

2-sided incompressible Klein bottles in 3-manifolds of genus two

神大 理 森元勘治 (Kanzi Morimoto)

本稿において、genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が 2-sided incompressible Klein bottle を含めば、その Klein bottle は、一つの固定された Heegaard surface との交わりが、一つの circle であるような 2-sided incompressible Klein bottle に ambient isotopic であることを示し、(Lemma 2.1) それを用いて genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が 2-sided incompressible Klein bottle を含む為の一つの必要十分条件を与える (Theorem 3.1)。さらに、fundamental groups 及び homology groups の計算によって、そのような 3-manifolds は無限個存在することを示す。また、genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が、2-sided non-separating compressible Klein bottle を含めば、それは $P \# P$ であ

る (Proposition 3.2) こと P は the twisted S^2 -bundle over S^1 である。

§ 1 Essential annuli and essential Möbius bands in a non-orientable handle body of genus two.

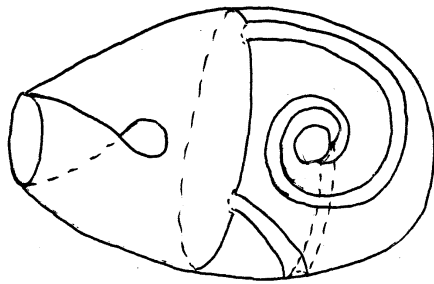
次の二つの lemmas は、W.B.R. Lickorish [5] の Klein bottle 上の simple loops の分類に注意し、T. Kobayashi [4] の lemma 3.2 と同様の議論を用いることによって示される。

Lemma 1.1 V を genus 2 の non-orientable handle body とし、 A を V 内に proper に埋め込まれた、2-sided essential annulus とする。このとき、以下の五つのうちの 하나가成り立つ。(Fig. 1)

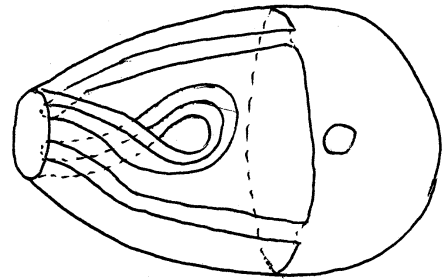
- (1) A は V を、一つの solid torus と、一つの genus 2 の non-orientable handle body に切り開く。
- (2) A は V を、一つの solid Klein bottle と、一つの genus 2 の orientable handle body に切り開く。
- (3) A は V を、一つの solid Klein bottle と、一つの genus 2 の non-orientable handle body に切り開く。
- (4) A は V を、一つの genus 2 の orientable handlebody に

を切り開く。

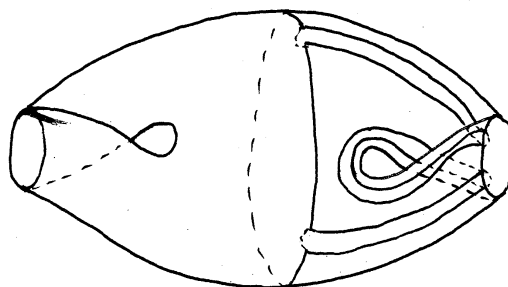
(5) A は V を一つの genus 2 の non-orientable handle body に切り開く



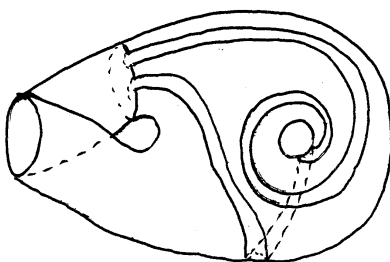
(1)



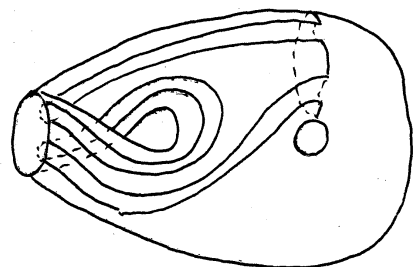
(2)



(3)



