

Vector bundle 上の  $H^p$  空間について

秋田大学 教育学部

坂 光一

序. ユークリッド空間上の  $H^p$  空間の理論は近年, E. M. Stein and G. Weiss [1], E. M. Stein [2], C. Fefferman and E. M. Stein [3] 等により実解析的視点から研究され, その理論は A. W. Korányi and S. Vagi [4], R. R. Coifman and G. Weiss [5] 等の研究により, homogeneous type の空間や compact Lie group 等の他の空間上へ拡張できることを示唆している。そこでは, たとえば, 一般コーシー・リーマン方程式とリース変換の関係にみられるよう, Singular integral の理論が中心的役割をはたしている。勿論 Singular integral の理論自身 maximal function 等他に重要な役割をはたすのであるが, Singular integral と微分方程式の関係に注目し, それを理論の出発点とした場合どうなるか考察したい。微分方程式として, E. M. Stein and G. Weiss [6] が指摘したように

/

ある種の変換群に対し不変な解をもつ一階線形微分方程式系を考えた。このような微分方程式を考える場合この理論はもはや  $H^p$  空間の範囲をこえてしまうが, I. M. Gelfand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro [7] にみられるよう物理学に現われる多くの重要な微分方程式がこのような微分方程式であるという事実によって, 研究に価する興味ある問題と思われる。今から試みるこの考察は, この研究の一部であり完全なものではない。

第一節 準備.  $G$  を locally compact group satisfying 2nd countable axiom の semidirect product group  $G = NK$  とする。ここに,  $N$  は normal abelian closed subgroup,  $K$  を compact subgroup とする。このような group  $G$  の例は K. I. Gross and R. A. Kunze [8], R. L. Lipsman [9] 等参照して下さい。  $\hat{N}$  を  $N$  の dual group,  $\hat{N}$  と  $K$  の semidirect product group を  $\tilde{G} = \hat{N}K$  とする。ただし,  $K$  の  $N$  の上への action を  $\bar{k}(n) = k n k^{-1}$ ,  $k \in K, n \in N$  とすれば  $K$  の  $\hat{N}$  の上への action  $\bar{k}(\xi) = k \xi k^{-1}$ ,  $k \in K, \xi \in \hat{N}$  を  $\langle \bar{k}(\xi), n \rangle = \langle \xi, \bar{k}^{-1}(n) \rangle$  で定義する。いま  $(\lambda, E)$  を  $K$  の irreducible unitary representation とし,  $\lambda$  によって induce される homogeneous vector bundle をとくと  $E = G \times_{\lambda} E$ ,

$\tilde{E} = \tilde{G} \times_{\lambda} E$  とする。このとき  $E$  上の  $L^2$  cross section  $L^2(E)$  は  $N$  上の  $E$ -valued  $L^2$  function  $L^2(N; E)$  で、その  $G$ -action は  $\pi(n_0 k_0) f(n) = \lambda(k_0) f(k_0^{-1} n_0^{-1} n)$  となる。さらに  $L^2(E) = L^2(N; E) \cong L_{\lambda}^2(G; E) \equiv \{ f \in L^2(G; E) : f(gk) = \lambda(k^{-1}) f(g), g \in G, k \in K \}$  となる。同様に  $L^2(\tilde{E}) = L^2(\hat{N}; E) \cong L_{\lambda}^2(\tilde{G}; E) \equiv \{ f \in L^2(\tilde{G}; E) : f(\xi k) = \lambda(k^{-1}) f(\xi), \xi \in \tilde{G}, k \in K \}$  となる。 $L^2(N; E) \cong L_{\lambda}^2(G; E)$  の同型写像は  $f(n) \rightarrow \hat{f}(g)$ ,  $\hat{f}(g) = \lambda(k^{-1}) f(n)$ ,  $g = nk$  で与えられる。以後これらの空間は区別しないで用いる。

