

Free fields realizations of $\mathcal{W}$ -algebras

京都大学・数理解析研究所 元良 直輝*

Naoki Genra

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

概要

The $\mathcal{W}$ -algebras are vertex superalgebras defined by the generalized Drinfeld-Sokolov reductions. We show that the $\mathcal{W}$ -algebras for generic levels are constructed as intersections of kernels of screening operators and give some applications for free fields realizations of the $\mathcal{W}$ -algebras.

1 研究の背景

二次元共形場理論の中で Zamolodchikov らによって発展した $\mathcal{W}$ 代数は, Feigin-Frenkel によって一般の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と複素数 k に付随して, Drinfeld-Sokolov 還元によって拡張されて定義された (これを $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ と表す). これは Fateev-Lukyanov によるスクリーニング作用素によって定義された A_n 型, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数と一致した [FL, FF]. さらに一般に次のような定理が成り立つことを証明されている (これを $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現と呼ぶ):

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [FF]). k を generic とすると, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{g}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz.$$

ただし $\int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルート α_i に付随するスクリーニング作用素, $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である.

ところが Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は, B_n 型の Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n+1})$ と一致しなかった. 一方で Kac-Roan-Wakimoto は Feigin-Frenkel の定義を拡張し, $\mathfrak{g}, k$ およびべき零元 $f \in \mathfrak{g}$ に付随して $\mathcal{W}$ 代数を定義した (第 3 章参照). このとき $\mathfrak{g}$ は Lie 代数のみならず Lie 超代数の場合にまで拡張された. すると彼らの計算によって, Fateev-Lukyanov による B_1 型の $\mathcal{W}$ 代数が Lie 超代数 $\mathfrak{osp}(1, 2)$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致することが示された (ただし f は正則べき零元となるようにとる). 一般には次のように予想されていた ([IMP, Watts]):

予想 1.2. $k \neq -n - \frac{1}{2} (= h^\vee)$ に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n)) \simeq \mathcal{W}B_n^k.$$

ただし $\mathcal{W}B_n^k$ は Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数である.

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

本稿ではこの予想を証明する。そのためにより一般的な自由場実現に関する定理 (定理 4.1, 4.2) を証明し、さらなる応用として定理 4.4 を証明する。

2 頂点代数

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が頂点代数であるとは、0 でないベクトル $1 \in V$, V 上の線形写像 $\partial : V \rightarrow V$, さらに V から V 上の線形写像を係数にもつ形式的べき級数全体 $\text{End}V[[z]]$ (z は独立変数) への線形写像

$$Y : V \ni A \mapsto Y(A, z) = A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \text{End}V[[z]]$$

が与えられていて、次を満たしているときをいう:

- (局所ローラン級数) 任意の $A, B \in V$ に対し, $A_{(n)}B = 0$ for all $n \gg 0$.
- (真空ベクトル) $Y(1, z) = \text{Id}_V$ であり, 任意の $A \in V$ に対し, $Y(A, z) \cdot 1|_{z \rightarrow 0} = A$.
- (変換作用素) $\partial \cdot 1 = 0$ かつ $[\partial, Y(A, z)] = Y(\partial A, z)$.
- (局所性) 任意の $A, B \in V$ に対し, ある $N \in \mathbb{Z}$ が存在し, $(z-w)^N[Y(A, z), Y(B, w)] = 0$.

$A \in V$ に対し $A(z)$ を A に対応する V 上の場という。二つ目の条件から Y が単射であることが分かる。よって V 上のベクトルと Y の像は一対一対応になっており、これを場と状態の対応という。また V が超ベクトル空間 ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けされたベクトル空間) のとき, $1 \in V$ および ∂, Y のパリティが even かつ局所性の括弧積を超括弧積と見なすことにすれば, V は頂点超代数の構造をもつという。

3 $\mathcal{W}$ 代数

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 Lie 代数または basic classical な Lie 超代数, $f \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の (パリティが even な) べき零元, $k \in \mathbb{C}$, Γ を $\mathfrak{g}$ の半整数次数付け

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

であって, f に関する "good" な条件 ($f \in \mathfrak{g}_{-1}$ であって, $\text{ad} f : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq -\frac{1}{2}$ のとき単射かつ $j \leq -\frac{1}{2}$ のとき全射) を満たすとする。このとき $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H(C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$$

が定義される [KRW]。ただし $(C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$ は $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する (一般化された) Drinfeld-Sokolov 還元によって定義されるコホモロジー複体である。このとき $C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は頂点超代数の構造をもち, そのコホモロジーである $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ も $C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ から誘導された頂点超代数構造をもつ。

ペア $(\mathfrak{g}, f)$ に対し, Jacobson-Molozov の定理から $\mathfrak{sl}_2$ -triple $\{e, h, f\} \subset \mathfrak{g}$ が存在し, このとき半単純元 $x = \frac{1}{2}h$ は随伴作用によって $\mathfrak{g}$ に半整数次数付けを与え, これは f について good な次数付けになる。したがって f について good な Γ はいつでも存在する。一方で, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は Γ のと

り方によらず同じ頂点超代数構造をもつことが知られている。そこで g, f, k に付随する (同じ頂点超代数構造をもつ) $\mathcal{W}$ 代数を $\mathcal{W}^k(g, f)$ と表す。 f が g の正則べき零元のとき、これは Feigin-Frenkel によって定義された $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(g)$ と一致する。

4 主結果

主定理を述べるためにいくつか定義を準備する。まず三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{>0} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{<0}$$