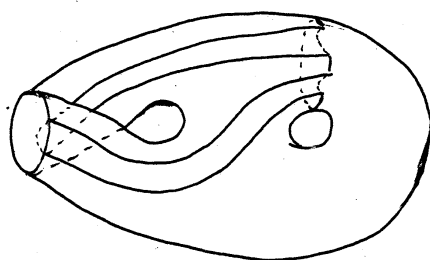
(4)



(5)

(Fig. 1)

Lemma 1.2 V を genus 2 の non-orientable handlebody とし、 S を V 内に proper に埋め込まれた、2-sided essential Möbius band とすれば、 S は V を genus 2 の non-orientable handlebody に切り開く。(Fig. 2)



(Fig. 2)

genus 2 の non-orientable handlebody 内の separating Möbius band は全て boundary parallel であることに注意されたし。

§ 2 Proof of Lemma 2.1

M を non-orientable closed connected 3-manifold とし、 $M = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ を M の genus 2 の Heegaard splitting とする。ここで、 V_i は genus 2 の non-orientable handlebody である。このとき次の lemma が成り立つ。

Lemma 2.1 M 内の任意の 2-sided incompressible Klein bottle は、 $\partial V_1 (= \partial V_2)$ と一つの circle だけで交わる 2-sided incompressible Klein bottle に ambient isotopic である。

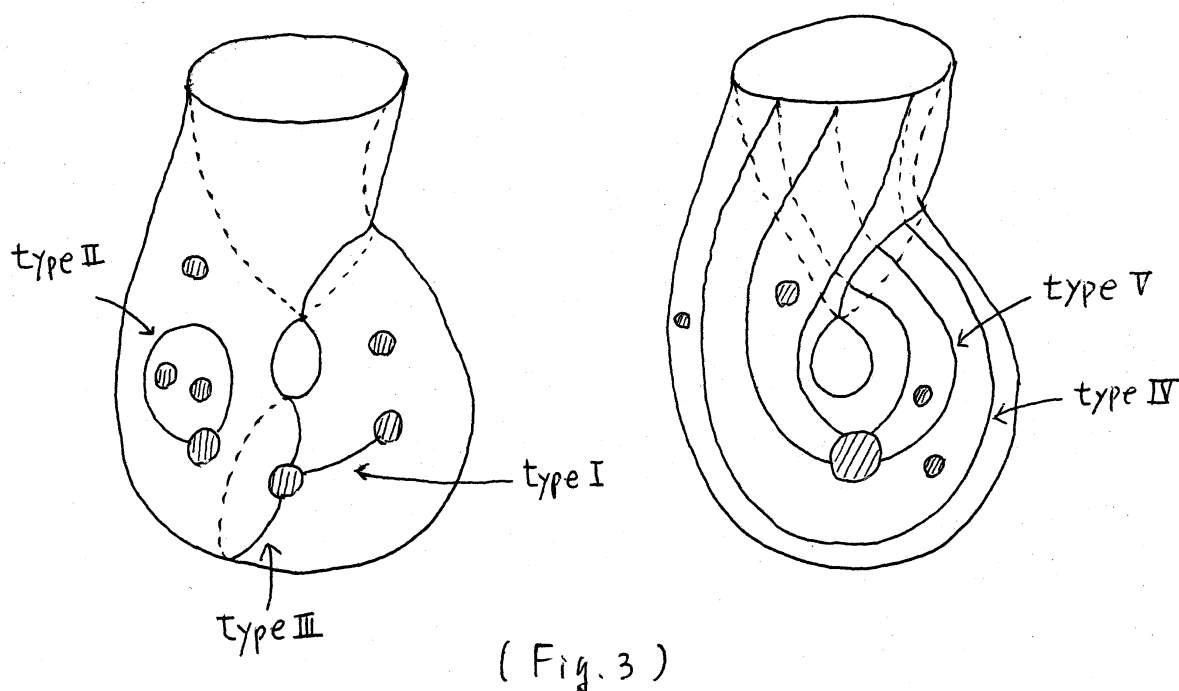
証明.

