

定符号 3 次ユニタリ群の類数について

早大理工 橋本 喜一郎 (Ki-ichiro Hashimoto)

東大理 古閑 春隆 (Harutaka Koseki)

§0. 序

代数体上定義された非退化な Hermite 空間があるとき、その空間内の lattice には (ユニタリ群, 特殊ユニタリ群 etc に関する) genus と class が定義され, 各 genus にはその類数が定まる。この類数を決定することは, Hermite 形式またはユニタリ群の整数論における最も基本的な問題のひとつであろう。

二次形式に対する同様の問題については多くの人々による研究 (たとえば Ponomarev [13], Pizer [12], Asai [2] など) があり, 四元数 Hermite 形式の場合にもいくつかの結果 (Eichler [4], Hashimoto-Ibukiyama [7], Hashimoto [6]) がある。これらの場合にくらべると, Hermite 形式の類数公式は従来あまり研究されてこなかったと言えよう。ただし不定

符号の場合には, Shimura [14] による一般的な結果 (特殊ユニタリ群に対する強近似定理とその応用としてのユニタリ群に関する類数公式) がある。このノートでは, 一般の虚二次体上のランク 2 およびランク 3 の定符号の Hermite 形式の類数公式について, ランク 3 の場合を中心として, 述べることにする。

K を虚二次体, O を整数環, $d(K)$ を判別式とし, V を K 上の n 次元ベクトル空間, H を V 上の正定値 Hermite 形式とする。 K の ideal $\mathfrak{o}$ について V 内の O -lattice L が $\mathfrak{o}$ -modular であるとは, $L = \mathfrak{o} L^*$ が成立することである。ここで $L^* = \{x \in V \mid H(x, L) \subseteq \mathfrak{o}\}$ とする。非 Archimedes 素点における局所的な設定でも modular lattice の概念を同様に定義できるが, それらの isometry class は Jacobowitz [10] によって決定されている。また, 任意の local な hermitian lattice は modular lattice の直和として Jordan 分解され, この意味で modular lattice は基本的な対象であると言える。以下, global な Hermite 空間 (V, H) 内の unimodular lattice (i.e. O -modular lattice) から成る genus を考える。ここで π を $d(K)$ を割る素数の個数とすると, unimodular lattice を含むような (V, H) で与えられたランク n をもつものの isometric class は 2^{t-1} 個あることがわかる。すなわち

の各有限素点 p において, (V, H) の discriminant のノルム剰余記号の値を ε_p とおく; $\varepsilon_p = (d(V, H), K/\mathbb{Q})_p$. このとき上の isometric class は, $d(K)$ を割る p に対する ε_p の列 (ε_p) で $\prod \varepsilon_p = 1$ をみたすものと ± 1 に対応する. さて (V, H) が unimodular lattice を含むとしよう. n が odd または 2 が K で不分岐ならば, unimodular lattice からなる $\mathcal{U}(V, H)$ -genus は 1 個しかない. n が even で 2 が K で分岐している場合は, このような $\mathcal{U}(V, H)$ -genus は高々 2 個しかない.

さて, ランク $= 2$ としよう. この場合は上記の 2^{n-1} 個の (V, H) の各々について unimodular lattice からなる $\mathcal{SU}(V, H)$ -genus の類数の explicit formula を与えることができる (定理 7). ここで特に (V, H) が standard な場合, すなわち ε_p たちがすべて ± 1 なる場合には, Hayashida [8] において既に我々の類数に相当するものが得られている. そこで, $\mathbb{O}$ を虚数乗法環とする楕円曲線の 2 個のコピーの直積上の種数 2 の曲線の研究に付随して, determinant 1 の二変数正定値 Hermite 形式のある類数が決定された. この“ある類数”を決定する過程で我々の類数が計算されている. [8] に述べられているように, ランク 2 の場合の類数の決定は (V, H) に付随する $\mathbb{Q}$ 上の四元数環のある order の類数の決定に帰着し, 我々の結果もこの方針によって得られたもの

