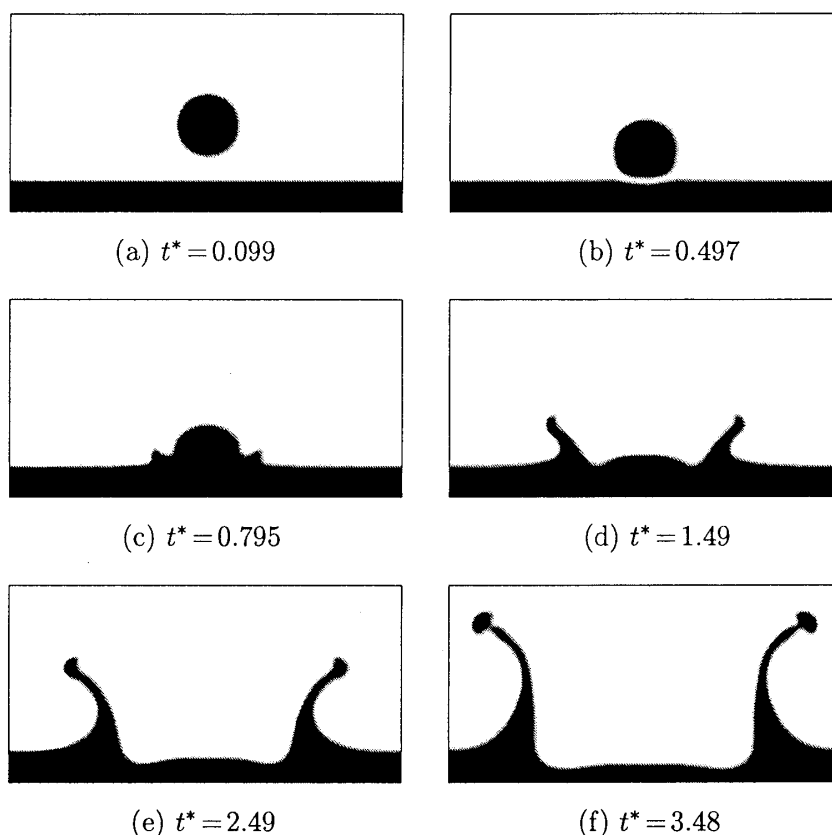


図 4.10 液面に衝突する 2 次元液滴の計算結果 ($\rho_L/\rho_G = 50$, $t^* = tV/D$).

5 おわりに

LBM の基礎と応用を主に筆者らの研究結果を中心に解説した。本文で記述したように、LBM の特徴は、

1. アルゴリズムが非常に簡単であり、また、並列計算に適している。
2. 質量および運動量の保存性に優れている。
3. 局所平衡分布関数の形を変えるだけで、単相流から二相流まで統一的に取り扱うことができる。

ことである。

LBM の研究は、1990 年代に始まったばかりの非常に新しい研究分野である。現在、非圧縮性粘性流体の LBM はほぼ確立しているが、二相流体の LBM はまだ発展途上である。また、本稿では言及しなかったが、LBM の数値安定性解析、圧縮性流体を扱う Thermal LBM、乱流解析への適用、不等間隔格子や多重スケール格子の LBM などの研究も進展している [3, 4]。

今後、多くの研究者が LBM に興味をもち、本分野の研究がさらに発展することを期待している。本稿が、多少なりとも、その助けになれば幸いである。

謝辞

最後に、本解説の執筆を勧めていただいた物性研究編集長の早川尚男先生にお礼申し上げます。

A Appendix A

2 章および 3 章における無次元変数の定義を以下に示す。変数はすべて、代表長さ L 、代表粒子速さ c 、代表時間 $t_0 = L/U$ (U : 代表流れ速さ)、基準密度 ρ_0 、基準温度 T_0 、定圧比熱 c_p を用いて無次元化している。^の付いたものが無次元変数である。ただし、本文では^を省略している。

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i/c, & \hat{x} &= x/L, & \hat{t} &= t/t_0, \\ \hat{f}_i &= f_i/\rho_0, & \hat{g}_i &= g_i/T_0, \\ \hat{\rho} &= \rho/\rho_0, & \hat{T} &= T/T_0, \\ \hat{u} &= u/c, & \hat{u}_T &= u_T/c, \\ \hat{e} &= e/c^2, & \hat{p} &= p/(\rho c^2), & \hat{q} &= q/(\rho_0 c_p c T_0), \\ \hat{\nu} &= \nu/(cL), & \hat{\alpha} &= \alpha/(cL), & \hat{k} &= k/(\rho_0 c_p c L), \\ \hat{g} &= gL/c^2, & \hat{\beta} &= \beta T_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