K を任意に一つ与えられた 2-sided incompressible Klein bottle に ambient isotopic でありかつ、 V_1 との交わりの各 component が disk であるような Klein bottle の中で、 V_1 との交わりの components の数が最小のものとする。

$i=1,2$ に対して $K_i = K \cap V_i$ とおく。 K は V_2 内の 2-sided incompressible surface としてよい。このとき、W. Jaco [3] に記されている如く、 $K_2^0 = K_2$ の hierarchy $(K_2^0, \alpha_1), (K_2^1, \alpha_2), \dots, (K_2^{m-1}, \alpha_m)$ で、 α_i よる i 番目の cut が isotopy of type A at α_i であるような、 M の isotopies の列を生ぜしめるものがある (W. Jaco [3] Ch. IV 参照)。このとき W. B. R. Lickorish [5] によつて各 α_i は以下の五つの types のうちのいずれかである。

α_i は、 ∂K_2 の異なる components に交わる時、type I と呼ばれる。 α_i は、 ∂K_2 の一つの component に交わり、 K_2 を Klein bottle with holes に切り開くとき、type II と呼ばれる。 α_i は、 ∂K_2 の一つの component に交わり、 K_2 を annulus (with holes) に切り開くとき、type III と呼ばれる。 α_i は ∂K_2 の一つの component に交わり、 K_2 を二つの Möbius bands (with holes) に

切り開くとき、type IV と呼ばれる。 d_i は ∂K_2 の一つの component に交わり、 K_2 を Möbius band (with holes) に切り開くとき、type V と呼ばれる。(Fig. 3)



特に、 d_i は、type I でありかつ、 d_i が交わる ∂K_2 の component C で、 $j < i$ ならば $d_j \cap C = \emptyset$ となるようなものが存在するとき、 d -arc と呼ばれる。

$i=1, \dots, m$ に対して $K^{(i)}$ を isotopy of type A at d_i による $K^{(i-1)}$ の image とする。ただし $K^{(0)} = K$ である。しからば、

$K_2^{(i)} = K^{(i)} \cap V_2$ である。また、 $K_1 = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_r$ ($r \geq 1$) とおく。

ここで D_i は disk である。そうして $C_i = \partial D_i$ とおく。しからば $\partial K_2 = \partial K_1 = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$ である。

主張 1 各 d_i は d -arc ではない。

証明。ある d_i が d -arc とする。しからば、M. Ochiai [7] で定義された isotopy of type A の逆操作の議論を用いて、M の ambient isotop h_t ($0 \leq t \leq 1$) で、 $h_0 = \text{id}$, $h_1(K) \cap V_1$ の各 component は disk かつ、 $h_1(K) \cap V_1$ の component の数は、 r より小さい。というものが存在する。これは $K \cap V_1$ の components の数の最小性に矛盾。

以下の主張 2, 3, 4 は 主張 1 の系である。

主張 2 各 d_i は type II ではない。

主張 3 共に type III が又は共に type IV であるような二つの arcs d_i と d_j が dK_2 の同じ component に交わることはない。

主張 4 type IV の arc d_i と、type V の arc d_j が dK_2 の同じ component に交わってれば、 $i < j$ である。

さて、主張 1 と主張 2 より d_i は type III 又は type IV 又は type V である。一般性を失わずに d_i は C_1 に交わるとしてよい。また、 K の incompressibility から、 $\{D_1, D_2, \dots, D_r\}$ は、 V_1 の a complete system of meridian disks となるような二つの disk は含まない。故に以下の三つの場合が生じる。

場合 1 $\{D_1, \dots, D_r\}$ は互いに parallel である separating disks.

場合 1.1 α_1 は type III.

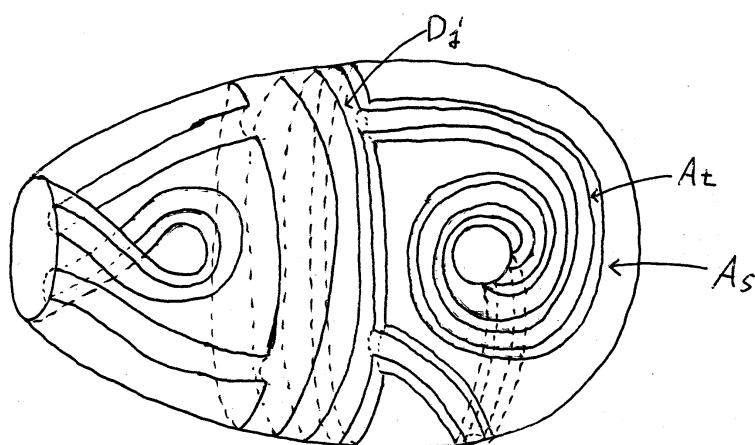
このとき各 α_i は type I 又は type III 又は type V であるが、もし、ある α_i が type V とすれば、 α_i は C_1 に交わらなければならず、 $\alpha_1 \cup \alpha_i$ は $\mathcal{Q}(K - D_1)$ を a disk に切り開く。故に主張 1 から $r=1$ である。今 $r \geq 2$ とせよ。しからば各 α_i は type I 又は type III である。