定義 1  $f \in L^1(N; E)$  または  $f \in L_{\lambda}^1(G; E)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(\xi) = \int_N \langle \xi, \overline{n} \rangle f(n) dn$  または  $\hat{f}(\xi k) = \int_N \langle \xi, \overline{n} \rangle \lambda(k^{-1}) f(n) dn$  と定義する。ただし,  $\langle \overline{\phantom{x}} \rangle$  は複素共役を意味する。  $\xi \in \hat{N}$ 。

$\tau(k)$  を  $k \in K$  の left regular representation, つまり  $\tau(k) f(g) = f(k^{-1} g)$ ,  $f \in L_{\lambda}^2(G; E)$ , また  $\tau(n)$  を  $N$  による left regular representation, つまり  $\tau(n) f(g) = f(n^{-1} g)$ ,  $f \in L_{\lambda}^2(G; E)$  とする。

Lemma 1 (i)  $f \in L_{\lambda}^1(G; E)$ ,

$$\hat{f}(\tau(n_0) f)(\xi k) = \langle \xi, \overline{n_0} \rangle \hat{f}(\xi k)$$

$$(ii) \tau(k_0) \hat{f} = \hat{f} \tau(k_0)$$

Lemma 2 (Plancherel and Parseval formula)

$h, f \in L^2(N; E) \cap L^1(N; E)$  とする。

$$(i) \int_N \langle f(n), h(n) \rangle dn = \int_{\hat{N}} \langle \mathcal{F}f(\xi), \mathcal{F}h(\xi) \rangle d\xi$$

$$(ii) \int_N |f(n)|^2 dn = \int_{\hat{N}} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

Lemma 2 により  $\mathcal{F} \in L^2(N; E)$  に拡張される。それも同じく  $\mathcal{F}$  とかくことにする。

Lemma 3 (Multiplier theorem)

$T: L^2(N; E) \rightarrow L^2(N; E)$  bounded linear operator  
 $N$ -action invariant  
 $\Downarrow$

$\mathcal{F}(Tf)(\xi) = \sum_i m_i(\xi) \hat{f}_i(\xi) v_i$ , とある  $m_i \in L^\infty(\hat{N})$  が存在する。ただし  $f(n) = \sum_i f_i(n) v_i$ ,  $\{v_i\}$  は  $E$  の basis  
 $\hat{f}_i$  は  $f_i$  の Fourier transform とする。

$\tau(K)$  ( $K \in \mathcal{K}$ ) による  $L^2(E)$ ,  $L^2(\hat{E})$  の primary representation decomposition をとくと、 $L^2(E) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_\pi$ ,  $L^2(\hat{E}) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \tilde{\mathcal{H}}_\pi$  とする。ここに、 $\hat{K}$  は  $K$  の irreducible unitary representation の equivalence class とする。このとき、  
 $\mathcal{H}_\pi = \left\{ \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}g) dk ; f \in L^2_\lambda(G; E) \right\}$   
 $= \left\{ \int_K \chi_\pi(k) \pi(k) f(k^{-1}(n)) dk ; f \in L^2(N; E) \right\}$   
 $\tilde{\mathcal{H}}_\pi = \left\{ \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}\tilde{g}) dk ; f \in L^2_\lambda(\hat{G}; E) \right\}$

$= \left\{ \int_K \chi_\pi(k) \lambda(k) f(k^{-1}(z)) dk ; f \in L^2(N; E) \right\}$  となる。 $\chi_\pi$  は  $\pi \in \hat{K}$  の character である。

$P_\pi : L^2(E) \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  ,  $P_\pi f(g) = \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}g) dk$ ,  
 $\tilde{P}_\pi : L^2(\tilde{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\pi$  ,  $\tilde{P}_\pi f(\hat{g}) = \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}\hat{g}) dk$   
 はそれぞれ projection map になる。

Lemma 4  $\tilde{f} : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\pi$  は unitary isomorphism となり,  $\tilde{f} P_\pi = \tilde{P}_\pi \tilde{f}$  である。