である。

次にランク = 3 とする。この場合, (V, H) が unimodular lattice を含めばそれらはひとつの $U(V, H)$ -genus をなす。その類数はもちろん, “四元数環の類数” に帰着させることはできない。我々は跡公式によって類数を計算し, (V, H) が standard な場合に explicit formula を得た (定理 8)。特にこの場合, $U(V, H)$ に関する principal genus の類数と $SU(V, H)$ に関する principal genus の類数の間に簡明な関係式が成立する (定理 9)。また, $U(V, H)$, $SU(V, H)$ 上の保型形式 (保型性をもつ調和多項式) の空間の次元公式も得られる。

以下, 跡公式による (ランク 3 の場合の) 類数の計算について述べる。

§1. 跡公式による類数の表示

ここでは (V, H) のランクは n とする。以下, $U(V, H)$ を G で表わす。 L を V 内の O -lattice, $\mathcal{L}$ を L を含む G -genus とする。すなわち, $L' \in \mathcal{L} \iff \exists g_p \in G_p \text{ s.t. } L'_p g_p = L_p \text{ at } \forall p < \infty$ 。このとき $G_{\mathbb{Q}}$ は自然に $\mathcal{L}$ に作用し, その orbit すなわち $\mathcal{L}$ 内の G -class の個数が $\mathcal{L}$ の類数である。以下この類数を $h_n(\mathcal{L})$ で表わす。各 $p < \infty$ における L_p の stabilizer を $U_p(L_p)$

と置く：

$$U_p(L_p) := \{ g \in G_p \mid L_p g = L_p \}.$$

さらにアデール G_A の開コンパクト部分群 $U(L)$ を

$$U(L) := G_\infty \times \prod_{p < \infty} U_p(L_p)$$

により定める。このとき $h_n(\mathcal{L})$ は $|U(L) \backslash G_A / G_\infty|$ に一致する。

Borel-Harish Chandra の reduction theory により G_A / G_∞ は体積有限であるから、 $h_n(\mathcal{L})$ は有限になる。

さて、Brandt 行列の跡公式の特別な場合として、 $h_n(\mathcal{L})$ をある意味で閉じた形に表示することができる。 G_∞ の共役類 $[g]_{G_\infty}$ が ($\mathcal{L}$ に関して) *locally integral* であるとは、それを含む G_A の共役類が $[g]_{G_A} \cap U(L) \neq \emptyset$ を満たすことである。 $[g]_{G_\infty}$ が *locally integral* ならば g は *torsion element* になる。 F を G_∞ の *torsion element* の固有多項式となり得る多項式全体とする。 F は有限集合であり、ランク n が与えられたとき F を決定することは容易である。 $\chi = \chi(x)$ を F の元とするとき、§2 で述べるように χ を固有多項式とする G_∞ の共役類は一般には無限個ある。しかしそれらの中で *locally integral* なものは有限個しかないことがわかる。さて、 $g \in G_\infty$ に対しその中心化群を $G(g)$ で表わす。 g は *semisimple* であるから $G(g)$ は $\mathbb{Q}$ 上の *reductive group* になる。各素点 v において $G(g)_v$ の Haar 測度 dt_v を “適当に” *normalize* しておき、 $G(g)_A$ の Haar

測度 dt を $dt = \prod_v dt_v$ により定める。

定理 1. 類数 $h_n(\mathbb{Q})$ は次の様に表示される：

$$h_n(\mathbb{Q}) = \sum_{f \in F} \sum_{[g]} M(G(g); dt) \prod_{p < \infty} \left(\sum_{\delta_p} \text{Ind}(\delta_p; g) \right).$$

ここで $[g] = [g]_{G_{\mathbb{Q}}}$ は f を固有多項式とする locally integral な $G_{\mathbb{Q}}$ -共役類全体を動く。各 $[g]$ に対し $M(G(g); dt)$ は 体積 $\text{vol}(G(g)A/G(g)\mathbb{Q}; dt)$ を表わす。また δ_p は $G(g)_p \backslash G_p/U_p(L_p)$ の代表で $\delta_p^{-1} g \delta_p \in U_p(L_p)$ となるもの全体を動き、 $\text{Ind}(\delta_p; g)$ は $\text{vol}(G(g)_p \cap \delta_p U_p \delta_p^{-1}; dt_p)$ の逆数を表わす。

