

Ornstein-Uhlenbeck 過程での 大スケール揺らぎの統計則について II

高岡 正憲*, 松本 剛†

*同志社大学理工学部, †京都大学大学院理学研究科

平成 23 年 3 月 23 日

1 はじめに

本研究の直接的なきっかけは、毛利ら [1, 2, 3] による大型風洞でのデータ解析による。彼らは、大スケールで粗視化した揺らぎを調べ、粗視化する長さ R が速度の積分長 L と同程度かそれより長いとき対数正規分布で近似できることを見出した。他方、対数正規分布は鉱物学、病理学、気象学、経済学など様々な分野に現れている [4, 5, 6]。そして、実験的あるいは経験的に観測された分布が巾分布なのか対数正規分布なのかといった論争がくり返されている。

この大スケールの対数正規分布の近似の程度や起源や普遍性を調べるために、相関のある単純な確率過程である Ornstein-Uhlenbeck 過程を解析している。本報は、昨年度の本研究集会で報告した「Ornstein-Uhlenbeck 過程での大スケール揺らぎの統計則について」[7] の続きである。理解が深まったのは、大スケールでの漸近形についてと、2 点の構造関数の粗視化量についてである。

2 Ornstein-Uhlenbeck 過程と数値計算法

Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) の性質やその数値計算法は、前報を参照されたい。

OU 過程は

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{1}{T}X(t) + c^{1/2}\gamma \quad (1)$$

ここで、 T は緩和時間 (相関時間) であり積分長に対応し、 c は拡散係数、 γ は Gaussian 白色雑音でその平均は 0 で分散が $\frac{1}{dt}$ である。

OU 過程のシミュレーションには、Gillespie[8] の「exact updating formula」を用いた。データ数は $10^{11} \approx 2^{37}$ である。これまでの乱流研究の結果との対応を考

えると, Kolmogorov スケール η を時間刻み dt に, 相関スケール L を T と思うことになる.

粗視化した物理量は次のように定義する.

$$\zeta_R = X_R^2 = \frac{1}{R} \int_{t-R/2}^{t+R/2} X(s)^2 ds \quad (2)$$

$$\delta\zeta_R = \delta X_{r,R}^2(t) = \frac{1}{R-r} \int_{t-R/2}^{t+R/2-r} (X(s+r) - X(s))^2 ds \quad (3)$$

また, 簡便な表記として, 対数をとったものを $\xi_R = \ln(\zeta_R)$ などと書くことにする.

3 シミュレーション結果

3.1 1点物理量の粗視化

1点の2次モーメントの大スケール粗視化量をまずは考える. 全体的な振る舞いは, 前報 [7] に書いてあるので, ここでは, 大スケールでの漸近形についてまとめることにする.

OU 過程の解は具体的に書き下すことができる. 粗視化した量 ζ_R についてもある程度の解析的な表現が得られる.

分散 V と歪度 S に対する解析表現から $R \rightarrow \infty$ の漸近形は, それぞれ,

$$V = \sqrt{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle} \rightarrow \frac{cT}{2} \sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (4)$$

$$S = \frac{\langle (\Delta\zeta_R)^3 \rangle}{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle^{3/2}} \rightarrow 3\sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (5)$$

どちらも, $R^{-1/2}$ で 0 (Gauss 分布) に漸近している. また, グラフは全領域で数値計算の結果とよく一致している.

扁平度 F に対する解析表現から $R \rightarrow \infty$ の漸近形は,

$$F = \frac{\langle (\Delta\zeta_R)^4 \rangle}{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle^2} \rightarrow 3 + \frac{30T}{R} \quad (6)$$

扁平度は R^{-1} で 3 (Gauss 分布) に漸近している. 数値計算のグラフとは $R \lesssim 10T$ で少しずれが見らる. 解析表現が得られない系に対して, こういう大スケールで粗視化した量の分布を実験や数値計算で調べるにはデータ数について十分な注意が必要であることが分かる.

