

増大度 α の半群の生成作用素について

早大 理工 岡沢 登

本稿では有界線形作用素の作る非有界半群の一種である増大度 α の半群の生成作用素の肉苞を特徴付ける問題を取扱う。

Banach空間 X 上の有界線形作用素の全体からなる集合を $\mathcal{B}(X)$ で表わす。 $\mathcal{B}(X)$ 内の族 $\{T(t); t > 0\}$ が X 上の半群であるとは、 $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$ が成り立ち、また $T(t)$ が $t > 0$ で強連続であるときをいう。 X 上の半群 $\{T(t)\}$ の生成作用素 A_0 は、 $A_0 u = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} [T(h)u - u]$ によって定義される。

1. 増大度 α の半群とその生成定理

X 上の半群 $\{T(t)\}$ に対して

$$N_0 = \bigcap_{t>0} \{u \in X; T(t)u = 0\}, \quad X_0 = \bigcup_{t>0} T(t)[X]$$

とあこう。そのとき $\{T(t)\}$ が増大度 α ($\alpha \geq 0$)であるとは、次の三条件を満足することをいう。

(i) $N_0 = \{0\}$.

$$(ii) \|t^\alpha T(t)\| = O(1) \quad (t \rightarrow 0+).$$

$$(iii) \bar{X}_0 = X, \text{ 即ち } X_0 \text{ は } X \text{ で稠密である.}$$

増大度 α の半群の生成作用素は可閉であり、その閉包が存在する。但し、増大度 0 の半群は (C_0) 級半群に他ならず、その生成作用素はそれ自身閉作用素である。増大度 α の半群は Da Prato [1] によって α が非負整数の場合が導入され、その後 Sobolevskii [3], Zafievskii [6] 等によって一般の α の場合まで含めて論じられるようになったのであるが、[1, 3, 6] には生成定理の叙述は見当らない。

本稿の目的は増大度 α の半群に対する一つの生成定理を紹介することにある。

n を $\alpha > 0$ の整数部分とすれば、増大度 α の半群の生成定理は次のように述べられる。

定理 1.1 Banach 空間 X 内の閉線形作用素 A が増大度 α の半群の生成作用素の閉包であるためには、次の四条件を満足することが必要十分である。

(I) 実数 ω があって、 ω より大きいすべての ξ に対して、 $R(\xi - A) \cap D(A^{n+1})$ が成立し、かつ $(\xi - A)^{-1}$ が存在する。

(II) すべての $v \in D(A^{n+1})$ に対して

$$\|(\xi - A)^{-m}v\| \leq \frac{M}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{(\xi - \omega)^{m-\alpha}} \|v\|, \quad \xi > \omega, \quad m = k(n+1)$$

となるような正の定数 M が存在する。但し, $k = 1, 2, \dots$.

(III) $\overline{A|D(A^{n+2})} = A$, 即ち $D(A^{n+2})$ は A の芯であり, また $\overline{D(A)} = X$.

(IV) ω より大きいある b に対して $(b - A)^{n+1}$ は可逆である。

次の系は Zabreiko-Zafievskii [5] によって報いられているが, 定理 1.1 から容易に導くことが出来る。

系 1.2 X 内の閉作用素 A が増大度 α ($0 < \alpha < 1$) の半群の生成作用素の閉包であるためには, 次の三条件を満足することが必要十分である。

(I) 実数 ω があって, ω より大きいすべての ξ に対して $(\xi - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ が存在する。

(II) ω より大きい ξ と正整数 m に対して

$$\|(\xi - A)^{-m}\| \leq \frac{M}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{(\xi - \omega)^{m-\alpha}}$$

となるような正の定数 M が存在する。

(III) $\overline{D(A)} = X$.

注意 1.3 A を増大度 α の半群 $\{T(t)\}$ の生成作用素の閉包とすれば, 各 $u \in D(A^{n+1})$ に対して

$$T(t)u = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{m}A)^{-m}u, \quad t > 0,$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \|T(h)u - u\| = 0$$

が成立する。但し、 $n = [\alpha]$ 。

2. 準備

X 上の半群 $\{T(t)\}$ に対して

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t}, \quad \Sigma = \{u \in X; \lim_{h \downarrow 0} \|T(h)u - u\| = 0\}$$

とおく。また $\{T(t)\}$ の生成作用素 A_0 の

$$D(\Omega) = \{u \in D(A_0); A_0 u \in \Sigma\}$$

上への制限を Feller に従って Ω で表わすことにする。

補題 2.1 $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ なる各 λ に対して、 $R(\lambda - \Omega) = \Sigma$ であ

り、かつ $(\lambda - \Omega)^{-1}$ が存在する。更に

$$(2.1) \quad (\lambda - \Omega)^{-1}v = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)v dt, \quad v \in \Sigma.$$

