

(20) 外部雑音に依る相転移の観測 —電気回路によるアナログシミュレーション—

東工大・理 桃 島 成 治

非平衡系は何らかの外力により平衡から遠く離れた状態に維持されているが、その外力にゆらぎが存在すると系の環境が揺らぐことになり系に大きな影響を及ぼす。このような外力の揺らぎが系の安定性に影響を与えることをHorsthemke¹⁾らが化学反応のモデルに対して初めて提唱して以来いくつかの理論的研究がなされ²⁾、著者は揺らぎを含むポンピング電流で励振したパラメトリック発振器でその実験例を示した³⁾。この雑音に依り生じた状態を詳しく調べるためにここでは Arnold らにより理論的に考察された系を電気回路でシミュレートし、転移点近傍での分布関数と自己相関々数の測定を行った。

理論的背景： Arnold はある化学反応系のモデルとして次のような現象論的方程式を導いた。ここで $\tilde{\beta}$ は平均値 β_0 のまわりに揺いでいる。この方程式より Fokker Planck

$$\dot{x} = 1/2 - x + \tilde{\beta} x (1 - x) \quad (1)$$

方程式を求めるには、揺らぎ $\tilde{\beta}$ と確率変数 x の積に関して Ito および Stratonovich の二通りの解釈があり、その定常解は各々次のように表わせる。

$$P_{SI} = \frac{N}{x^2(1-x)^2} \exp \left[-\frac{2}{\sigma_I^2} \left\{ \frac{1}{2x(x-1)} - \beta_0 \ln \frac{1-x}{x} \right\} \right] \quad (2-I)$$

$$P_{SS} = \frac{N}{x(1-x)} \exp \left[\frac{2}{\sigma_S^2} \left\{ \frac{1}{2x(x-1)} - \beta_0 \ln \frac{1-x}{x} \right\} \right] \quad (2-S)$$

ここで $\beta(t) = \tilde{\beta} - \beta_0$, $\langle \beta(t) \beta(t') \rangle = \sigma_I^2 \delta(t-t')$ (or $\sigma_S^2 \delta(t-t')$) とした。

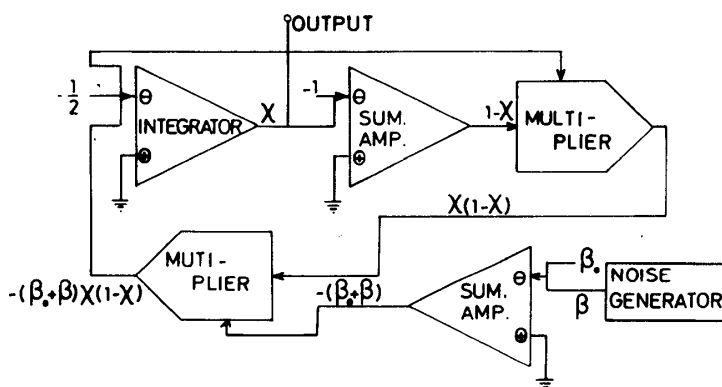
$\beta_0 = 0$ のときのこの定常分布の極値 x_m は次のようになる。

$$\text{Ito type:} \quad x_{m1} = 1/2, \quad x_{m\pm} = \{1 \pm \sqrt{1 - 2/\sigma_I^2}\} / 2 \quad (3-I)$$

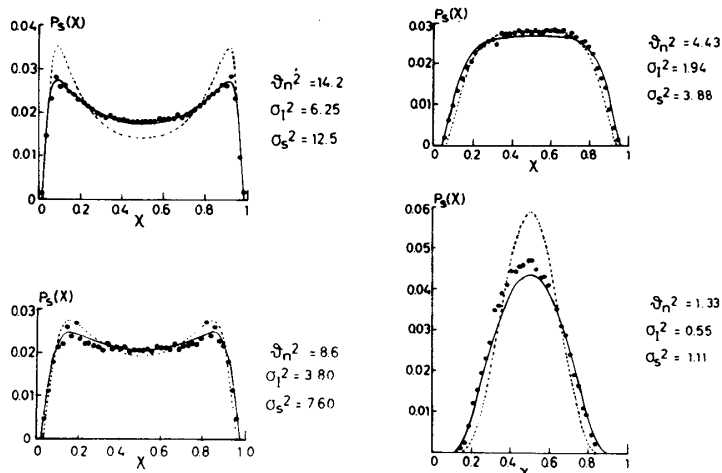
$$\text{Stratonovich type:} \quad x_{m1} = 1/2, \quad x_{m\pm} = \{1 \pm \sqrt{1 - 4/\sigma_S^2}\} / 2 \quad (3-S)$$

このように Ito の解釈による場合は $\sigma_I^2 < \sigma_{Ic}^2 = 2$ のとき分布関数は x_{m1} に唯一つの極大値をもつが $\sigma_I^2 > 2$ では $x_{m\pm}$ に極大値が二個現われる。Stratonovich の解釈においてもこの事情は定性的に同じであるが閾値は $\sigma_{Sc}^2 = 4$ となり、また分布関数の形は異なる。