ここで, 平均を E として, $v = V/E^2$ を定義すると, $R \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0 + \sqrt{v} \left(3 - \frac{3}{8}v - \frac{27}{128}v^2 \dots \right) \\ F &\rightarrow 3 + v \left(15 - \frac{27}{8}v - \frac{21}{8}v^2 \dots \right) \end{aligned} \quad (7)$$

3.2 LogNormal 分布との比較

対数正規分布関数は $x > 0$ に対し

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (8)$$

ここに、パラメータ μ と σ は平均 E や分散 V と次式で結ばれている

$$\mu = \ln E - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{V}{E^2} \right) \quad \sigma = \ln \left(1 + \frac{V}{E^2} \right) \quad (9)$$

また、歪度 S と扁平度 F は、 $v = V/E^2$ として、それぞれ

$$\begin{aligned} S &= (\exp \sigma^2 + 2) \sqrt{\exp \sigma^2 - 1} = \sqrt{v}(3 + v) \\ F &= 3 + (\exp \sigma^2 - 1)(6 + 6 \exp \sigma^2 + 3 \exp 2\sigma^2 + \exp 3\sigma^2) \\ &= 3 + v(16 + 15v + 6v^2 + v^3) \end{aligned} \quad (10)$$

この結果を見ると、OU 過程の大スケール分布は $R \rightarrow \infty$ で対数正規分布と同じ v の中で Gauss 分布に漸近するが、扁平度の係数が少しであるが異なる。つまり、対数正規分布とは少しずれた分布により漸近することが分かる。

対数正規分布でよく近似が出来る理由を考えてみる。図 1 は、様々な R に対する

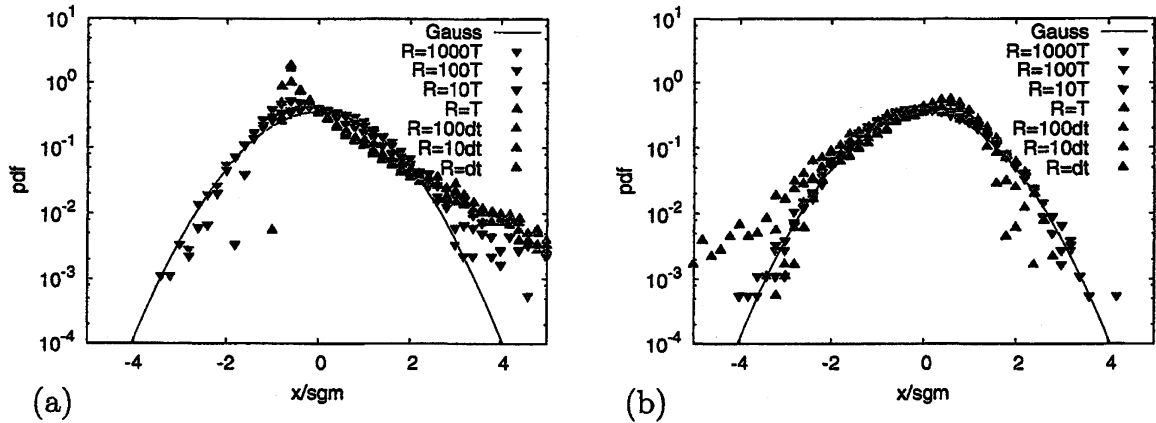


図 1: 分布関数の R 依存性. (a) ζ_R に対する分布関数, (b) ξ_R に対する分布関数

規格化された分布関数である。左図は ζ_R に対する分布関数で、右図は $\xi_R = \ln(\zeta_R)$ に対する分布関数である。

両図を比較すると、 R が大きくなるに連れて両図ともに Gauss 分布に漸近するが、漸近の仕方は対数をとった ξ の方がはやいことがわかる。正定値の揺らぎの分布は、OU 過程の分布に限らず、0 から平均値までの間で急激に大きくなり、平均値より大きい側に緩やかな裾を持つ分布となる。これに対し対数をとると、0 から平均値までの領域を拡大し、逆に平均値より大きい領域を縮小することになる。したがって、図 1 からわかるように、両図は互いに反対方向に歪んでおり、更に、左図での尖ったピークが鈍らされている。結果として、Gauss 分布に近い形をとっていることが見て取れる。