主張 5 α_i を type I、 α_j を type III とすれば $i > j$ である。

証明。 k を以下の条件を満たす正整数とする： $1 \leq k$ なる整数 k に対しては α_k は type III であり、 α_{k+1} は type I。今 α_i は type I、 α_j は type III かつ $i < j$ となるような i と j が存在したとする。しからば主張 3 に注意して以下を得る。

$K^{(k)} \cap V_1 = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup D_{k+1} \cup \dots \cup D_r$ ここで A_i は isotopy of type A at α_i ($1 \leq i \leq k$) によって生じた separating

essential annulus in V_1 であり、 D_j は互いに parallel な separating disks ($k+1 \leq j \leq r$) である。ただし添え字は適当に変えられているかもしれない。主張 1 より、 α_{k+1} はある annuli A_s と A_t ($1 \leq s < t \leq k$) に交わり、ある D_j で V_1 を二つの genus 1 の handle body に切り開くことにより、 A_s と A_t が parallel となることがわかる。(Fig. 4)



(Fig. 4)

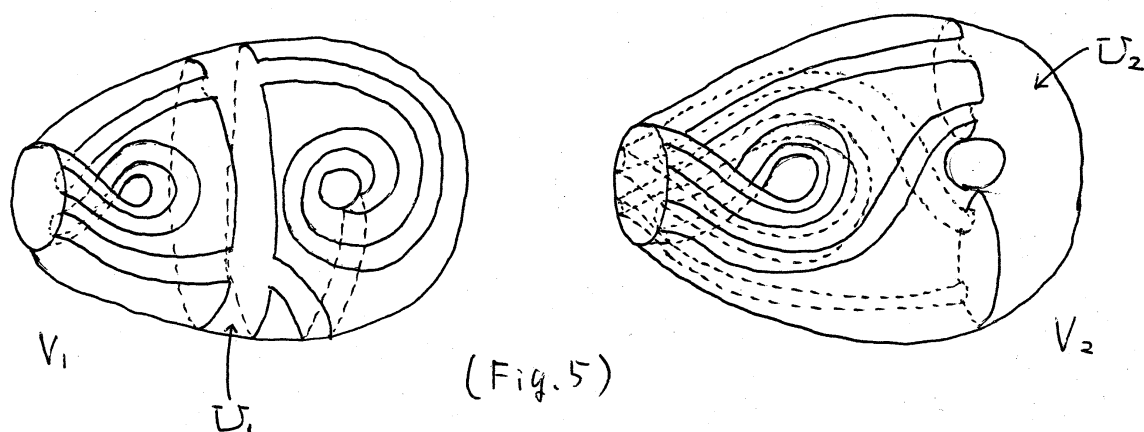
故に $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ の順番を以下のように変えることができる。
 $\alpha'_i = \alpha_i$ ($1 \leq i \leq s$, $k+2 \leq i \leq m$), $\alpha'_{s+1} = \alpha_{k+1}$, $\alpha'_{j+1} = \alpha_j$
 ($s+1 \leq j \leq k$)。しからば、新しい順番の hierarchy (K_2^{i-1}, α'_i)
 ($i=1, \dots, m$) において α'_{s+1} は d-arc となり主張 1 に矛盾。故に
 主張 5 が証明された。

さて、主張 5 により $K^{(r)} \cap V_1 = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ を得る。ここで
 A_i は separating essential annulus である。このとき
 $K^{(r)} \cap V_2 = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ で、各 B_i は essential annulus である。