4 章における無次元変数の定義を以下に示す。変数はすべて、代表長さ L 、代表粒子速さ c 、代表時間 $t_0 = L/U$ (U : 代表流れ速さ)、index function の基準値 ϕ_0 、基準密度 ρ_0 を用いて無次元化している。^の付いたものが無次元変数である。ただし、本文では^を省略している。

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i/c, & \hat{x} &= x/L, & \hat{t} &= t/t_0, \\ \hat{f}_i &= f_i/\phi_0, & \hat{g}_i &= g_i/\rho_0, \\ \hat{\phi} &= \phi/\phi_0, & \hat{\rho} &= \rho/\rho_0, \\ \hat{u} &= u/c, & \hat{p} &= p/(\rho c^2), \\ \hat{\nu} &= \nu/(cL), & \hat{\sigma} &= \sigma/(\rho_0 c^2 L), \\ \hat{g} &= gL/c^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

B Appendix B

粒子速度 $\mathbf{c}_i$ の総和に関する公式を以下に示す。なお、以下の公式は、 $N=9$ および 15 の両方に成立する。

$$\sum_{i=1}^N E_i c_{i\alpha} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{i=1}^N E_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{i=1}^N E_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{i=1}^N E_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = \frac{1}{9} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}), \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{i=1}^N E_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} c_{i\zeta} = 0. \quad (\text{B.5})$$

C Appendix C

4章の二相系 LBM の定式化に関連して、2次元9速度モデルを用いた場合の局所平衡分布関数を以下に与えておく。

(1) Swift–Osborne–Yeomans モデル

$$\begin{aligned} f_i^{\text{eq}} = & H_i \phi + F_i (p_0 - \kappa_f \phi \nabla^2 \phi) \\ & + E_i \phi \left(3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} \right) + E_i \kappa_f G_{\alpha\beta}^\phi c_{i\alpha} c_{i\beta}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 4/9, \quad E_2 = \dots = E_5 = 1/9, \quad E_6 = \dots = E_9 = 1/36, \\ H_1 &= 1, \quad H_2 = H_3 = \dots = H_9 = 0, \\ F_1 &= -5/3, \quad F_i = 3E_i \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, 9, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2})$$

$$G_{\alpha\beta}^\phi = \frac{9}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} - \frac{9}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.3})$$

である。また、(C.1) および (C.3) 式中の $\nabla \phi$ は (3.9) 式で、 $\nabla^2 \phi$ は次式で近似できる。

$$\nabla^2 \phi \approx \frac{1}{3\Delta x} \left[\sum_{i=1}^9 \phi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x) - 8\phi(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{C.4})$$

(2) 液液二相系

定数 E_i 以外は形式的に同じ。

(3) 気液二相系

$$g_i^{\text{eq}} = H_i \rho + E_i \left[3p + \rho \left(3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} \right) \right] \\ + 2F_i \omega_g u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + E_i G_{\alpha\beta}^\rho c_{i\alpha} c_{i\beta}, \quad (\text{C.5})$$

ここで,

$$G_{\alpha\beta}^\rho = \frac{9}{2} \left[\kappa_g \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} + \omega_g \left(u_\beta \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \right) \right] \\ - \frac{9}{4} \left(\kappa_g \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} + 2\omega_g u_\gamma \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.6})$$

である。

(4) 大きな密度比の気液二相系

$$g_i^{\text{eq}} = E_i \left[1 + 3u_\alpha c_{i\alpha} - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i\alpha} c_{i\beta} + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right] \\ + E_i \frac{1}{\rho} \kappa_g G_{\alpha\beta}^* c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{1}{2} F_i \frac{\kappa_g}{\rho} |\nabla \rho|^2, \quad (\text{C.7})$$

ここで, $A = \frac{3}{2} \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right)$, $G_{\alpha\beta}^*$ は (C.3) 式で $\phi \rightarrow \rho$ としたものである。

参考文献

- [1] D. H. Rothman and S. Zaleski, *Lattice-Gas Cellular Automata*, Cambridge University Press (1997).
- [2] S. Chen and G. D. Doolen, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998), 329.
- [3] D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*, Springer-Verlag (2000).
- [4] S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press (2001).
- [5] T. Inamuro and B. Sturtevant, *Phys. Fluids A* **2** (1990), 2196.
- [6] G. McNamara and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), 2332.
- [7] F. Higuera and J. Jimenez, *Europhys. Lett.* **9** (1989), 663.
- [8] P. Lallemand and L.-S. Luo, *Phys. Rev. E* **61** (2000), 6546.
- [9] S. Chen, H. Chen, D. Martinez, and W. H. Matthaeus, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 3776.