次の補題は Zafievskii [6] によって報じられている。

補題 2.2 $N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$ ならば、 A_0 は可閉である。この

とき $A = \bar{A}_0$ とおけば、各 $u \in D(A)$ に対して次式が成立する：

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} T(t)u = A_0 T(t)u = T(t)A u, \quad t > 0.$$

証明 各 $u \in D(A_0)$ に対して

$$(2.3) \quad T(t)u - T(x)u = \int_x^t T(s)A_0 u \, ds, \quad t \geq x > 0$$

と書ける. $\{u_n\}$ を $D(A_0)$ 内の列で $u_n \rightarrow 0$ かつ $A_0 u_n \rightarrow v$ となるものとし, $v = 0$ をいおう. $R(A_0)$ は $\bar{X}_0$ に含まれるので $v \in \bar{X}_0$ である. (2.3) で $u = u_n$ とおいて, $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\int_x^t T(s)v \, ds = 0$ 従って t で微分して $T(t)v = 0$ となる. t は任意故, 結局 $v \in N_0 \cap \bar{X}_0$ が示された.

補題 2.3 $N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$ とし, $A = \bar{A}_0$ とおけば, $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ なる各 λ に対して, $(\lambda - A)^{-1}$ が存在する. このとき

$$(2.4) \quad (\lambda - A)^{-(m+1)} v = \frac{1}{m!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^m T(t) v \, dt, \quad v \in \Sigma.$$

証明 $(\lambda - A)^{-1}$ の存在だけを示す. (2.2) により各 $u \in D(A)$ と $t > 0$ に対して次式の成立することがわかる.

$$(2.5) \quad T(t)u = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t+s)(\lambda - A)u \, ds, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_0.$$

$\bar{X}_0 = \overline{D(A_0)}$ であるから, $u \in \bar{X}_0$ となっている. $(\lambda - A)u = 0$ ならば, (2.5) から $T(t)u = 0$ が得られる. 従って, $v \in N_0 \cap \bar{X}_0$.

A_0 が可閉ならば, 兎もそうなるが, 次の補題が成立する.

補題 2.4 $N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$ ならば, $\bar{\Omega} = \bar{A}_0$.

上の補題と例えば牛島 [4] の命題 2.4 を組合わせると

$\overline{\Omega D(\Omega^\infty)} = \bar{\Omega} = \bar{A}_0$ が得られる (尚 [2] の Cor. 2.3 も参照されたい). 但し, $D(\Omega^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(\Omega^m)$.

3. 増大度 α の半群の生成作用素

本節では定理 1.1 の必要性の方の証明の概略を述べる.

A_0 を増大度 α の半群の生成作用素とすれば, 条件 (i) により $A = \bar{A}_0$ が存在する (補題 2.2). このときまた $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ なる各 λ に対して $(\lambda - A)^{-1}$ が存在する (補題 2.3).

補題 3.1 $\{T(t)\}$ は増大度 α , $A = \bar{A}_0$ とする. m を正整数 λ を $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ なる複素数とすれば, 各 $u \in D(A^m)$ に対して

$$(3.1) \quad T(t)u = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty s^{m-1} e^{-\lambda s} T(t+s)(\lambda - A)^m u \, ds, \quad t > 0.$$

更に, $(\lambda - A)^m$ は可閉である.

証明 (2.5) があるから, $\frac{d}{ds}[s^m e^{-\lambda s} T(t+s)u] = m s^{m-1} e^{-\lambda s} \times T(t+s)u - s^m e^{-\lambda s} T(t+s)(\lambda - A)u$ に注意すれば, (3.1) が示せる. $(\lambda - A)^m$ が可閉なことを見るには, (3.1) を用いて補題 2.2 の証明に類する議論を行えばよい.

補題 3.2 $\{T(t)\}$ は増大度 α , $A = \bar{A}_0$ とする. そのとき

$$D(A^{n+1}) \subset \Sigma, \quad n = [\alpha].$$

証明 (3.1) から各 $u \in D(A^{n+1})$ に対して

$$u = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s) (\lambda - A)^{n+1} u ds, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_0$$

が得られる. あとは適当な $\omega > \omega_0$ に対して

$$(3.2) \quad \|t^\alpha T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t > 0$$

となるような定数 $M > 0$ がとれることに注意して収束定理を適用すればよい.

補題 3.3 $\{T(t)\}$ と A は補題 3.2 に同じとする. そのとき A は定理 1.1 の四条件を満足する.

