

トロピカル平面曲線の交わりに関する実現問題

助永 真之

広島大学 先進理工 D2

2022 年 10 月 19 日

トロピカル平面曲線

トロピカル代数

$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上に加法と乗法を次で定めたものをトロピカル代数という.

- (加法) $x \oplus y := \max(x, y)$
- (乗法) $x \odot y := x + y$ (通常のと)

トロピカル多項式

2変数トロピカル多項式とは次の形の有限和:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j \quad ((i,j) \in \mathbb{Z}^2, c_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ 現れない項: } c_{ij} = -\infty).$$

→ 次のように関数を定める:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ (s, t) &\mapsto \max(c_{ij} + is + jt). \end{aligned}$$

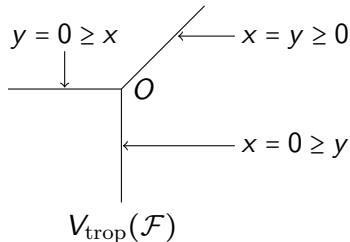
トロピカル平面曲線

トロピカル平面曲線

トロピカル多項式 $\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ の定める トロピカル平面曲線 とは

$$V_{\text{trop}}(\mathcal{F}) := \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \exists (k, l), (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \ ((k, l) \neq (m, n)) \text{ s.t.} \\ c_{kl} + ks + lt = c_{mn} + ms + nt = \mathcal{F}(s, t) \end{array} \right. \right\}.$$

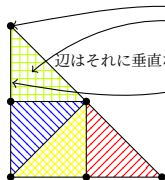
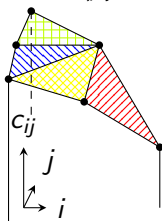
例: $\mathcal{F} = x \oplus y \oplus 0$ のとき.



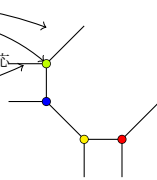
双対定理

$\mathcal{F} = \oplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ の係数から定まる 2 次元複体 $\Delta_{\mathcal{F}}$ と $V_{\text{trop}}(\mathcal{F})$ は双対.

例: $\mathcal{F} = x^2 \oplus 4xy \oplus 4y^2 \oplus 2x \oplus 4y \oplus 3$.



$\Delta_{\mathcal{F}}$



$V_{\text{trop}}(\mathcal{F})$

k : 非自明な付値を持つ代数閉体.

トロピカル化

• 点のトロピカル化: $\text{trop}: (k^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (-\text{val}(x), -\text{val}(y)).$

• 多項式のトロピカル化:

$$k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \ni f = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j \mapsto \bigoplus_{i,j} (-\text{val}(c_{ij})) x^i y^j =: \text{trop}(f).$$

• $\text{Trop}(V(f)) := \overline{\text{trop}(V(f))} = V_{\text{trop}}(\text{trop}(f)).$

• 実現問題: トロピカルな対象 Γ に対し, 代数多様体 (+条件) X で $\text{Trop}(X) = \Gamma$ となるようなものが存在するか.

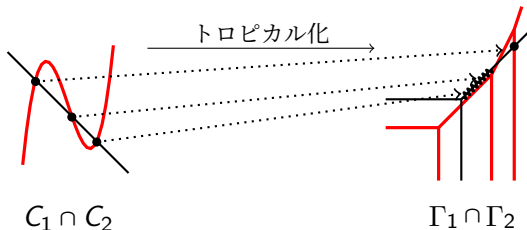
実現問題

- トロピカル平面曲線 Γ_1, Γ_2 の交わりの実現問題:

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ のどのような「因子」が $\text{trop}(C_1 \cap C_2)$ として表されるか.

ただし, $\text{Trop}(C_i) = \Gamma_i$ ($i = 1, 2$).

例: 右図の交わりの中から3点を選んだとき,
左図の交点のトロピカル化になっているか?



実現問題

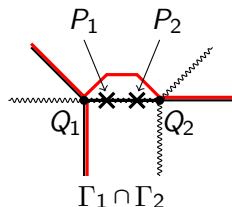
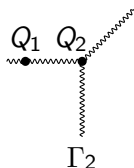
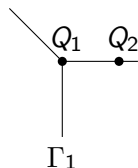
定理 [Morrison15] (必要条件)

Γ_1, Γ_2 : トロピカル平面曲線, D : 成分を値群に持つ点の形式和,
 E : Γ_1, Γ_2 の安定交叉因子とする.

代数曲線 $C_1, C_2 \in (k^*)^2$ が存在し, 次を満たすとする:

$$\bullet \operatorname{Trop}(C_i) = \Gamma_i \ (i = 1, 2), \quad \bullet \operatorname{trop}(C_1 \cap C_2) = D.$$

このとき, Γ_1 上のトロピカル有理関数 ψ が存在して, $(\psi) = D - E$,
 $\operatorname{Supp}(\psi) \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ を満たす (下図では赤線が ψ).



$$D = P_1 + P_2$$

$$E = Q_1 + Q_2$$

★ 逆は成り立たない. どのような条件を加えれば実現可能か.