3.3 他の代表的な分布との比較

乱流や OU 過程では相関が重要な役割をしていることは先に記したとおりであるが、理解を深めるために、解析表現が可能な無相関の場合をまず考える。

時系列 $X(t)$ が $N(0, \sigma)$ で無相関であるとする。大スケール量に対応して、 $\xi_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$ と $\zeta_n = \log \xi_n$ を定義すると、それぞれの分布関数は、自由度 n の χ^2 分布関数

$$P(\xi_n) = c_n e^{n\xi_n/(2\sigma^2)} \xi_n^{n/2-1} \quad (11)$$

と、自由度 n の対数 χ^2 分布関数

$$Q(\zeta_n) = c_n \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} e^{\zeta_n} + \frac{n}{2}\right) \quad (12)$$

とで表される。ここに、

$$c_n = \frac{n^{n/2}}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} \quad (13)$$

また、それぞれの特性関数は

$$\psi_\xi(\theta) = \left(1 - \frac{2i\theta\sigma^2}{n}\right)^{-n/2}, \quad \psi_\zeta(\theta) = \left(\frac{2\sigma^2}{n}\right)^{i\theta} \frac{\Gamma(n/2 + i\theta)}{\Gamma(n/2)} \quad (14)$$

自由度 n の χ^2 -分布関数の各モーメントは

$$E = \sigma^2, \quad V = \frac{2\sigma^4}{n}, \quad S = \sqrt{\frac{8}{n}}, \quad F = 3 + \frac{12}{n} \quad (15)$$

であり、前節の対数正規分布との比較の時と同様に $v = V/E^2$ を定義すると、

$$S = 0 + \sqrt{v} \times 2, \quad F = 3 + v \times 6 \quad (16)$$

v の巾は一致するが、その係数は、歪度も扁平度も leading term から異なる。

自由度 n の対数 χ^2 -分布関数の各モーメントは

$$E = \ln\left(\frac{2\sigma^2}{n}\right) + \Psi\left(\frac{n}{2}\right), \quad V = \Psi\left(1, \frac{n}{2}\right), \quad (17)$$

$$S = \frac{\Psi\left(2, \frac{n}{2}\right)}{\Psi\left(1, \frac{n}{2}\right)^{3/2}}, \quad F = 3 + \frac{\Psi\left(3, \frac{n}{2}\right)}{\Psi\left(1, \frac{n}{2}\right)^2} \quad (18)$$

ここで、 $\Psi(x)$ は digamma 関数であり、 $\Psi(k, x)$ は polygamma 関数である。これより、 $n \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n} - \dots, & V &\rightarrow \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \dots, \\ S &\rightarrow -\sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 + \frac{1}{2n} - \dots\right), & F &\rightarrow 3 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

この場合も、 v の巾は一致するが、その係数は、歪度も扁平度も leading term から異なる。ただし、対数を取った方が Gauss 分布との差は小さいことが分かる。また、対数をとったときに歪度が負になることは、数値計算とも定性的に一致する。

これらの分布よりも対数正規分布の方が、OU 過程の分布に対しより良い近似を与えることがわかったので、対数正規分布を特別な場合として含む対数安定分布を考える。

対数安定分布関数の p -次モーメントは、 $\xi_R = \ln \zeta_R$ として、

$$\langle \zeta_R^p \rangle = \langle \exp(p\xi_R) \rangle = A\alpha^{R\{dp + \frac{c}{\cos \frac{\pi}{2} p^a}\}} \quad (20)$$

であり、 $v = V/E^2$ を導入すると、 $v = \alpha^{Rd(2-2^a)} - 1$ で

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha^{Rd(3-3^a)} - 3\alpha^{Rd(2-2^a)} + 2}{(\alpha^{Rd(2-2^a)} - 1)^{3/2}} = \frac{(v+1)^{\frac{3-3^a}{2-2^a}} - 3v - 1}{v^{3/2}} \\ F &= \frac{\alpha^{Rd(4-4^a)} - 4\alpha^{Rd(3-3^a)} + 6\alpha^{Rd(2-2^a)} - 3}{(\alpha^{Rd(2-2^a)} - 1)^2} \\ &= \frac{(v+1)^{\frac{4-4^a}{2-2^a}} - 4(v+1)^{\frac{3-3^a}{2-2^a}} + 6v + 3}{v^2} \end{aligned} \quad (21)$$