この定理は、四元数 Hermite 形式の場合の跡公式 (Hashimoto [5]) と同様の議論により証明される。

上の定理における固有多項式の集合 F は容易に求められる。 $n=3$ で $d(K) \neq -3, -4, -7, -8$ のときは次の 5 種類の多項式が現われる。

$$f_1(X) = (X-1)^3, -f_1(-X),$$

$$f_2(X) = (X-1)(X+1)^2, -f_2(-X),$$

$$f_3(X) = (X-1)(X^2+1), -f_3(-X),$$

$$f_{41}(X) = (X-1)(X^2+X+1), -f_{41}(-X),$$

$$f_{42}(X) = (X-1)(X^2-X+1), -f_{42}(-X).$$

$d(K) = -3, -4, -7, -8$ の場合には、各々、上の 5 種類はすべ

て現われ、その他に数種類の多項式が新しく現われる。このように Hermite 形式の類数公式において n が小さく虚二次体が generic な場合には、固有多項式の数はあまり多くはない。しかし、虚二次体自体がパラメーターであるため、結果的にはかなり手間のかかる計算が必要になってくる。

§2. $G_{\mathbb{Q}}$ の共役類

代数体上の古典群の共役類は、Asai [1] において研究され、parameterization が与えられている。以下に述べる $G_{\mathbb{Q}}$ の共役類の parameterization も本質的には [1] におけるものと同じである。

ここでも (V, H) のランクは n とする。 $f = f(x)$ を定理 1 の表示に現われる固有多項式とする。 f の各根は $\mathbb{1}$ の巾根である。 $G_{\mathbb{Q}}$ の元で f を固有多項式とするもの全体を $G_{\mathbb{Q}}(f)$ で表わす。また $\mathbb{Q}$ の各素点 v において G_v の semisimple な元で f を固有多項式とするもの全体を $G_v(f)$ とする。 $G_{\mathbb{Q}}(f)$ や $G_v(f)$ の元の最小多項式を $m(x)$ とおく。 $G_{\mathbb{Q}}(f)$ 内の $G_{\mathbb{Q}}$ -共役類の集合 $G_{\mathbb{Q}}(f) // G_{\mathbb{Q}}$ と $G_v(f)$ 内の G_v -共役類の集合 $G_v(f) // G_v$ は以下のように記述される。

まず $G_v(f) // G_v$ について。 K_v -algebra $K_v[X]/(m)$ の

involution σ で

$K_v^\sigma = K_v$, $\sigma|_{K_v}$ は $K_v/\mathbb{Q}_v$ の non-trivial な
自己同型,

$$X X^\sigma = 1 \quad ("X \bmod m" \text{ を } X \text{ と略記})$$

をみたすものが一意的に定まる。この σ に関して

$$K_v[X]/(m) = \bigoplus_i A_i$$

と分解する。ここで各 A_i は σ -stable な K_v -subalgebra であ
って、そのようなものの2個の直和には分解できないもの
とする。さて $g \in G_v(+)$ に対し (X の作用を g と定めることに
より) 自然に V_v 上の $K_v[X]/(m)$ -加群の構造を対応させる。

このとき g の属する G_v -共役類は部分空間 $V_v A_i$ の

discriminant の列 ($d(V_v A_i)$) によって特徴づけられるこ

とわかる。(各 $d(V_v A_i)$ は $\mathbb{Q}_v^\times/N(K_v^\times)$ の元。) g が $G_v(+)$

全体を動くとき, 列 ($d(V_v A_i)$) は次の制限下で自由に動く:

- (i) $\prod_i d(V_v A_i) = d(V_v),$
- (ii) K_v が体であって A_i が体でないとき,
 $(d(V_v A_i), K/\mathbb{Q})_v = (-1, K/\mathbb{Q})_v^{\frac{1}{2} \dim_{K_v}(V_v A_i)},$
- (iii) v が無限素点のとき $(d(V_v A_i), K/\mathbb{Q})_v = +1 (v_i).$

