

約数関数を含むある指数和から生ずる誤差項の二乗平均について

名古屋大学多元数理 古屋淳 (Jun Furuya)

1 Introduction

$d(n)$ を約数関数, すなわち n の正の約数の総数, γ を Euler の定数とする. また, Dirichlet's divisor problem の誤差項 $\Delta(x)$ を次で定義する.

$$\Delta(x) = \sum'_{n \leq x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) - 1/4,$$

ここで, 記号 $\sum'$ は x が整数のときに最後の項を半分にすることを示す記号である. この $\Delta(x)$ に対して次の二乗平均公式を考える.

$$\int_2^x \Delta(u)^2 du = \left(\frac{1}{6\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} d^2(m) m^{-3/2} \right) x^{3/2} + F(x),$$

ここで, $F(x)$ は二乗平均の誤差項であり, 現在の最良の評価は $F(x) = O(x \log^4 x)$ であることが Preissmann によって示されている [9]. また, この $F(x)$ に対して, 平均値公式

$$\int_2^X F(x) dx = -\frac{1}{8\pi^2} X^2 \log^2 X + cX^2 \log X + O(X^2),$$

(c はある定数) が Lau と Tsang によって得られた [7]. さらに彼らは, この平均値公式を用いて次の omega result を示した.

$$F(x) = \Omega_-(x \log^2 x).$$

また, Jutila は上記の結果に関して, 約数関数を含む指数和に対する一般化を証明している [4]. a, b を $(a, b) = 1$, $a \geq 1$ を満たす整数とし, $e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha)$ とおく. これに対し, 誤差項 $\Delta(x; b/a)$ を次で定義する.

$$\Delta(x; b/a) = \sum'_{n \leq x} d(n) e(bn/a) - \frac{1}{a} x \left(\log \frac{x}{a^2} + 2\gamma - 1 \right) - E(0, b/a),$$

ここで, $E(0, b/a)$ は次の関数を解析接続したものに $s = 0$ を代入したものである.

$$E(s, b/a) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) e(bn/a) n^{-s} \quad (\Re s > 1).$$

また特に、この値は次の評価があることが Estermann によって証明されている [1].

$$E(0, b/a) \ll a \log(2a).$$

この $\Delta(x; b/a)$ に対して, Jutila は次の二乗平均公式を示した [4].

$$(1.1) \quad \int_1^x |\Delta(u; b/a)|^2 du = \left(\frac{1}{6\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} d^2(m) m^{-3/2} \right) ax^{3/2} + F(x; b/a),$$

ここで, $F(x; b/a)$ は誤差項で, $F(x; b/a) \ll a^2 x^{1+\varepsilon} + a^{3/2} x^{5/4+\varepsilon}$ を満たす (ε は任意の十分小さい正の数). さらに, Jutila はこの二乗平均公式を用いることによって, $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ に対して 次の漸近式を示した ([4], Corollary of Theorem 1.2).

$$(1.2) \quad \int_1^x |\Delta(u; b/a)|^2 du \sim \left(\frac{1}{6\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} d^2(m) m^{-3/2} \right) ax^{3/2}.$$

また Jutila は, この $F(x; b/a)$ の評価は $O(a^2 x \log^5 x)$ に落せることを [4] の中で言及している.

ここでは, この関数 $F(x; b/a)$ の性質について詳しく調べることにする. まず, $F(x; b/a)$ の評価に対して次の定理が得られる.

Theorem 1 $x \geq 2, a \leq x$ に対して,

$$F(x; b/a) \ll a^2 x \log^4 x + a^{4+\varepsilon} \log^2 x.$$

この定理は, Kiuchi [6] によって与えられた, $\Delta(u; b/a)$ に対する Truncated Voronoï formula 及び, Preissmann [9] によって与えられた, Montgomery-Vaughan 型の不等式を使うことによって得られるものである.

また, この定理から次のことも直ちに導かれる.

Corollary $a^{2+\varepsilon} \ll x \log^2 x$ に対して,

$$F(x; b/a) \ll a^2 x \log^4 x.$$

この Corollary と (1.2) 式を合わせて考えると, 条件 $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ のもとでは二乗平均公式

$$\int_1^x |\Delta(u; b/a)|^2 du = \left(\frac{1}{6\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} d^2(m) m^{-3/2} \right) ax^{3/2} + O(a^2 x \log^4 x),$$

が成立することが分かる. (Corollary の条件 $a^{2+\varepsilon} \ll x \log^2 x$ は, $a \ll x^{1/2-\varepsilon}$ を含んでいることに注意しておく.)