これを $v = 0$ のまわりで展開すると

$$S = \left(\frac{3-3^a}{2-2^a} - 3 \right) / \sqrt{v} + \frac{1}{2} \frac{3-3^a}{2-2^a} \left(\frac{3-3^a}{2-2^a} - 1 \right) \sqrt{v} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{4-4^a}{2-2^a} - 4 \frac{3-3^a}{2-2^a} + 6 \right) / v \\ &\quad - 2 \left(\frac{3-3^a}{2-2^a} \right) \left(\frac{3-3^a}{2-2^a} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4-4^a}{2-2^a} \right) \left(\frac{4-4^a}{2-2^a} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

この表式を見ると、結局、対数安定分布の中では $a = 2$ の対数正規分布が最も良い近似を与えていることが分かる。

4 粗視化された構造関数のモーメント

乱流の研究でよくなされている構造関数について、それを粗視化したものの統計について考えてみる。ここでは、次の 2 次の構造関数に対する結果のみ報告する。

$$\delta_r \zeta_R = \delta X_{r,R}^2(t) = \frac{1}{R-r} \int_{t-R/2}^{t+R/2-r} (X(s+r) - X(s))^2 ds \quad (24)$$

上の表式中の 2 点間の距離 (時間) r を、Kolmogorov スケールに相当する dt から相関スケール T まで、 $r = dt, 10dt, 100dt, 1000dt = T$ の 4 種類について調べた。