次に $G_{\mathbb{Q}}(+)//G_{\mathbb{Q}}$ を問題にする。 K -algebra $K[X]/(m)$ を
上と同様の意味で

$$K[X]/(m) = \bigoplus_j A_j$$

と分解する。このとき各素点 v における $K_v[X]/(m)$ の分解を

$$K_v[X]/(m) = \bigoplus_j \bigoplus_{i=1}^{t(j,v)} A_{j,v,i} ;$$

$$\bigoplus_i A_{j,v,i} \cong \mathcal{A}_j \otimes_K K_v$$

と書くことができる。さて $[g] \in G_{\mathbb{Q}}(f) // G_{\mathbb{Q}}$ に対し local な discriminant の集合 $(d(V_v A_{j,v,i}))$ を対応させるとき、この対応は injective であることがわかる (従って共役類に対し Hasse の原理が成立する (c.f. [1])). この対応の image は、先の (i), (ii), (iii) と次の (iv), (v) によって特徴づけられる:

(iv) ほとんどすべての (j, v, i) に対し

$$(d(V_v A_{j,v,i}), K/\mathbb{Q})_v = +1 ,$$

(v) 各 j に対し $\prod_v \prod_i (d(V_v A_{j,v,i}), K/\mathbb{Q})_v = +1$.

§ 3. Mass formula

定理 1 における volume $M(G(g):dt)$ は, Brauer [3] による公式 (Hermite 形式 の場合の “Siegel formula”) を少し拡張したものに もとづいて計算される。 $g \in G_{\mathbb{Q}}(f)$ とし, $K[X]/(m)$ の部分体 $\mathcal{A}_j$ を § 2 のように定める。 $\mathcal{A}_j$ における σ の固定体を β_j とおく。これらの体を $\mathbb{Q}$ の部分体とみなすことにすれば, β_j は総実体で $\mathcal{A}_j$ はその総虚 2 次拡大である。さて g に付随して定まる $\mathcal{A}_j$ -加群 $V\mathcal{A}_j$ 上には K -valued の

Hermite 形式 $H|_{VA_j}$ が定まるが, これを VA_j 上の A_j -値
の Hermite 形式 $\tilde{H}_j$ に自然に持ち上げることができる。 β_j
上の代数群 $U(VA_j, \tilde{H}_j)$ を $\tilde{G}(g:j)$ で表わせば, 容易に

$$G(g)A/G(g)\mathbb{Q} \cong \prod_j \tilde{G}(g:j)A/\tilde{G}(g:j)\beta_j$$

を得る。従って $M(G(g); dt)$ の計算は総実体上のユニタリ群
の mass の計算に帰着する。

F を総実体, E を F の総虚 2 次拡大とし, E の整数環を
 R とする。 m を正整数とし, $I \in M_m(E)$ を F の各無限素点
において正定値であるような Hermite 行列とする。 E^m 上の
Hermite 形式 $I(x, y)$ を $I(x, y) = x I^t \bar{y}$ により定める。
 F の各有限素点 w において $U(E^m, I)_w$ の Haar 測度 du_w
を $\text{vol}(U(E^m, I)_w \cap GL_m(R_w) : du_w) = 1$ により正規化し,
 F の各無限素点 w では $\text{vol}(U(E^m, I)_w : du_w) = 1$ と正規化し
ておく。 $\prod_w du_w$ を du とおき, $\text{vol}(U(E^m, I)A/U(E^m, I)_F : du)$
を $M(m, I)$ で表わす。 [3] の公式は $F = \mathbb{Q}$ の場合のものである
が, その議論を modify することにより次の命題を得る。

命題 2. $M(m, I)$ は次の様に表示される:

$$M(m, I) = 2 d(F)^{m^2/2} N_{F/\mathbb{Q}}(d(E/F))^{m(m+1)/4} \\ \times N_{F/\mathbb{Q}}(\det(I))^m \prod_w \alpha(I)_w^{-1}.$$