定義 2  $K > K_0$  closed subgroup,  $N_0 = \{n \in N : k(n) = n, \forall k \in K_0\}$ ,  $N_0 > C$  subset,  $K_0 = \{k \in K : k(r) = r, \forall r \in C\}$  と存在するものとする。 $\Sigma = K/K_0$  とおく。 $\Sigma \times C \rightarrow N$  ( $kK_0, r$ )  $\rightarrow k(r)$  が one-to-one, onto open subset  $N'$  such that its complement in  $N$  has Haar measure zero のとき,  $(\Sigma, C)$  を  $N$  の polar decomposition ということにする。同様に  $\hat{N}$  の polar decomposition も定義できる。以後  $N, \hat{N}$  の polar decomposition  $(\Sigma, C), (\Sigma, \tilde{C})$  を一つ固定して考える。

Lemma 5  $f \in L^1(N; E)$  なる

$$\begin{aligned} \int_N f(n) dn &= \int_C \left( \int_\Sigma f(k(r)) dk \right) dr \\ &= \int_C \left( \int_K f(k(r)) dk \right) dr \end{aligned}$$

となる measure  $dk, dr$  が存在する。

$\lambda$  の  $K_0$  への制限を  $\lambda_0$  とし,  $\lambda_0$  から induce される  $\Sigma$  上の homogeneous vector bundle を  $E_0 = K \times_{\lambda_0} E$  とする.  $K$  の left regular representation による primary representation decomposition を  $L^2(E_0) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_\pi$  とする. 前にも述べたように  $L^2(E_0) \cong L^2_{\lambda_0}(K; E) = \{f \in L^2(K; E) :$

$f(kk_0) = \lambda_0(k_0^{-1})f(k), k \in K, k_0 \in K_0\}$  は区別 (区別) である。

Lemma 6  $f(k_1(r)k) = f_1(r) \lambda(k^{-1}k_1) f_2(k)$

( $k_1, k \in K, r \in C$ ),  $f_1 \in L^2(C, dr)$ ,  $f_2 \in \mathcal{H}_\pi$  の形の  $f \in L^2(G; E)$  全体は  $\mathcal{H}_\pi$  を生成する。

$(\lambda_0, E)$  を  $K_0$  の表現として irreducible unitary representation decomposition する。すなわち

$(\lambda_0, E) = (\lambda_1, E_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_p, E_p)$  とする。

Lemma 7  $\Sigma$  の decomposition による次の自然な decomposition がある。

$$(i) \quad L^2_{\lambda_0}(K; E) = L^2_{\lambda_1}(K; E_1) \oplus \cdots \oplus L^2_{\lambda_p}(K; E_p)$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_{\pi_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{\pi_p}$$

$$(iii) \quad L^2_{\lambda_i}(K; E_i) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_{\pi_i}$$

Lemma 7 によつて  $\lambda_0$  を irreducible unitary representation of  $K_0$  としてよい。以後の節はことわらない限り同じ記号を用いる。

第二節 Spherical harmonic の一般化  $\pi \in \hat{K}$  の  $K_0$  への制限を  $\pi_0$  とする。いま  $\lambda_0$  は irreducible と仮定する。 $\lambda_0$  の  $\pi_0$  における multiplicity を  $m(\pi)$  とし,  $\dim H_\pi = d(\pi)$ ,  $\dim E = d(\lambda)$  とおく。 $\{e_i\}$ ,  $\{v_j\}$  をそれぞれ  $H_\pi$ ,  $E$  の orthonormal basis とし, この二は compatible とする。 $(H_\pi$  は  $\pi$  の表現空間)

$t_{ij}^\pi(k) = (e_i, \pi(k)e_j)$ ,  $k \in K$ ,  $i, j = 1, \dots, d(\pi)$  とおく。

定理 1  $Y_{ni}^\pi(k) = c \sum_{l=1}^{d(\lambda)} t_{ni_l}^\pi(k) v_l$ ,  $c = \sqrt{\frac{d(\pi)}{d(\lambda)}}$ ,  
 $n = 1, \dots, d(\pi)$ ,  $i = 1, \dots, m(\pi)$ ,  $i_l = (i-1)d(\lambda) + l$   
 は  $H_\pi$  の orthonormal basis である。