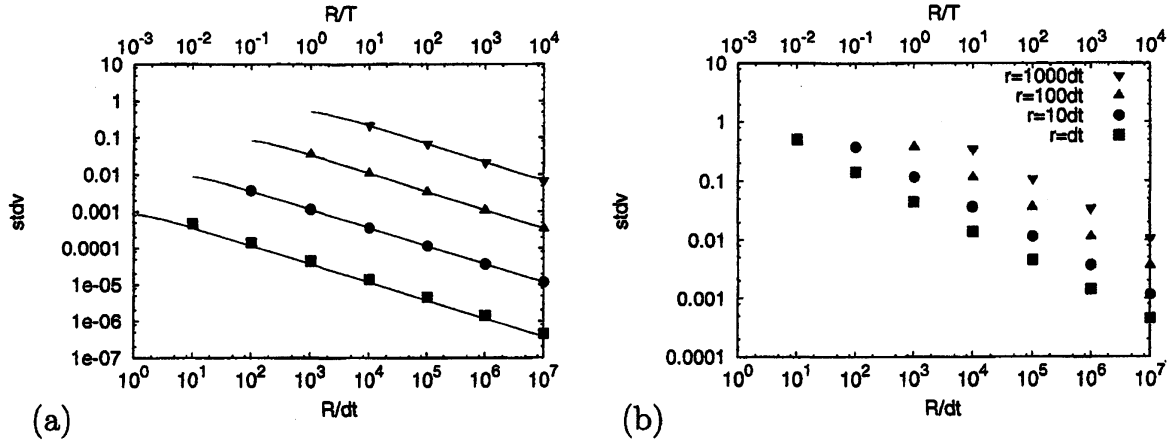


図 2: 分散の R 依存性. (a) $\delta_r \zeta_R$ に対する分散, (b) $\delta_r \xi_R$ に対する分散

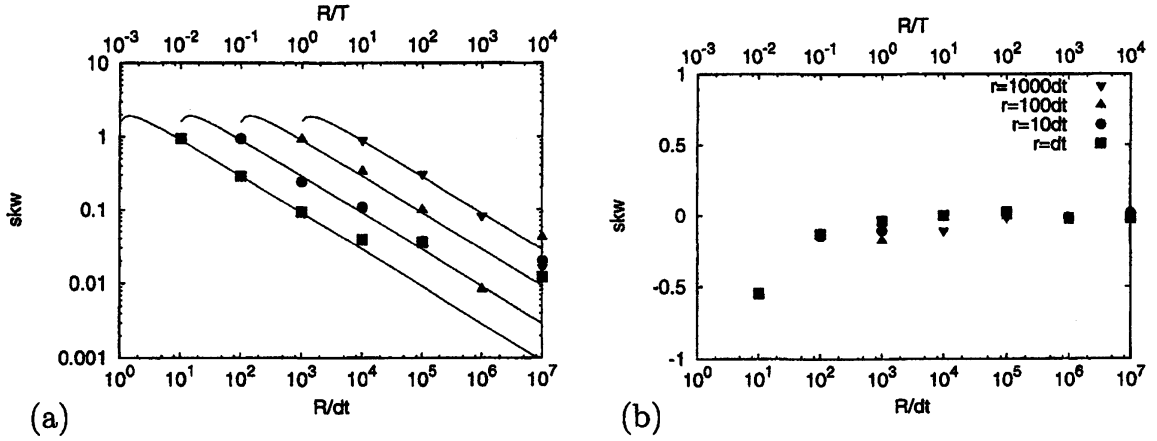


図 3: 歪度の R 依存性. (a) $\delta_r \zeta_R$ に対する歪度, (b) $\delta_r \xi_R$ に対する歪度

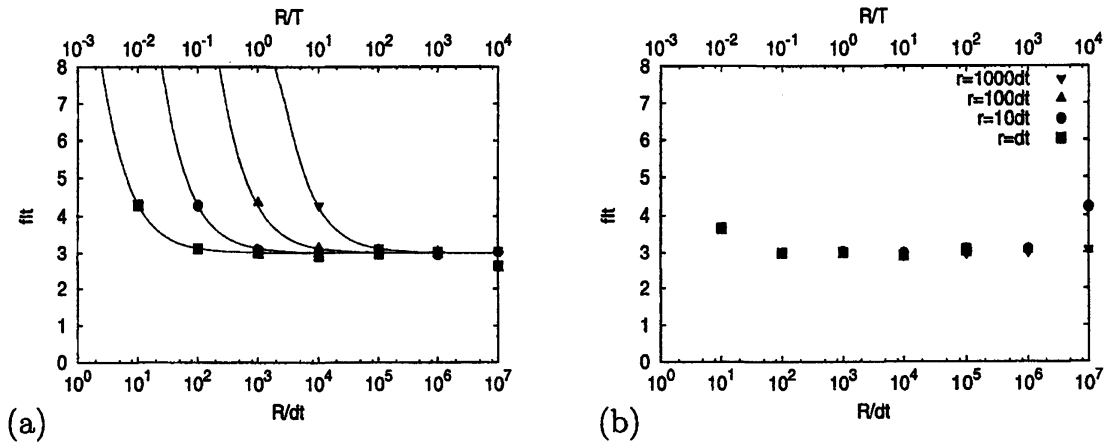


図 4: 尖度の R 依存性. (a) $\delta_r \zeta_R$ に対する尖度, (b) $\delta_r \xi_R$ に対する尖度

図 2~4 は, それぞれ, 各 r における 2 次の構造関数を粗視化したものの, 分散 V , 歪度 S , 尖度 F の R に対する依存性を示すグラフである. 各図の (a) は $\delta_r \zeta_R$ に対するものであり, (b) はその対数をとった $\delta_r \xi_R = \ln \delta_r \zeta_R$ に対するものである.