に付随する制限ルート系 $([BG])$ を Δ^Γ とする。すなわち $\mathfrak{g}_0$ に含まれる Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ によって定まるルート系を Δ , $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$$

とすると $\Delta^\Gamma = \Delta_{>0} \sqcup \Delta_{<0}$ である。 Δ^Γ の正ルートを $\Delta_{>0}$ とする base を Π^Γ とおく。 Π^Γ は $\Delta_{>0}$ のうち indecomposable なルートの集まりになる。 $\Delta_{>0} \subset \Delta_+$ となるように Δ の単純ルート Π をとる。 Δ から誘導される Π と Π^Γ への半整数次数付けを Π_j, Π_j^Γ とすると, $\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_{\frac{1}{2}} \sqcup \Pi_1$, $\Pi^\Gamma = \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma \sqcup \Pi_1^\Gamma$ が成り立つ。ここで $\alpha \in \Pi^\Gamma$ に対し,

$$[\alpha] = (\alpha + \bigoplus_{\beta \in \Pi_0} \mathbb{Z}\beta) \cap \Pi^\Gamma, \quad [\Pi^\Gamma] = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi^\Gamma\}$$

とする。 $[\alpha]$ の元は α と同じ次数をもつ。 $\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$ に対し,

$$[\alpha] = [\beta] \iff \alpha - \beta \in \bigoplus_{\gamma \in \Pi_0} \mathbb{Z}\gamma$$

が成り立つ。 $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ とその不変双線形形式

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_g(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

(ただし $u, v \in \mathfrak{g}_0$ は任意、 $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の最長ルートの長さの二乗を 2 に正規化した非退化双線形形式、 κ_g は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式) に付随するアファイン頂点超代数とする。 $u \in \mathfrak{g}_0$ に対応する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 上の場を $u(z)$ とおくと、 $u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u, v](w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ。ただし右辺は左辺の $z = w$ に関する特異部のみを表示している (作用素積展開という)。 $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ とその超反対称双線形形式

$$\langle u | v \rangle = (f | [u, v])$$

($u, v \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ は任意) に付随する中立フェルミオン頂点超代数とする。 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} (\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}})$ に対応する $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ 上の場を $\Phi_\alpha(z)$ とおくと、 $\alpha, \beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}$ に対し

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{\langle u | v \rangle}{z-w}$$

が成り立つ。次が主定理である。

定理 4.1. k を generic とする. このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{[\beta] \in [\Pi_1^\Gamma]} \text{Ker} \sum_{\alpha \in [\beta]} (f|e_\alpha) \int S^\alpha(z) dz \cap \bigcap_{[\beta] \in [\Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma]} \text{Ker} \sum_{\alpha \in [\beta]} \int S^\alpha(z) \Phi_\alpha(z) dz.$$

ただし $S^\alpha(z)$ は $\alpha \in \Pi^\Gamma$ に付随する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ に作用するスクリーニング作用素 ($[G]$) である.

特に $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となるように Γ がとれるとき $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ は $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ に一致する. また $\Pi^\Gamma = \Pi$ であり

$$S^\alpha(z) = e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)}$$

が成り立つ. ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である. したがって次を得る.

定理 4.2. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ かつ k が generic のとき, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha \in \Pi_1 \\ (f|e_\alpha) \neq 0}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} dz \cap \bigcap_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} \Phi_\alpha(z) dz.$$

$\mathfrak{g}$ が Lie 代数かつ f を正則べき零元とすると $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となり, このとき定理 4.2 は定理 1.1 を復元する. また $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$ かつ f を ($\mathfrak{g}$ の even パートの) 正則べき零元とすると $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ なる good な次数付けが存在し, 定理 4.2 を適用すると次が得られる:

命題 4.3.

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n)) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz \cap \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_n(z)} \Psi(z) dz.$$

右辺の式は Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数の定義に一致するので, これで予想 1.2 が証明された.

予想 1.2 は定理 4.2 を用いて証明されたが, 定理 4.1 にも応用がある. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ かつ f を副正則べき零元として, 定理 4.1 を適用すると次が得られる (詳細は略).

定理 4.4. $k \neq -n (= h^\vee)$ に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f) \simeq \mathcal{W}_n^{(2), k}.$$

ただし $\mathcal{W}_n^{(2), k}$ は Feigin-Semikhatov の $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数 ([FS]) である.

定理 4.4 は $n = 2, 3$ のとき知られており, 一般には予想とされていた ([ACGHR]).

参考文献

[ACGHR] H. R. Afshar, T. Creutzig, D. Grumiller, Y. Hikida, P. B. Rønne. Unitary $\mathcal{W}$ -algebras and three-dimensional higher spin gravities with spin one symmetry. *J. High Energy Phys.*, (6), 063, 2014.

- [BG] J. Brundan, S. M. Goodwin. Good grading polytopes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3), 94(1):155–180, 2007.
- [FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.
- [FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel’fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.
- [FS] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov. $\mathcal{W}_n^{(2)}$ -algebras. *Nuclear Phys.*, B 698(3):409–449, 2004.
- [G] N. Genra. Screening operators for $\mathcal{W}$ -algebras. arXiv:1606.00966.
- [IMP] K. Ito, J. O. Madsen, J. L. Petersen. Free field representations of extended superconformal algebras. *Nuclear Phys.*, B 398(2):425–458, 1993.
- [KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [Watts] G. M. T. Watts. WB_n symmetry, Hamiltonian reduction and $B(0, n)$ Toda theory. *Nuclear Phys.*, B 361(1):311–336, 1991.