系  $\lambda_0$  が一般の場合, つまり,  $\lambda_0 = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_p$  (既約分解) のとき  $L_{\lambda_t}^2(K; E_t)$  の orthonormal basis は  
 $\{Y_{ni}^{\pi_t}\} \pi \in \hat{K}$ ,  $n = 1, \dots, d(\pi)$ ,  $i = 1, \dots, m_t(\pi)$ ,  
 $Y_{ni}^{\pi_t}(k) = c_t \sum_{l=1}^{d(\lambda_t)} t_{ni_l}^{\pi_t}(k) v_{l(t)}$ ,  $m_t(\pi)$  は  $\lambda_t$  の  $\pi_0$  における multiplicity  
 $\dim E_t = d(\lambda_t)$ ,  $c_t = \sqrt{\frac{d(\pi)}{d(\lambda_t)}}$ ,  $\{v_{l(t)}\}$  ( $E_t$  の orthonormal basis) によって  $L_{\lambda_0}^2(K; E)$  の  
 orthonormal basis は  $\{Y_{ni}^{\pi_t}\} \pi \in \hat{K}$ ,  $t = 1, \dots, p$ ,  $n = 1, \dots, d(\pi)$   
 である。

注意  $N = \mathbb{R}^n$  ( $n$  次元ユークリッド空間),  $K = SO(n)$ ,  $K_0 = SO(n-1)$  ( $n \geq 3$ ) のとき  $\lambda = \text{trivial representation}$  とすれば  
 上の  $Y_{ni}^\pi$  は spherical harmonics である。

Lemma 8  $f(k_1(r)k) = f_1(r) \lambda(k_1^{-1}k_1) Y_{ni}^{\pi_t}(k_1)$ ,  
 $f_1 \in L^2(\mathbb{C})$ ,  $t = 1, \dots, p$ ,  $n = 1, \dots, d(\pi)$ ,  $i = 1, \dots, m_t(\pi)$

の  $\pi$  の  $f \in L^2(G; E)$  は  $\mu_\pi$  を生成する。

Lemma 9 (i)  $Y_{ni}^\pi(k, k_2) = \sum_{l=1}^{d(\pi)} t_{nl}^\pi(k_1) Y_{li}^\pi(k_2)$

(ii)  $\int_K \langle Y_{ni}^{\pi t}(k, k'), Y_{mi}^{\pi t}(k) \rangle dk = c t_{nm}^\pi(k')$

Lemma 10  $\lambda_0 = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_p$  (既約分解),  $F_n \in L^2_{\lambda_0}(K; E)$

$n=1, \dots, d(\pi)$  で  $F_n(k, k_2) = \sum_{i=1}^{d(\pi)} t_{ni}^\pi(k_1) F_i(k_2)$  とする。

このとき  $F_n(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{m_j(\pi)} A_i^j Y_{ni}^{\pi_j}(k)$ ,  $\therefore A_i^j = (d(\lambda_j) d(\pi))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d(\lambda_j)} f_{lj}^i$ ,  $F_n(k) = \sum_{j=1}^p F_n^j(k)$ ,  $F_n^j \in L^2_{\lambda_j}(K; E)$   
 $F_n^j(e) = \sum_{m=1}^{d(\lambda_j)} f_{mj}^n \sigma_{mj}$ ,  $\{\sigma_{mj}\}$  は  $E_j$  の orthonormal basis, とする。  $e$  は  $K$  の単位元。

定理 2 (Bochner の定理の一般化).  $f_1 \in L^2(C)$  で

$f(n) \equiv f(k_1, r_1) \equiv f_1(r) \lambda(k_1) Y_{ns}^{\pi t}(k_1)$  のとき,  
 $f(\xi) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{m_j(\pi)} f_{ji}^\pi(\xi_0) \lambda(k_2) Y_{ni}^{\pi_j}(k_2)$ ,  $\xi = k_2(\xi_0)$