ここで $d(F)$ は F の判別式, $d(E/F)$ は E/F の相対判別式を

表わす。また F の素点 w に対し local density $\alpha(I)_w$ は次の様に定義される。

w : 有限素点のとき, $w = \mathfrak{p}$ として,

$$\alpha(I)_{\mathfrak{p}} := \lim_{k \rightarrow \infty} A_{\mathfrak{p}^k}(I) / N(\mathfrak{p})^{km^2};$$

$$A_{\mathfrak{p}^k}(I) := \# \{ X \in M_m(R/\mathfrak{p}^k) \mid X I {}^t \overline{X} = I \}.$$

w : 無限素点のとき,

$$\alpha(I)_w := \prod_{j=1}^m (2\pi)^j / (j-1)!.$$

Atremla [11] は $E/F = K/\mathbb{Q}$ のとき Gauss 和を用いて $\alpha(I)_{\mathfrak{p}}$ を計算した。しかし Hermite 行列 I が簡単な形をしている時は直接 $A_{\mathfrak{p}^k}(I)$ を計算して $\alpha(I)_{\mathfrak{p}}$ を求めることができる。 $E/F = K/\mathbb{Q}$ で $I = 1_m$ のときの結果は次の通り:

$$\bullet \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0 \text{ のとき: } \alpha(1_m)_{\mathfrak{p}} = \prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^j \mathfrak{p}^{-j}\right),$$

$$\bullet \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \text{ で } \mathfrak{p} \neq 2 \text{ のとき:}$$

$$\alpha(1_m)_{\mathfrak{p}} = 2 \prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^j \mathfrak{p}^{-j}\right) \times \begin{cases} [1 + \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{m/2} \mathfrak{p}^{-m/2}]^{-1} & \dots m: \text{even} \\ 1 & \dots m: \text{odd} \end{cases}$$

$$\bullet \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \text{ で } \mathfrak{p} = 2 \text{ のとき:}$$

$$\alpha(1_m)_{\mathfrak{p}} = 2 \prod_{j=1}^m \left(1 - \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^j \mathfrak{p}^{-j}\right) \times \begin{cases} (1 - \mathfrak{p}^{-m})^{-1} & \dots m: \text{even} \\ 1 & \dots m: \text{odd} \end{cases}.$$

以上において $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^j$ は $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ の primitive character としての j 乗を表わすものとする。これらを命題 2 の表示に代入し,

Dirichlet の L 函数の整数点での値に関するよく知られた結果を適用することによって、次の定理を得る。

定理 3. $E/F = K/\mathbb{Q}$ のとき $M(m, 1_m)$ は次の様に表示される:

m : even のとき

$$M(m, 1_m) = 2^{1-t} \prod_{j=1}^m \frac{|B_j, \chi^j|}{2^j} \prod_{\substack{p \mid d(K) \\ p \neq 2}} (p^{m/2} + (-1)^{m/2})$$

$$\times \begin{cases} 2^m - 1 & \cdots 4 \parallel d(K) \\ 2^{m/2}(2^m - 1) & \cdots 8 \parallel d(K) \\ 1 & \cdots 2 \nmid d(K) \end{cases}$$

m : odd のとき

$$M(m, 1_m) = 2^{1-t} \prod_{j=1}^m \frac{|B_j, \chi^j|}{2^j}.$$

ここで t は $d(K)$ を割る素数の個数, $\chi(\cdot) = \left(\frac{\cdot}{K}\right)$ は K に対応する Dirichlet character, B_j, χ^j は primitive character χ^j に付随する j 番目の一般 Bernoulli 数を表わす。

一般に $E/\mathbb{Q}$ が abelian のときは上の定理と同様に $M(m, 1_m)$ を一般 Bernoulli 数を用いて表わすことができる。 $M(G(g); dt)$ で g が center の元でないときは, explicit な計算のためにそのような表示を用いる必要があるが, ここでは省略する。