OU 過程では、これらの低次のモーメントに対する解析表現も得られる。これらの表現は長いので省略するが、図 2~4 中に実線で示してある。

図 2 を見ると、(a) と (b) の両グラフにおいて全領域で $R^{-1/2}$ で 0 (Gauss 分布) に近づいている。また、対数をとった方が分散が大きく、 r に対する依存性は小さい。図 3(a) によると、 R が大きくなると数値計算の収束が悪くなっていることがわかる。対数をとった (b) では値が負になっており、縦軸が線形であることに注意が必要である。対数をとったグラフでは r に対する依存性はほとんどない。図 4 でも対数をとった $\delta_r \xi_R$ の尖度は r に対する依存性はほとんどない。

解析表現の $R \rightarrow \infty$ の漸近形は、次式のようになる。

$$V \rightarrow cT \sqrt{\frac{3T - 4(T+r)e^{-r/T} + (T+2r)e^{-2r/T}}{R}} \quad (25)$$

$S \rightarrow$

$$\sqrt{\frac{10T^2 e^{3r/T} - 5(3T^2 + 3Tr + r^2)e^{2r/T} + 2(4r^2 + 6Tr + 3T^2)e^{r/T} - 3Tr - 3r^2 - T^2}{R(T+2r-4(T+r)e^{r/T}+3Te^{2r/T})^3}} \quad (26)$$

$$F \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 3 + \left(216 e^{\frac{r}{T}} r^3 - 64 r^3 - 840 T^2 e^{\frac{2r}{T}} r - 224 e^{\frac{2r}{T}} r^3 + 840 T^2 e^{\frac{3r}{T}} r + 336 e^{\frac{3r}{T}} r^2 T \right. \\ + 56 e^{\frac{3r}{T}} r^3 - 60 T^2 r + 360 T^2 e^{\frac{r}{T}} r - 96 r^2 T + 120 T^3 e^{\frac{r}{T}} - 420 T^3 e^{\frac{2r}{T}} \\ + 432 e^{\frac{r}{T}} r^2 T - 672 e^{\frac{2r}{T}} r^2 T - 525 T^3 e^{\frac{4r}{T}} - 15 T^3 + 840 T^3 e^{\frac{3r}{T}} \Big) / \left(\left(-4 r^2 - 4 Tr \right. \right. \\ - 44 T e^{\frac{2r}{T}} r + 24 T e^{\frac{3r}{T}} r - T^2 + 24 T r e^{\frac{r}{T}} + 8 T^2 e^{\frac{r}{T}} - 22 T^2 e^{\frac{2r}{T}} + 24 T^2 e^{\frac{3r}{T}} \\ \left. \left. + 16 r^2 e^{\frac{r}{T}} - 9 T^2 e^{\frac{4r}{T}} - 16 r^2 e^{\frac{2r}{T}} \right) R \right)$$

分散 V と歪度 S が $R^{-1/2}$ で 0 (Gauss 分布) に近づき、尖度 F が R^{-1} で 3 (Gauss 分布) に近づくことがわかる。この近づき方と対数正規分布との関係を調べるために、前節と同様に $v = V/E^2$ の関数として S や F を表し、図 5 に示した。図 5(b) には尖度の漸近の様子を詳しく見るために、 $F-3$ のグラフを描いてある。対数正規分布に近いが少し違うかたちで Gauss 分布に漸近することが解析表現による破線からわかる。また、実験や数値計算のデータからだけでは、この差を判別することが非常に難しいことも分かる。

最後に、 $r \rightarrow 0$ での漸近形を調べる。乱流では Kolmogorov[9] や Oboukhov[10] の対数正規理論というのが知られており、エネルギー伝達率・散逸率といった小さいスケール揺らぎを粗視化した量の対数正規分布が期待されている。4 次までのモーメントの漸近表現は以下のようになる。

$$E \rightarrow cr, \quad V \rightarrow \frac{4c^2 r^3}{3R}, \quad S \rightarrow \frac{33}{20} \sqrt{\frac{3r}{R}}, \quad F \rightarrow \frac{453r}{35R} \quad (27)$$

歪度 S と尖度 F は、 $v = V/E^2 \rightarrow \frac{4r}{3R}$ を用いて

$$S \rightarrow \sqrt{v} \times \frac{99}{40}, \quad F \rightarrow 3 + v \times \frac{1359}{140} \quad (28)$$