とある。また  $f_{ji}^\pi(\xi_0) = \int_C f_1(r) A_i^j(\xi_0, r) dr$  で  
 $A_i^j = (d(\pi) d(\lambda_j))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d(\lambda_j)} \sum_{m=1}^{d(\lambda_l)} \int_K \langle \xi_0, k_1(r) \rangle t_{il}^\pi t_{jm}^\pi(k_1)$   
 $\overline{t_{lj}^{\pi(t)}(k_1)} dk_1$  とする。

注意.  $N = \mathbb{R}^n$ ,  $K = SO(n)$ ,  $K_0 = SO(n-1)$ ,  $n \geq 3$ ,  $\lambda =$  trivial のとき  $p=1$ ,  $d(\lambda)=1$ ,  $m(\pi)=1$  ( $\pi$  class 1 表現と  
 する) から上の定理 2 はよく知られた Bochner の定理である。

特に  $A(t, r) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i r t \langle 1, \xi \rangle} t_{11}^\pi(\xi) d\xi$   
 $= c \int_0^1 e^{-2\pi i r t s} p^{(n-2)/2}(s) (1-s^2)^{(n-2)/2} ds$  ( $p$   
 $= c J_{n+\frac{n-2}{2}}(2\pi r t)$ ,  $P_n^2$  Gegenbauer polynomial,

$J_k$  Bessel function とする  $f^*(t) = \int_0^\infty f_1(r) A(t, r) r^{n/2} dr$   
 $= c \int_0^\infty f_1(r) J_{k + \frac{n-2}{2}}(2\pi t r) r^{n/2} dr$ , とする。

### 第 3 節 Boundary 上の関数に対する Multiplier 定理

Lemma 11  $L : L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$  は  $L\tau(k) = \tau(k)L$  とする linear operator とする。このとき  $L : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  とする。さらに  $(LY_{ni}^{\pi t})(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi t j} Y_{ns}^{\pi j}(k)$  とする。こゝに  $(LY_{ni}^{\pi t})(k) = \sum_{j=1}^p F_n^j(k)$ ,  $F_n^j \in L^2_{\lambda_j}(K; E_j)$ ,  $F_n^j(e) = \sum_{m=1}^{d(\lambda_j)} f_{m(j)}^n \psi_{m(j)}$ ,  $A_{is}^{\pi t j} = (d(\lambda_j) d(\pi))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d_j} f_{l(j)}^{\pi t j}$  とする。更に matrix  $(A^{\pi t j}) = (A_{is}^{\pi t j})_{i,s}$  とする。とき、  
 $LY_{ni}^{\pi t}(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi t j} Y_{ns}^{\pi j}(k)$  によって定まる, linear operator  $L : L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$  は  $L\tau(k) = \tau(k)L$  とする。

定義 3  $f \in L^2_{\lambda_0}(K; E)$ ,  $\pi \in \hat{K}$  に対し Fourier 変換を  
 $(\mathcal{F}_j f(\pi))_{ni} = \int_K \langle f(k), Y_{ni}^{\pi j}(k) \rangle dk$ ,  $j=1, \dots, p$ ,  
 $n=1, \dots, d(\pi)$ ,  $i=1, \dots, m_j(\pi)$ ,

$\mathcal{F}_j f(\pi) = ((\mathcal{F}_j f(\pi))_{ni})_{n=1, \dots, d(\pi); i=1, \dots, m_j(\pi)}$  matrix

$\mathcal{F} f(\pi) = (\mathcal{F}_j f(\pi))_{j=1, \dots, p}$  matrix と定義する。

Lemma 12  $L : L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$  で  $\tau(k)L = L\tau(k)$  とする linear operator とする。さらに  
 $LY_{ni}^{\pi t}(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi t j} Y_{ns}^{\pi j}(k)$  とおき,  $A^{\pi t j} = (A_{is}^{\pi t j})_{i,s}$   
 $i=1, \dots, m_0(\pi)$ ,  $s=1, \dots, m_j(\pi)$  matrix,  $A^\pi = (A^{\pi t j})_{t,j}$