定理3の応用として, $(K^n, 1_n)$ 内の $U(K^n, 1_n)$ に関する principal genus $\mathcal{L} \ni O^n$ の類数が1になる場合を決定できる。よく知られているように $\mathcal{L}$ の類数 $h_n(\mathcal{L})$ が1になるための必要十分条件は, O^n の自己同型群 $\Gamma = \text{Aut}(O^n, 1_n)$ の位数の逆数が $M(n, 1_n)$ に一致することである。 $\Gamma \cong (O^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群) となるから, 定理3および一般Bernoulli数の評価とあわせて, 次の結果を得る。

命題4. 記号を上の通りとして principal genus の類数 $h_n(\mathcal{L})$ が1になるのは次の場合に限られる:

- (i) $n = 2, \quad d(K) = -3, -4, -7, -8$
- (ii) $n = 3, \quad d(K) = -3, -4$
- (iii) $n = 4, \quad d(K) = -3, -4$
- (iv) $n = 5, \quad d(K) = -3.$

§3. Unimodular lattice と $U_p(L_p)$ -共役類

定理1における $\sum_{\mathcal{L}_p} \text{Ind}(\mathcal{L}_p: \mathcal{L})$ を計算することは, $U_p = U_p(L_p)$ の共役類を決定することとほぼ同値である。このような計算はランク n が小さく $\mathcal{L}$ の属する genus $\mathcal{L}$ がある程度良いものでない限り困難である。ここではそのような良い

genus として unimodular lattice からなるものを考える。

Jacobowitz [10] は local field 上の modular lattice の同型類を分類した。特に $K_p/\mathbb{Q}_p$ 上の unimodular lattice については次の様に分類される。 $(\frac{K}{p}) = +1$ の場合は話が極めて単純になるので $(\frac{K}{p}) \neq +1$ としよう。 (V, H) を $K_p/\mathbb{Q}_p$ 上のランク n の非退化な Hermite 空間とする。 (V, H) 内の O_p -lattice L_p に対し O_p -ideal $H(L_p, L_p)$ を $S(L_p)$ で表わし, $H(x, x)$ ($x \in L_p$) で生成される O_p -ideal を $n(L_p)$ で表わす。明らかに $n(L_p) \subseteq S(L_p)$ となるが, $n(L_p) = S(L_p)$ のとき L_p は normal, そうでないとき L_p は subnormal と言う。特に modular lattice については normal ということは O_p 上で直交基底をもつことと同値である。

命題 5 (Jacobowitz). 記号は上の通りとする。

(i) $(\frac{K}{p}) = -1$ の場合, (V, H) が unimodular lattice を含むための必要十分条件は, discriminant が $(d(V, H), K_p/\mathbb{Q}_p) = +1$ を満たすことである。このとき (V, H) 内の unimodular lattice はすべて normal で 1 個の isometric class をなす。

(ii) $(\frac{K}{p}) = 0$ で $p \neq 2$ の場合, (V, H) は unimodular lattice を含み, それらはすべて normal で 1 個の isometric class をなす。

(iii) $(\frac{K}{P}) = 0$ で $P = 2$ の場合, (V, H) は normal unimodular lattice を含みそれらは 1 個の isometric class をなす。 (V, H) が subnormal unimodular lattice を含む場合にはそれらがもうひとつの isometric class をなす。

この命題の (iii) において, (V, H) が subnormal unimodular lattice を含むかどうかは容易に判定できる。たとえば n が奇数ならば含まないし, $n = 2$ ならば, $8 \parallel d(K)$ のときおよび $4 \parallel d(K)$ かつ $(d(V, H), K_P/\mathbb{Q}_P) = -1$ のときにのみ含む。

[10] による次の命題は $\mathbb{F}_P$ -共役類の計算において重要である。

命題 6. $(\frac{K}{P}) \neq +1$ とし L_P を (V, H) 内の任意の O_P -lattice とすると, L_P を次の様に直交分解 (Jordan 分解) できる:

$$L_P = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t;$$

各 L_i は modular で $S(L_1) \subsetneq S(L_2) \subsetneq \cdots \subsetneq S(L_t)$ 。

列 $\text{rank } L_1, \dots, \text{rank } L_t$ と $S(L_1), \dots, S(L_t)$ は L_P によって一意的に定まる。