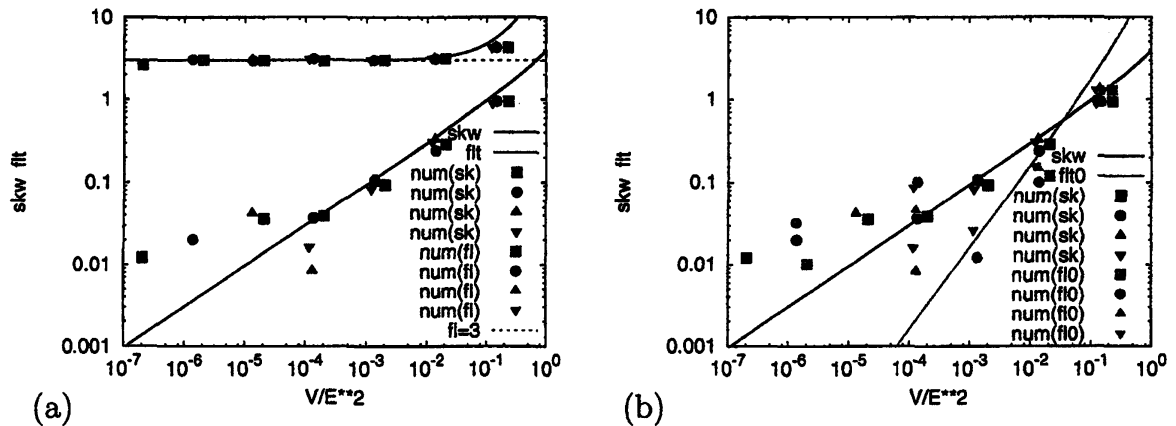


図 5: (a) 歪度や尖度の ν 依存性 (b) 歪度や「尖度-3」の ν 依存性

故に, leading term の係数は対数正規分布のそれとは異なることが分かる.

5 まとめ

OU 過程の 1 点および 2 点差の大スケール揺らぎを調べた. 風洞実験と全体的によく似た結果が得られた

1 点分布については, OU 過程の確率変数の振る舞いを調べ, それを理解するために, 無相関の正規変数, 無相関の対数安定分布にしたがう確率変数と比較した. 以下のことが分かった.

- OU 過程の確率変数の 2 乗粗視化量 (2) は, 対数をとっても対数正規分布に近づくことなく, 正規分布に近づく
- 無相関の正規変数の 2 乗和 (χ^2 分布) の場合, 対数を取ったものと取らないものの漸近分布へ近づくオーダーは同じ. つまり, この場合, 対数を取っても近付きかたが早くなるわけではない.
- 無相関の対数安定分布のうち, OU 過程の粗視化量のモーメントに最も近い振舞いを示すのは対数正規分布である.

2 点差分布の解析表現はかなり複雑となったので, 未だ十分に調べることができていないが, 以下のことが分かった

- 1 点分布と同様に R の中で正規分布に近づく
- 2 点間の距離が小さくなると普遍的な分布になる
- その普遍的な分布の歪度と尖度の両方共に, 対数正規分布のそれより小さいが同じ ν 依存性をもつ

参考文献

- [1] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima. On landau's prediction for large-scale fluctuation of turbulence energy dissipation. *Phys. Fluids*, 18:015103, 2006.
- [2] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Fluctuation of statistics among subregions of a turbulence velocity field. *Phys. Fluids*, 20:035108, 2008.
- [3] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Large-scale lognormal fluctuations in turbulence velocity fields. *Phys. Fluids*, 21:065107, 2009.
- [4] J. Aitchison and J.A.C. Brown. *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [5] E. Limpert, W.A. Stahel, and M. Abbt. Log-normal distributions across the sciences: Keys and clues. *BioScience*, 51(5):341, 2001.
- [6] M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Mathematics*, 1(2):226–251, 2003.
- [7] 松本剛 and 高岡正憲. Ornstein-uhlenbeck 過程での大スケール揺らぎの統計則について. *数理解析研究所講究録*, 1721:19–27, 2010.
- [8] D.T. Gillespie. *Markov Processes: An Introduction for Physical Scientists*. Academic, New York, 1992.
- [9] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85, 1962.
- [10] A.M. Oboukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 13:77–81, 1962.