$t=1, \dots, p; j=1, \dots, p$  matrix とおけば  $Lf(\pi) = \sum_{t=1}^p (\sum_{j=1}^p f(\pi) A_{ts}^{\pi t j}) A_{ts}^{\pi t j}$   
 $\sum Lf(\pi) = \sum f(\pi) A^{\pi}$ ,  $f \in L^2_{\lambda_0}(K; E)$  とする。

Lemma 13  $L: L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$ ,  $z(\pi)L = Lz(\pi)$   
 とする linear operator とする。  $LY_{ni}^{\pi t}(\pi) = \sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi t j} Y_{ns}^{\pi j}$  とおく。  
 $L$  bounded  $\Leftrightarrow \sup_{\pi, t, i} (\sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} |A_{is}^{\pi t j}|^2)^{1/2} < \infty$

Lemma 14 linear operator  $L: L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$   
 が  $Lz(\pi) = z(\pi)L$  である必要十分条件は各  $\pi \in K$  に対して  
 $Lf(\pi) = \int_K h_{\pi}(\pi') f(\pi \pi'^{-1}) d\pi' = h_{\pi} * f$ ,  $\forall f \in \mathcal{H}_{\pi}$  とする  
 $h_{\pi} \in L^2(K; \mathcal{L}(E))$  が存在することである。ここに,  $\mathcal{L}(E)$  は  
 $E$  から  $E$  への linear operator 全体の空間とする。さらに,  
 このとき,  $LY_{ni}^{\pi t} = \sum_{j=1}^p \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi t j} Y_{ns}^{\pi j}$  とおけば  
 $\langle h_{\pi}(\pi) \psi_{u(t)}, \psi_{u(s)} \rangle = \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} c_t c_j A_{is}^{\pi t j} t_{i_u s_u}^{\pi}(\pi)$  とする。

定理 3  $L: L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow L^2_{\lambda_0}(K; E)$  線形写像で  
 $z(\pi)L = Lz(\pi)$  を満たし, さらに  $L: L^2_{\lambda_j}(K; E_j) \rightarrow L^2_{\lambda_j}(K; E_j)$   
 $j=1, \dots, p$  とする。このとき,  $Lf(\pi) = h_{\pi} * f(\pi) =$   
 $\int_K h_{\pi}(\pi') f(\pi \pi'^{-1}) d\pi'$ ,  $\forall f \in \mathcal{H}_{\pi}$  とする。ここに,  $LY_{ni}^{\pi j}(\pi)$   
 $= \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi j} Y_{ns}^{\pi j}(\pi)$  とおけば,  $h_{\pi}(\pi) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{m_j(\pi)} \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A_{is}^{\pi j} h_{si}^{\pi j}(\pi)$ ,  
 $h_{is}^{\pi j}(\pi) = d(\pi) \sum_{\ell=1}^{d(\lambda_j)} t_{i_{\ell} s_{\ell}}^{\pi}(\pi)$ ,  $i, s=1, \dots, m_j(\pi)$ ,  $j=1, \dots, p$  とする。  
 逆に各  $\pi \in K$  に対し  $Lf(\pi) = h_{\pi} * f(\pi)$ ,  $\forall f \in \mathcal{H}_{\pi}$

$h_{\pi} \in L^2(K)$  の形の linear operator  $L: L^2_{\lambda_0}(K; E) \rightarrow$   
 $L^2_{\lambda_0}(K; E)$  は  $z(\pi)L = Lz(\pi)$  7  $L: L^2_{\lambda_j}(K; E_j) \rightarrow L^2_{\lambda_j}(K; E_j)$

$j=1, \dots, p$  を満たす。

例  $K = SO(3)$ ,  $K_0 = SO(2)$ ,  $N = E = \mathbb{R}^3$ ,

$\lambda(k) = k : E \rightarrow E$ ,  $k \in K$  とする。このとき,  $\lambda_0 = 1 + \lambda$ ,