次にこの関数 $F(x; b/a)$ に対し, Lau-Tsang の方法を適用して, $F(x; b/a)$ の平均値定理を導く.

Theorem 2 $X \geq 2$, $a^2 \leq X(\log^{-8} X)/2$ とすると,

$$(1.3) \quad \int_1^X F(x; b/a) dx = -\frac{1}{8\pi^2} X^2 \log^2 X + f(a) X^2 \log X + O(a^{2+\epsilon} X^2).$$

ここで, 関数 $f(a)$ は $f(a) \ll a^{2+\epsilon}$ で評価される.

この定理における a の条件 $a^2 \leq X(\log^{-8} X)/2$ は additive divisor problem に対する漸近公式の誤差項の一様性から生ずるものである. (Section 2 でふれる.)

またさらに, a についての条件を $a \leq X$ にまで広げると, 次のような定理が導かれる.

Theorem 3 $f(a)$ は前定理と同じ定義の関数とする. このとき, $X \geq 2$, $a \leq X$ に対して

$$\int_2^X F(x; b/a) dx = -\frac{1}{8\pi^2} X^2 \log^2 X + f(a) X^2 \log X + O(a^3 X^2 + a^{4+\epsilon} X \log^2 X).$$

ここで, 関数 $f(a)$ は explicit form に書き出すことができるが, それは非常に複雑な形をしている (その形は省略する).

さらに, Theorem 2 または Theorem 3 を用いると次の omega-result が言える.

Theorem 4

$$F(x; b/a) = \Omega_-(X \log^2 X)$$

すなわち, この関数 $F(x; b/a)$ に対しても $F(x)$ に対する Lau-Tsang の結果と同様なことがいえることになる.

2 証明の概略

まず, 関数 $\delta_M(u; b/a)$ を次で定義する.

$$\delta_M(u; b/a) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} a^{1/2} u^{1/4} \sum_{n \leq M} d(n) e\left(-\frac{\bar{b}}{a} n\right) n^{-3/4} \cos\left(4\pi \frac{\sqrt{nu}}{a} - \frac{\pi}{4}\right).$$

この $|\Delta(u; b/a)|$ の二乗平均は次で与えられる [2, Lemma 4].

$$(2.1) \quad \int_1^x |\Delta(u; b/a)|^2 du = \int_1^x |\delta_M(u; b/a)|^2 du + O(a^2 x + a^{4+\epsilon} \log^2 x),$$

($x \geq 2$, $a \leq x$ 及び $x^7 \ll M \ll x^{14}$).

(2.1) 式において, 右辺の第一項を計算すると

$$\begin{aligned} & \int_1^x |\delta_M(u; b/a)|^2 du \\ &= \frac{a}{4\pi^2} \sum_{m,n \leq M} d(m)d(n)(mn)^{-3/4} e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right) \int_1^x u^{1/2} \cos\left(4\pi \frac{\sqrt{u}}{a}(\sqrt{n}-\sqrt{m})\right) du \\ & \quad + \frac{a}{4\pi^2} \sum_{m,n \leq M} d(m)d(n)(mn)^{-3/4} e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right) \int_1^x u^{1/2} \sin\left(4\pi \frac{\sqrt{u}}{a}(\sqrt{n}+\sqrt{m})\right) du. \end{aligned}$$

Theorem 1 はここから直ちに得られる ([2, Section 3] 参照).

今後は, Theorem 2 及び Theorem 3 について考える. $M = X^7$ とする. 上式の第一項から diagonal term を取り出して, 残りの部分について (1.1) 式と比較すると, 次の $F(x; b/a)$ に対する asymptotic formula が $a \leq x$, 及び $x^7 \ll M \ll x^{14}$ の範囲で得られる.

$$(2.2) \quad F(x; b/a) = S_1(x; b/a) + S_2(x; b/a) + O(a^2 x + a^{4+\varepsilon} \log^2 x),$$

ここで,

$$S_1(x; b/a) = (2\pi^2)^{-2} \sum_{m < n \leq M} d(m)d(n) \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right) (mn)^{-3/4} \int_1^x \sqrt{u} \cos\left(\frac{4\pi}{a}(\sqrt{n}-\sqrt{m})\sqrt{u}\right) du,$$