実験に用いた回路の概略を図1に示す。ここで $\beta(t)$ として 0.01 ~ 500 Hz まで平坦



なスペクトルをもつ雑音を用いた。(図4(b)を除く)外部雑音強度による確率密度関数の変化を図2に示す。理論の予期する通り分布の極値は変化するが、定量的にはStratonovichの解釈より得た(2-S)に良く一致している。⁴⁾ 図3に分布の極大値の雑音強度



— E 64 —

(20) 外部雑音に依る相転移の観測

による変化を示す。極大値が $1/2$ から離れる点を $\sigma_f^2 = 2$ または $\sigma_S^2 = 4$ として理論曲線を求めた。

雑音強度を変えて生じるこの相転移で、Slowing Down の現象が現われるか否かを調べるために自己相関々数を測定した結果を図 4 (a) に示す。これより分るように臨界点近傍で特異な変化は見られない⁵⁾。また雑音に依り生じた相での相関々数の雑音のカットオフ周波数による変化を図 4 (b) に示す。この場合系の相関時間が与えた雑音のスペクトルに依存していることが分る。

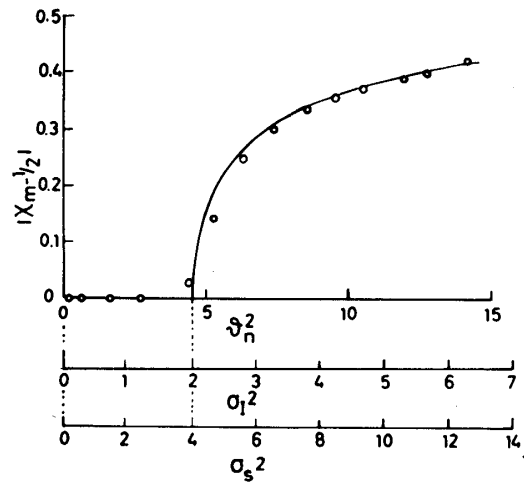


図 3：分布の極大値の雑音強度による変化

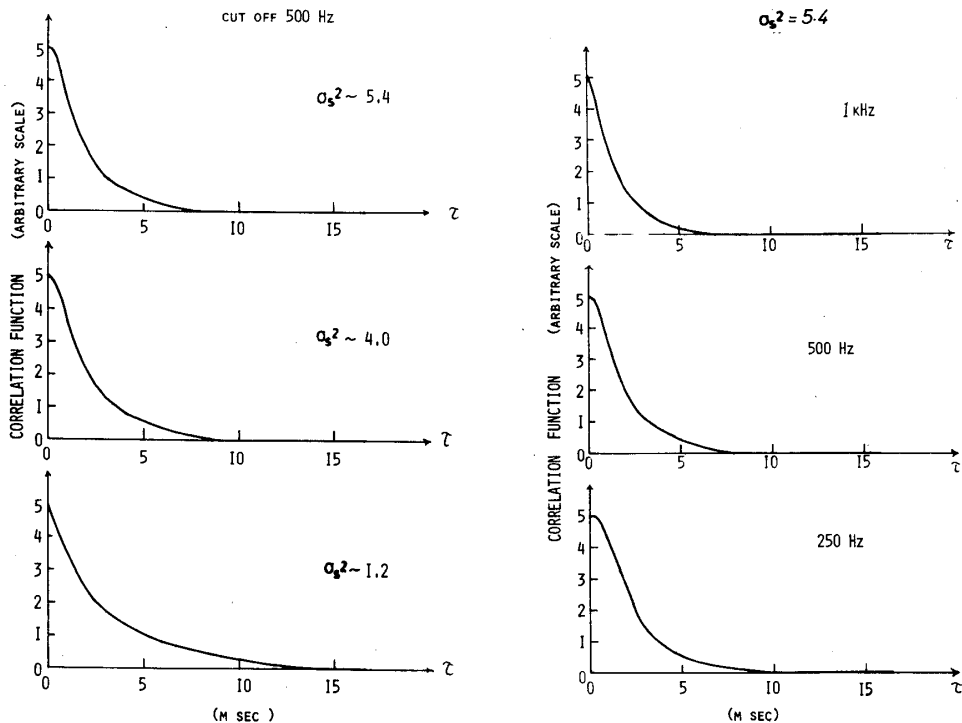


図 4 (a)：自己相関々数の雑音強度による変化。

(b)：自己相関々数の雑音スペクトルによる変化。図中周波数は雑音のカットオフ周波数。

桃島成治

参考文献

- 1) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour: Z. Physik **B24** (1976) 307.
- 2) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever: Z. Physik **B29** (1978) 367.
R. Lefever and W. Horsthemke: Bull. Math. Biol. **41** (1979) 469.
A. Scentzle and H. Brand Phys. Lett. **69A** (1979) 393, Phys. Rev. **20A** (1979).
K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever: Phys. Lett. **70A** (1979) 377.
- 3) S. Kabahshima, S. Kogure, T. Kawakubo and T. Okada; J. A. P. **50** (1979) 6296.
- 4) 長谷川洋：固体物理 **14** (1979) 13, 71
- 5) 北原和夫：当講演
鈴木増雄：当講演