以上の命題 5, 6 にもとづいて, $n = 3$ で (V, H) , L が

§0 に述べた通りである場合に $\mathbb{F}_p$ -共役類を計算できる。それは類数公式において最も繁雑な部分であり、ここでは省略する。

§4. 主結果

まず $n=2$ の場合について述べる。§0 で述べた様に、この場合の類数公式は四元数環の類数公式から得られたものであって上の §1 ~ §3 の議論を適用したわけではない。

(V, H) を K 上の 2 次元正定値 Hermite 空間とし、 (V, H) は unimodular lattice を含むとする。命題 5 からこのような (V, H) の isometric class は §0 で述べた通り $((\varepsilon_p)_{p|d(K)})$ に対応し 2^{t-1} 個ある) で尽されることがわかる。

定理 7 ($n=2$). 記号は上の通りとし、 (V, H) は $\varepsilon = (\varepsilon_p)_{p|d(K)}$ に対応しているとする。 $\mathcal{L}_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{L}'_\varepsilon$) を (V, H) 内の normal (resp. subnormal) unimodular lattice からなるひとつの $SL(V, H)$ -genus とする。このとき類数 $h_2(\mathcal{L}_\varepsilon)$ (resp. $h_2(\mathcal{L}'_\varepsilon)$) は次式で与えられる:

$$h_2 = \frac{A}{12} \prod_{\substack{p|d(K) \\ p \neq 2}} (p + \varepsilon_p \left(\frac{-1}{p}\right)) + \frac{B}{4} \prod_{\substack{p|d(K) \\ p \neq 2}} (1 + \varepsilon_p)$$

$$+ \frac{C}{3} \prod_{\substack{p \mid d(K) \\ p \neq 2}} (1 + \varepsilon_p \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{-3}{p}\right)) .$$

ここで A, B, C は次の表で与えられる。

		ε_2	$2 \nmid d(K)$	$4 \parallel d(K)$	$d(K) \equiv 8 \pmod{32}$	$d(K) \equiv -8 \pmod{32}$
$\mathcal{L}_\varepsilon$	A		1	3	6	6
	B		1	3	2	2
	C		1	0	0	0
$\mathcal{L}'_\varepsilon$	A	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	x	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown x \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 3 & \diagdown 1 \end{smallmatrix}$
	B	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	x	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown x \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown 1 \end{smallmatrix}$
	C	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	x	$\begin{smallmatrix} \diagup 1 & \diagdown x \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 2 & \diagdown 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \diagup 0 & \diagdown 2 \end{smallmatrix}$

次に $n=3$ とし, 3次元正定値 Hermite 空間 (V, H) とし, standard なものとする: $V=K^3$, $H(x, y) = x^t \bar{y}$ ($x, y \in V$). 命題 5 とその下の注意から, (V, H) 内の unimodular lattice 全体はひとつの $\mathcal{U}(V, H)$ -genus をなすことがわかる。この genus $\mathcal{L}$ は $\mathcal{U}(V, H)$ に関する principal genus に他ならない: $\mathcal{L} \ni O^3$ 。§1 ~ §3 に述べた事にもとづいて $h_3(\mathcal{L})$ を計算し, 次の結果を得る。

定理 8 ($n=3$). 記号は上の通りとする。類数 $h_3(\mathcal{L})$ は次の様に与えられる。

(i) $d(K) \neq -3, -4, -7, -8$ の場合は,

$$h_3(\mathcal{L}) = 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_{41} + T_{42});$$

$$T_1 = h(K) |B_{3,x}| / 2^{t+4} \cdot 3^2,$$

$$T_2 = (h(K)^2 / 2^{t+4} \cdot 3) [4 |d(K)| - 1 - 3(\frac{K}{2})],$$

$$T_3 = (h(K)^2 / 2^{t+3}) [3 + (\frac{K}{2}) + \{1 + (-2, K/\mathbb{Q})_2\} \{1 + (5, K/\mathbb{Q})_2\}],$$