主定理の条件

$\text{Trop}(V(f)) = \Gamma_1$ となる $f \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を固定し,
 $\text{Trop}(V(g)) = \Gamma_2$ となる $g \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を動かして D の実現を考える.
 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ の連結成分の内,

- ・ 交叉重複度が1の半直線全体からなる集合を $\mathcal{R}_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$,
- ・ 交叉重複度が2の線分全体からなる集合を $\mathcal{LS}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$ と書く.

$\mathcal{L}'_s \subset \mathcal{L}_s(\Gamma_1, \Gamma_2) := \mathcal{R}_1(\Gamma_1, \Gamma_2) \cup \mathcal{LS}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$ とし, 次の2つの条件を仮定:

条件1 (Morrison の条件)

D は成分を値群に持つ点の形式和, E は Γ_1, Γ_2 の安定交叉因子であり,
 Γ_1 上のトロピカル有理関数 ψ で次を満たすものが存在する:

$$(\psi) = D - E, \quad \text{Supp}(\psi) \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

また, $\mathcal{L}'_s$ に含まれる各半直線 L に対して, $D|_L$ は1点からなる.

条件2は次ページ.

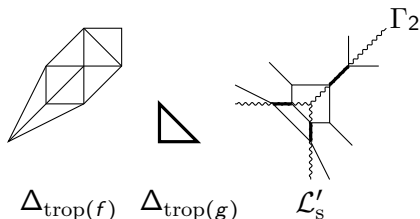
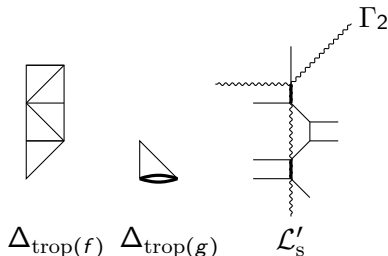
主定理の条件

条件 2 ($\mathcal{L}'_s \subset \mathcal{L}_s(\Gamma_1, \Gamma_2)$) に関する非輪状性

$\mathcal{L}'_s$ の元に対応する $\Delta_{\text{trop}(g)}$ の辺に印をつけたとき、印に重複はなく、また、印のついた辺の和からなるグラフは forest.

★ 条件 2 を 満たさない 例.

- ・ $\Delta_{\text{trop}(g)}$ の印に重複がある例
- ・ $\Delta_{\text{trop}(g)}$ の印の和が forest でない例



主定理

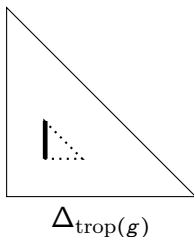
主定理 (の一つ)

$f, g \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, $\text{Trop}(V(f)) = \Gamma_1$, $\text{Trop}(V(g)) = \Gamma_2$ とする.
 D は条件 1 を満たすとし, $(\psi) = D - E$ とする. 条件 2 も仮定する.
各 $L \in \mathcal{L}'_s$ に対し, $\text{dist}(D|_L, E|_L)$ は十分小とする.
このとき, ある $g' \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ が存在して次が成立:

$$\text{trop}(g') = \text{trop}(g),$$

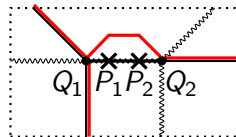
$$\text{trop}(V(f, g'))|_L = D|_L \quad (\forall L \in \mathcal{L}'_s).$$

印に重複はなく,
印の和は forest.



$$D|_L = P_1 + P_2$$

$$E|_L = Q_1 + Q_2$$



L の近傍

証明の鍵となる命題

仮定 $\Gamma_1 = \text{Trop}(V(f))$, $\Gamma_2 = \text{Trop}(V(g))$, $L \in \mathcal{L}_s(\Gamma_1, \Gamma_2)$, $g := \sum_{ij} d_{ij} x^i y^j$.

命題

$G \in (f, g)$ で $\text{Trop}(V(G)) \cap L$ が有限個の点になるようなものを求めるアルゴリズムが存在する. このとき, $\text{trop}(V(f, g)) \cap L = \text{Trop}(V(G)) \cap L$.

命題

D は条件 1 を満たすとする. L に対応する $\Delta_{\text{trop}(g)}$ の辺を $\bar{ij}$ とする. このとき, ある $d'_i \in k$ が存在して $g' := g - d_i x^i + d'_i x^i$ が次を満たす:

$$\text{trop}(g') = \text{trop}(g),$$

$$\text{trop}(V(f, g'))|_L = D|_L.$$

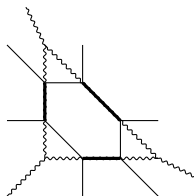
条件2を満たす例



$\Delta_{\text{trop}}(f)$



$\Delta_{\text{trop}}(g)$



$\mathcal{L}'_S$