(既約分解)は 1 trivial 表現,  $\lambda_1(k_0) = k_0 : E_1 \rightarrow E_1$ ,

$k_0 \in K_0$ ,  $E_1 = \mathbb{R}^2$  とする。  $L_{\lambda_0}^2(K; E) = L^2(S^2) + L_{\lambda_1}^2(K; E_1)$

,  $S^2$  unit sphere  $\hat{K}$  の元は highest weight  $m = 0, 1, \dots$

によって定まる。これを  $\pi(m)$  とかく。  $L_{\lambda_0}^2(K; E)$  の ortho-

normal basis は  $Y_n^{\pi(m)0}(k) = c_0 t_{n0}^{\pi(m)} \psi_0$ ,  $Y_n^{\pi(m)1}(k) =$

$c_1 (t_{n1}^{\pi(m)} \psi_1 + t_{n2}^{\pi(m)} \psi_2)$  とする。定理 3 の kernel function

$h_{\pi(m)} \equiv h_m$  として  $h_m(k) = d(\pi(m)) \sum_{l=0}^2 t_{ll}^{\pi(m)}(k) \bar{t}_l$  とおけば

$\sum_{m=0}^{\infty} |n|^m h_m(k) = p(n, k)$ ,  $|n| < 1$  は poisson kernel

の極限値になっている。つまり,  $k = k(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$  Euler

angular 表示 とすれば  $t_{00}^{\pi(m)}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = c P_m(\cos \theta)$

Legendre polynomial,  $t_{11}^{\pi(m)}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \bar{e}^{i\varphi_2} P_{11}^m(\cos \theta) \bar{e}^{i\varphi_1}$ ,

$t_{22}^{\pi(m)}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{i\varphi_2} P_{22}^m(\cos \theta) e^{i\varphi_1}$ ,  $P_{11}^m(\mu) = K(1+\mu)$

$P_{m-1}^{02}(\mu)$  (Jacobi polynomial)  $\therefore \sum_{m=0}^{\infty} |n|^m h_m(k)$

$= c \sum_{m=0}^{\infty} |n|^m (2m+1) P_m(\cos \theta) + K(1+\cos \theta) e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)$

$|n|^m P_{m-1}^{02}(\cos \theta) + K(1+\cos \theta) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \sum_{m=1}^{\infty} |n|^m (2m+1) P_{m-1}^{02}$

$(\cos \theta)$  とする。  $\sum_{m=1}^{\infty} |n|^m (2m+1) P_m(\cos \theta)$  は通常の poisson

kernel  $\therefore$ ,  $\lambda$  は trivial なるこの項のみである。

## 引用文献

- [1] E. M. Stein and G. Weiss : On the theory of harmonic functions of several variables I, Acta Math., 103, 25 - 62 (1960)
- [2] E. M. Stein : On the theory of harmonic functions of several variables II, Acta Math., 106, 137 - 174 (1961)
- [3] C. Fefferman and E. M. Stein :  $H^p$  spaces of several variables, Acta Math., 129, 137 - 193 (1972)
- [4] A. W. Korányi and S. Vági, Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Math. 25, 575 - 648, (1971).
- [5] R. R. Coifman and G. Weiss : Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes, Lecture Notes in Math. 242, Springer (1971)
- [6] E. M. Stein and G. Weiss : Generalization of the Cauchy - Riemann equations and representations

of the rotation group, Amer. J. Math. 90,  
163 - 196 (1968)

[7] I.M. Gelfand, R.A. Minlos and Z. Ya. Shapiro:  
Representations of the rotation and Lorentz groups  
and their applications (translation) Pergamon Press  
(1963)

[8] K. I. Gross and R. A. Kunze : Bessel functions  
and representation theory I, J. Functional Analy.  
22, 73 - 105 (1976)

[9] R. L. Lipsman : Group representations,  
Lecture notes in Math. 388, Springer-Verlag (1974).