証明 補題 3.2 と 2.1 から, $D(A^{n+1}) \subset R(\lambda - A)$ が得られる. $(\lambda - A)^{-1}$ が存在するから (I) はよい. 但し, ω は (3.2) のそれとする. (II) は (2.4) と (3.2) から確かめられる. 補題 3.2 により, $D(A^\infty) = D(\mathcal{Q}^\infty)$ であるから, $D(A^{n+2})$ も A の芯になっている (補題 2.4 の後の注意参照). $\overline{D(A_0)} = \bar{X}_0$ 故, $\overline{D(A)} = X$ もよい. 従って (III) が満たされている. (IV) は補題 3.1 で証明済.

4. 増大度 α の半群の生成

定理 1.1 で $\omega = 0$ の場合だけ考えておけばよい.

補題 4.1 A は X 内の閉作用素で条件 (I) - (III) ($\omega = 0$) を満たすものとする. そのとき各 $\varepsilon > 0$ に対して次に掲げる性質をもった $S(\varepsilon, A) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する.

$$(a) \quad AS(\xi, A)u = S(\xi, A)Au, \quad u \in D(A).$$

$$(b) \quad S(\xi, A)(\xi - A)^{n+1}v = v, \quad v \in D(A^{n+1}).$$

(c) $S(\xi, A)$ の可逆性と $(\xi - A)^{n+1}$ の可逆性とは同値である.

証明 $S(\xi, A) = \overline{(\xi - A)^{-(n+1)}|D(A^{n+1})}$ とおけばよい.

注意 4.2 $(\xi - A)^{n+1}$ が稠密 $\overline{(\xi - A)^{n+1}}$ をもてば, $S(\xi, A) = \overline{[(\xi - A)^{n+1}]^{-1}}$ と書ける. また条件(II)から

$$(4.1) \quad \|S^k(\xi, A)\| \leq \frac{M}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\xi^{m-\alpha}}, \quad \xi > 0, \quad m = k(n+1)$$

となる. 但し, $k \geq 1$. 尚

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-1)! m^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^{-\alpha}}{\Gamma(m+1-\alpha)} = 1$$

が成立するから, (4.1)を次のように書き直すことが出来る.

$$\xi^{k(n+1)} \|S^k(\xi, A)\| \leq M' \left[\frac{\xi}{k(n+1)} \right]^\alpha, \quad \xi > 0, \quad k \geq 1.$$

補題 4.3 A は補題 4.1 と同じものとする. そのとき各整数 $m \geq 2$ に対して, $D(A^m)$ は A の芯である.

証明 $D(A^{2n+3})$ が A の芯になることだけ示しておこう.

$D(A^{n+2})$ が A の芯と仮定しているから, 各 $u \in D(A^{n+2})$ に対して $D(A^{2n+3})$ 内の列 $\{u_p\}$ で $u_p \rightarrow u$ かつ $Au_p \rightarrow Au$ となるものを作ればよい.

$b > 0$ とする. そのとき各 $u \in D(A^{n+2})$ に対して $u = S(b, A)v$ となるような $v \in D(A)$ が存在する. 実際, $v = (b - A)^{n+1}u$ とお

けば, 補題 4.1(b) から $S(b, A)v = S(b, A)(b-A)^{n+1}u = u$. さて仮定から各 $v \in D(A)$ に対して $D(A^{n+2})$ 内の列 $\{v_p\}$ で $v_p \rightarrow v$ かつ $Av_p \rightarrow Av$ となるものがとれる. $u_p = (b-A)^{-(n+1)}v_p \in D(A^{2n+3})$ とおけば, $u_p = S(b, A)v_p \rightarrow S(b, A)v = u \in D(A^{n+2})$ かつ

$$Au_p = S(b, A)Av_p \rightarrow S(b, A)Av = Au.$$

但し, 最後の式で補題 4.1(a) を用いた.

さて

$$A_i = \frac{1}{n+1} [i^{n+2} S(i, A) - i] \in \mathcal{B}(X)$$

$$T_i(t) = e^{tA_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

としよう. このときまず各 $u \in D(A^{2(n+1)})$ に対して

$$(4.2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A_i u = Au$$

を示すことが出来る. 従って $\{A_i\}$ が (C_0) 級半群の生成にあける吉田近似の役割を演ずることが予想される.

補題 4.4 A は補題 4.1 と同じものとする. そのとき

$$(4.3) \quad T(t) = s\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} T_i(t), \quad t > 0$$

が存在する. 収束は区間 $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上で一様である. 尚

$$(4.4) \quad \|T(t)\| \leq 1 + Nt^{-\alpha}, \quad t > 0,$$

$$(4.5) \quad S(\xi, A) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\xi t} t^n T(t) dt, \quad \xi > 0,$$

$$(4.6) \quad AT(t)u = T(t)Au, \quad u \in D(A), \quad t > 0.$$

補題 4.5 A は X 内の閉作用素で条件(I)-(IV) ($\omega = 0$) を満たすものとする. そのとき (4.3) で与えられる $\mathcal{B}(X)$ 内の族 $\{T(t); t > 0\}$ は増大度 α の半群を形成する.