$$T_{41} = (h(K)^2 / 2^{t+2} \cdot 3) [7 - (\frac{K}{3})],$$

$$T_{42} = (h(K)^2 / 2^{t+2} \cdot 3) [1 + (\frac{K}{3})].$$

ここで $h(K)$ は K の類数, $t, B_{3,x}$ は定理 3 と同じとする。

各 T_j は § 1 で述べた固有多項式 $f_j(x)$ の寄与である。

(ii) $d(K) = -3, -4, -7, -8$ の場合は, 順に $h_3(\mathcal{L}) = 1, 1, 2, 2$ となる。

次に $n = 3$ の場合の $SU(V, H)$ に関する類数を考える。一般にユニタリ群に関する類数と特殊ユニタリ群に関する類数の間の関係は, あまり知られていないようである。Iyanaga [9] では両者の間のある不等式が示されている。 $n = 3$ の場合は跡公式の比較によって次の結果が得られる。

定理 9 ($n = 3$). (V, H) は standard なものとし, その中の $U(V, H)$ に関する principal genus を $\mathcal{L}$, $SU(V, H)$ に関する principal genus を $\mathcal{L}''$ とする。このとき $\mathcal{L}$ の類数 $h_3(\mathcal{L})$

は $\mathcal{L}^{(1)}$ の類数 $h_3(\mathcal{L}^{(1)})$ の $h(K)/2^{t-1}$ 倍である。

最後に $n=2, 3$ のときの standard な (V, H) 内の $SU(V, H)$ に関する principal genus の類数 h_2, h_3 の数値例をあげておく。

$d(K)$	-3	-4	-7	-8	-11	-15	-19	-20	-23	-24	-31	-35
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1
h_2	1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	3	4
h_3	1	1	2	2	2	5	3	7	10	7	13	10
$d(K)$	-39	-40	-43	-47	-51	-52	-55	-56	-59	-67	-68	-71
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	2	1	1	5	1	1	2	2	3	1	2	7
h_2	4	4	4	5	4	5	6	4	6	6	6	7
h_3	21	12	8	31	16	18	31	31	26	17	42	66
$d(K)$	-79	-83	-84	-87	-88	-91	-95	-103	-104	-107	-111	-115
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	5	3	1	3	1	1	4	5	3	3	4	1
h_2	7	8	6	6	6	8	10	9	8	10	8	12
h_3	59	43	56	77	40	40	107	88	97	66	133	62

文 献

- [1] Asai, T., The conjugacy classes in the unitary, symplectic, and orthogonal groups over an algebraic number field, J. Math. Kyoto Univ. 16 (1976), 325-350
- [2] Asai, T., The class numbers of positive definite quadratic forms, Japan J. Math. 3 (1977), 239-296
- [3] Braun, H., Zur Theorie der Hermiteschen Formen, Abh. Math. Sem. d. Hansischen Univ. 14 (1941), 61-150
- [4] Eichler, M., "Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Z. 43 (1938), 102-109
- [5] Hashimoto, K., On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980) 227-245
- [6] Hashimoto, K., Class numbers of positive definite ternary quaternion hermitian forms, Proc. Japan Acad. 59 (1983) 490-493
- [7] Hashimoto, K. and Ibukiyama, T., On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), 549-601; — (II), *ibid* 28 (1982), 695-699
- [8] Hayashida, T., A class number associated with the product

- of an elliptic curve with itself, *J. Math. Soc. Japan* 20 (1968), 26-43.
- [9] Iyanaga, K., Class numbers of positive definite hermitian forms, *J. Math. Soc. Japan* 21 (1969), 359-374
- [10] Jacobowitz, R., Hermitian forms over local fields, *Amer. J. Math.* 84 (1962), 441-465
- [11] Ottemba, G., Zur Theorie der hermiteschen Formen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern, *J. reine angew. Math.* 249 (1971), 1-19
- [12] Pizer, A., Class numbers of positive definite quaternary quadratic forms, *J. reine angew. Math.* 286/287 (1976), 101-123
- [13] Ponomarev, P., Class numbers of definite quaternary forms with square discriminant, *J. of Number Theory* 6 (1974), 291-317
- [14] Shimura, G., Arithmetic of unitary groups, *Ann of Math.* 79 (1964), 369-409