- [10] Y. H. Qian, D. d’Humières, and P. Lallemand, *Europhy. Lett.* **17** (1992), 479.
- [11] P. L. Bhatnager, E. P. Gross, and M. Krook, *Phys. Rev.* **94** (1954), 511.
- [12] 曾根良夫, 青木一生, 分子気体力学, 朝倉書店 (1994).
- [13] T. Abe, *J. Comput. Phys.* **131** (1997), 241.
- [14] X. He and L.-S. Luo, *Phys. Rev. E.* **55** (1997), 6333.
- [15] T. Inamuro, M. Yoshino, and F. Ogino, *Phys. Fluids* **9** (1997), 3535.
- [16] Y. Sone, *Rarefied Gas Dynamics*, ed. D. Dini (Editrice Tecnico Scientifica, Pisa) **2** (1971), 737.
- [17] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press (1976), 81.
- [18] T. Inamuro, M. Yoshino, H. Inoue, R. Mizuno, and F. Ogino, *J. Comput. Phys.* (2001) 投稿中.
- [19] T. Inamuro, M. Yoshino, and F. Ogino, *Phys. Fluids* **7** (1995), 2928; Erratum: **8** (1996), 1124.
- [20] T. Inamuro, K. Maeba, and F. Ogino, *Int. J. Multiphase Flow* **26** (2000), 1981.
- [21] T. Inamuro, M. Yoshino, and F. Ogino, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **29** (1999), 737.
- [22] 稲室隆二, 吉野正人, 荻野文丸, 化学工学論文集 **25** (1999), 979.
- [23] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley (1960), 199.
- [24] S. Ergun, *Chem. Eng. Prog.* **48** (1952), 89.
- [25] R. M. Clever and F. H. Busse, *J. Fluid Mech.* **65** (1974), 625.
- [26] X. He, S. Chen, and G. D. Doolen, *J. Comput. Phys.* **146** (1998), 282.
- [27] T. Inamuro, *Phil. Trans. R. Soc. London A* (2001) 印刷中.
- [28] M. Junk and S. V. Rao, *J. Comput. Phys.* **151** (1999), 178.
- [29] Y. Sone, *Mechanik-KTH 2000:09*, Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm (2000).
- [30] S. Y. Chou and D. Baganoff, *J. Comput. Phys.* **130** (1997), 217.

- [31] J. H. Ferziger and M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1996), 202.
- [32] M. Hortmann, M. Perić, and G. Scheuerer, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **11** (1990), 189.
- [33] A. K. Gunstensen, D. H. Rothman, S. Zaleski, and G. Zanetti, *Phys. Rev. A* **43** (1991), 4320.
- [34] X. Shan and H. Chen, *Phys. Rev. E* **47** (1993), 1815.
- [35] M. R. Swift, W. R. Osborne, and J. M. Yeomans, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), 830.
- [36] M. R. Swift, E. Orlandini, W. R. Osborne, and J. M. Yeomans, *Phys. Rev. E* **54** (1996), 5041.
- [37] A. J. M. Yang, P. D. Fleming III, and J. H. Gibbs, *J. Chem. Phys.* **64** (1976), 3732.
- [38] L.-S. Luo, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998), 1618.
- [39] T. Inamuro, T. Miyahara, and F. Ogino, *Computational Fluid Dynamics 2000*, Springer-Verlag (2001) 印刷中.
- [40] X. He, S. Chen, and R. Zhang, *J. Comput. Phys.* **152** (1999), 642.
- [41] T. Inamuro, N. Konishi, and F. Ogino, *Comput. Phys. Commun.* **129** (2000), 32.
- [42] A. J. Chorin, *Math. Comp.* **22** (1968), 745.
- [43] T. Inamuro, R. Tomita, and F. Ogino, *Proc. Thermal Eng. Conf. Kyoto-Seoul-Tsinghua Three Asian University* (2001) 印刷中.
- [44] F. D. Rumscheidt and S. G. Mason, *J. Colloid Sci.* **16** (1961), 238.
- [45] R. G. Cox, *J. Fluid Mech.* **37** (1969), 601.
- [46] R. A. Bruijn, Ph. D. Thesis, Thechnical University at Eindhoven (1989).
- [47] J. Li, Y. Y. Renardy, and M. Renardy, *Phys. Fluids* **12** (2000), 269.
- [48] 稲室隆二, 小西伸治, 荻野文丸, 日本流体力学会年会 2000 講演論文集 (2000), 183.
- [49] 稲室隆二, 小西伸治, 田島秀一, 荻野文丸, 日本混相流学会 年会講演会 2001 講演論文集 (2001), 287.