証明 (4.3) の収束が $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上で一様であり, かつ $T_i(t)$ が t に關して連続であるから, $T(t)$ は $t > 0$ で強連続になる. $\{T(t)\}$ が半群の性質をもつことは, $\{T_i(t)\}$ がそうであることからわかる. かくて $\{T(t)\}$ は X 上の半群である.

次に $\{T(t)\}$ が増大度 α であることを示そう. (4.5) から各 $u \in X$ に対して, $S(b, A)u \in \Sigma$ である (証明は補題 3.2 と同様). $T(t)u = 0$ とし, また b を条件(IV) における実数とする. そのとき

$$T(t)S(b, A)u = S(b, A)T(t)u = 0, \quad t > 0$$

となるが, $S(b, A)u \in \Sigma$ であるから結局 $S(b, A)u = 0$ が得られる. 条件(IV) によつて $S(b, A)$ の可逆性が保証されているから (補題 4.1(c)), $u = 0$ が出る. 従つて (4.4) と合わせれば (i) と (ii) はよい. さて $\bar{X}_0 = \bar{\Sigma}$ であるから, $\bar{X}_0 = X$ を見るには, $\bar{\Sigma} = X$ を示せばよい. しかるに $S(b, A) = [(b - A)^{n+1}]^{-1}$ と書けたから (注意 4.2),

$$(4.7) \quad D(A^{n+1}) \subset \Sigma.$$

従つて, $D(A^{n+1}) = X$ から $\bar{\Sigma} = X$ が得られる.

補題4.6 A と $\{T(t)\}$ は補題4.5と同じものとし, また $\Omega(CA_0)$ は2節と同じものとする. そのとき各 $\xi > 0$ に対し

$$(4.8) \quad (\xi - A)^{-1}v = (\xi - \Omega)^{-1}v, \quad v \in \Sigma.$$

証明 $\frac{d}{dt}T_i(t) = T_i(t)A_i$ であるから, (4.2) と (4.3) により各 $u \in D(A^{2(n+1)})$ に対して

$$(4.9) \quad T(t)u - T(\varepsilon)u = \int_{\varepsilon}^t T(s)Au \, ds, \quad t \geq \varepsilon > 0.$$

しかるに $D(A^{2(n+1)})$ は A の芯であるから, (4.9) はすべての $u \in D(A)$ に対して成立する. 従って

$$\frac{d}{dt}T(t)u = T(t)Au, \quad u \in D(A), \quad t > 0.$$

これからまず(4.6)と(4.7)を用い, 次に(4.4)と $\overline{D(A^{n+1})} = X$ に注意すれば

$$(\xi - A)^{-1}T(s)w = \int_0^{\infty} e^{-\xi t} T(t+s)w \, dt, \quad w \in X$$

が示せる. ここで $v \in \Sigma$ とすれば,

$$(\xi - A)^{-1}T(s)v = T(s) \int_0^{\infty} e^{-\xi t} T(t)v \, dt = T(s)(\xi - \Omega)^{-1}v$$

と書ける ((2.1)を見よ). 従って $(\xi - A)^{-1}T(s)v \rightarrow (\xi - \Omega)^{-1}v$ ($s \downarrow 0$). 一方, $T(s)v \rightarrow v$ ($s \downarrow 0$) であるから, $(\xi - A)^{-1}$ が閉作用素であることにより, (4.8) が得られる.

定理1.1の十分性の証明は次の補題によって完結せられる.

補題4.7 A と $\{T(t)\}$ は補題4.5と同じものとする. そ

のとき $A = \bar{A}_0$ である。

証明 (4.7) と (4.9) から

$$T(t)u - u = \int_0^t T(s)A u ds, \quad u \in D(A^{n+2}), \quad t > 0.$$

これから $A|D(A^{n+2}) \subset A_0$ が得られる。

さて $R(\xi - \Omega) = \Sigma$ であるから (補題 2.1), (4.8) は $\Omega \subset A$ を意味する。しかるに $\bar{\Omega} = \bar{A}_0$ であるから (補題 2.4), $A_0 \subset A$ が知られる。かくて

$$A|D(A^{n+2}) \subset A_0 \subset A.$$

$D(A^{n+2})$ は A の芯と仮定しているから, $\bar{A}_0 = A$ となる。

文献

1. G. Da Prato, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 996 - 998;
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 753 - 782.
2. Miyadera-Oharu-Okazawa, Generation theorems of semi-groups of linear operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. 8 (1972/73), to appear.
3. P. E. Sobolevskii, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 202-205.
4. 牛島照夫, 数理解析研究所講究録 134 (1972), 104-120.
5. Zabreiko-Zafievskii, Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1523 - 1526.
6. A. V. Zafievskii, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 1408 - 1411.