及び,

$$S_2(x; b/a) = (4\pi^2)^{-2} \sum_{m,n \leq M} d(m)d(n) e\left(\frac{\bar{b}}{a}(n-m)\right) (mn)^{-3/4} \int_1^x \sqrt{u} \sin\left(\frac{4\pi}{a}(\sqrt{n}+\sqrt{m})\sqrt{u}\right) du.$$

(2.2) 式を積分して (実際は 3 つの部分に分けて積分をするが, ここでは省略する), [7] の Lemma 3 及び Section 3 の手法を用いると次の式が導かれる.

$$\int_1^X F(x; b/a) dx = \sqrt{2}\pi^{-3/2} a X^{5/2} T + O(a^2 X^2 + a^{4+\varepsilon} X \log^2 X),$$

($2 \leq X$, $a \leq X$), 関数 T は次の形で表される.

$$T = \sum_{h \leq X^3 L^4 a} \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} h\right) \int_{D_{h,a}}^M (y(y+h))^{-3/4} g(\theta_{y,y+h}) d\psi_h(y),$$

ここで, $g(\nu) = \nu^{-3/2} J_{3/2}(\nu) - 4\nu^{-5/2} J_{5/2}(\nu)$ ($J_k(\nu)$ は order k の Bessel 関数), $\theta_{m,n} = 4\pi\sqrt{X}(\sqrt{n}-\sqrt{m})/a$, $D_{h,a} = a^{-2}h^2 X L^{-8}$ である. また関数 $\psi_h(y)$ は

$$\psi_h(y) = \sum_{m \leq y} d(m)d(m+h),$$

である.

次に, この $\psi_h(y)$ について考える. Heath-Brown は次の漸近公式を導いた [3].

$$\psi_h(y) = I_h(y) + E_h(y),$$

$I_h(y)$ は main term で次の形で書き表せる.

$$I_h(y) = y \sum_{i=0}^2 \log^i y \sum_{d|h} d^{-1} (\alpha_{i0} + \alpha_{i1} \log d + \alpha_{i2} \log^2 d),$$

ここで α_{ij} はある定数である. (特別な場合として, $\alpha_{20} = 6\pi^{-2}$ かつ $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ である.) また, $E_h(y)$ は error term で次で評価される.

$$(2.3) \quad E_h(y) \ll y^{5/6+\epsilon},$$

(ただし, $1 \leq h \leq y^{5/6}$ の範囲でのみ一様に.) さらに, Motohashi [8] は (2.3) 式の $E_h(y)$ についての次の改良を示した.

$$(2.4) \quad E_h(y) \ll y^{2/3+\epsilon},$$

(ただし, $1 \leq h \leq y^{20/27}$ の範囲でのみ一様に.)

この漸近公式を用いて T を変形していくが, Theorem 2 では (2.4) 式を用いなければならないが, Theorem 3 では (2.3) 式を用いれば十分である. (ここでは Theorem 2 の場合の証明を進めていく.) しかし, h に対する一様性を考慮すると, $h \leq y^{20/27}$ すなわち $(a^2 X^{-1} L^8)^{13/20} \leq h$ という条件が必要になる. これが 1 以上のすべての h についてあてはまるようにするため, a に対して仮定 $a^2 \leq XL^{-8}$ をつけ加えることにする.

この $\psi_h(y)$ の漸近式及び, Riemann-Stieltjes 積分を用いると, 次の式が得られる.

$$T = \sum_{h \leq X^3 L^4 a} \cos \left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} h \right) \int_{D_{h,a}}^M (y(y+h))^{-3/4} g(\theta_{y,y+h}) I'_h(y) dy + O(aX^{-1/2}).$$

さらに $\theta_{y,y+h} = \omega$ による変数変換, 和と積分の入れ換えを行なうと次の式が $a^2 \leq XL^{-8}$, $X \geq 2$ に対して得られる. [2, Proposition 1]

$$(2.5) \quad T = \frac{a}{\pi\sqrt{X}} \int_{2\pi X^{-3}a^{-1}}^{2\pi L^4} g(\omega) \xi_a \left((2\pi)^{-1} X^3 a \omega, 2\pi\sqrt{X} \omega^{-1} a^{-1} \right) d\omega + O(aX^{-1/2} + a^{3+\epsilon} X^{-3/2} \log^2 X).$$

ここで,

$$\xi_a(y, Q) = \sum_{h \leq y} h^{-1} \cos \left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} h \right) (4a_2(h) \log^2(Qh) + 2a_1(h) \log(Qh) + a_0(h)),$$

係数 $a_i(h)$ ($i = 0, 1, 2$) は

$$\begin{aligned} a_0(h) &= \sum_{d|h} d^{-1} \sum_{j=0}^2 (\alpha_{0j} + \alpha_{1j}) \log^j d, \\ a_1(h) &= \sum_{d|h} d^{-1} (12\pi^{-2} + \alpha_{10} + \alpha_{11} \log d + \alpha_{12} \log^2 d) \\ a_2(h) &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{d|h} d^{-1} \end{aligned}$$

である.

つぎに, この関数 $\xi_a(y, Q)$ の漸近式を考えるが, [2, Lemma 5] により,

$$\begin{aligned} \xi_a(y, Q) &= \frac{4}{3a} \log^3 QX + A_1(a) \log^2 QX - \frac{4}{3a} \log^3 Q + A_2(a) \log^2 Q + A_3(a) \log Q \\ &\quad + A_4(a) + A_5(a) \log X + O(a^{1+\epsilon} X^{-1} \log^3 X \log^2 QX), \end{aligned}$$

ここで, 係数 $A_i(a)$ はすべて explicit form に書き下すことが出来る. 例えば,

$$\begin{aligned} A_1(a) &= \sum_{1 \leq r \leq a-1} \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} r\right) a_2(r) r^{-1} \log^2 r + \sum_{1 \leq r \leq a-1} \cos\left(2\pi \frac{\bar{b}}{a} r\right) \left\{ -\frac{\beta_2(a, r)}{3a} \log^3(a+r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_2(a, r)}{a+r} \log^2(a+r) - 2a \int_1^\infty \frac{2 \log(at+r) - \log^2(at+r)}{(at+r)^2} B(t; a, r) dt \right\}, \end{aligned}$$

ただし,

$$\beta_2(a, r) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{a_1 | (a, r)} a_1 \sum_{\substack{d=1 \\ (a, d)=a_1}}^\infty d^{-2}, \quad B(y; a, r) = \sum_{m \leq y} a_2(am+r) - \beta_2(a, r)y$$

である. また, すべての $A_i(a)$ は評価式 $A_i(a) \ll a^\epsilon$ を満たしていることを注意しておく.

この $\xi_a(y, Q)$ の漸近式を (2.5) 式に代入することにより, 次の式が得られる ([7, Lemma 5] を用いて変形を進める.)

$$T = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} 2^{-7/2} X^{-1/2} \log^2 X + aA_7(a) X^{-1/2} \log X + O(a^{1+\epsilon} X^{-1/2})$$

あとは上式を $F(x; b/a)$ の平均式に代入すれば, ただちに Theorem 2 が得られる.

この問題は山口大学の木内功先生に御教示いただきました. また, 木内先生には数々の助言, 激励をいただきました. 筆者は木内先生に深く感謝致します. また, 名古屋大学の谷川好男先生, 松本耕二先生の両先生に数々の助言, 激励をいただいたことを深く感謝致します.

参考文献

- [1] T. Estermann, On the representation of a number as the sum of two products, Proc. London Math. Soc. (2) 31, (1930), 123-133.
- [2] J. Furuya, Mean square of an error term related to a certain exponential sum involving the divisor function, in preparation.
- [3] D. R. Heath-Brown, The fourth power moment of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (3) 38, (1979), 385-422.
- [4] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Lecture Note 80, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, (1987).
- [5] ———, On exponential sums involving the divisor function, J. Reine Angew. Math. 55, (1985), 173-190.
- [6] I. Kiuchi, Mean value results for the non-symmetric form of the approximate functional equation of the Riemann zeta-function, Tokyo J. Math. 17, No 1, (1994), 191-200.
- [7] Y.K.Lau and K.M.Tsang, Mean square of the remainder term in the Dirichlet divisor problem, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 7, (1995), 75-92.
- [8] Y. Motohashi, The binary additive divisor problem, Ann. Scient. École Norm. Sup (4), 27 (1994), 529-572.
- [9] E. Preissmann, Sur la moyenne quadratique du terme de reste du problème du cercle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 306, (1988) 151-154.