主張 6 $\{A_i\}_{i=1}^r$ は全て互いに parallel な annulus である。

証明。 $\{A_i\}_{i=1}^r$ が parallel でない annuli を含んでいたとする。しからば $\{B_i\}_{i=1}^r$ も parallel でない annuli を含む。 $i=1, 2$ に対して、以下の条件を満たすような $\mathcal{C}(V_i - N(K^{(r)}))$ の component U_i が唯一つ存在する。ここで $N(K^{(r)})$ は $K^{(r)}$ の M における regular neighborhood である。

U_1 は genus 2 の orientable handlebody であり、
 $(\partial V_1) \cap U_1$ は 2-sphere with 4-holes (Fig. 5)



故に、 $(\partial V_1) \cap U_1$ と $(\partial V_2) \cap U_2$ が張り合わされ $\partial(U_1 \cup U_2)$ は一つの torus となり矛盾。これで主張 6 が証明された。

主張 6 によって A_i 's は全て parallel であることがわかり、このとき V_1 の separating disk D で $K^{(r)}$ に交わらず、かつ V_1 を二つの genus 1 の handle body に切り開くものを見つけることができる。しからば主張 5 の証明と同様の議論を用いて、 $r \geq 2$ なる仮定から矛盾を得る。故に $r=1$ である。これで場合 1.1 が証明された。

以下、場合 1.2 α_i が type II。場合 1.3 α_i が type V。

場合 2 $\{D_1, \dots, D_r\}$ が互いに parallel な non-separating disks,

場合 2.1 α_i が type III, ..., 場合 2.3 α_i が type V。

場合 3. $\{D_1, \dots, D_r\}$ が互いに parallel な separating disks と互いに parallel な non-separating disks。と場合分けするのであ

るが、全て場合 1.1 と同様の議論によって証明される。

これで Lemma 2.1 の証明を終わる。

§ 3 Statement and proof of Theorem 3.1

以下の定義において V は solid Klein bottle, S は Möbius band, I は unit interval $[0, 1]$ を表わすものとする

定義

V に proper に埋め込まれた arc γ が trivial とは、
 $(V, V \cap \gamma)$ が $(S \times I, \{x\} \times I)$ に pair として同相なことを言う。
 ここで x は S の一つの内点である。 $P = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$
 を the twisted S^2 -bundle over S^1 とする。ここで $V_1 \cong V_2 \cong V$ 。
 P 内の simple loop k は、 $i=1, 2$ に対して $V_i \cap k$ が trivial
 arc のとき one bridge knot と呼ばれる。 Q によって monodromy
 が reflection であるような S -bundle over S^1 を示す。 $T(n)$
 によって orbit manifold が disk で、 index n の exceptional
 point を一つ持つような Seifert fibered space を示す。ここで
 n は 2 以上の整数である。 A を $\partial T(n)$ 上の annulus で先の
 fibration に saturated なものとする。 $V = S \times I$ とおき、
 $B = \partial S \times I$ とおく。 B は ∂V 上の annulus である。 $T(n)$ と V から
 A と B を同一視して得られる 3-manifold を $K(n)$ と書く。

以上の準備のもとに、2-sided incompressible Klein bottle
を含む 3-manifolds の三つの族を与える。

C(1) K を P 内の one bridge knot で orientation reversing
simple loop であるものとする。 $P(K)$ を K の knot exterior と
する。このとき C(1) を $P(K)$ と Q からそれぞれの boundaries を張
り合わせて得られる 3-manifolds で $P^2 \times S^1$ でないものの全体の
族とする。

C(2) γ を V に proper に埋め込まれた trivial arc とし、
 $V(\gamma)$ を γ の arc exterior とする。 α を $\partial V \cap V(\gamma)$ 上の simple
loop で、 ∂V をその各が α の一点を含むような二つの Möbius
bands に切り開くものとする。 $\cup$ を α に沿って $V(\gamma)$ に 2-handle
を付けて得られる 3-manifold で solid Klein bottle でない
ものとする。このとき C(2) を $\cup$ と $K(m)$ からそれぞれの
boundaries を張り合わせて得られる 3-manifolds 全体の族と
する。

C(3) F を Klein bottle with one hole とし、 ℓ_1, ℓ_2 を F 上の
disjoint orientation reversing simple loops とする。 $W = F \times I$,
 $\ell^{(i)} = \ell_i \times \{0\}$ ($i=1,2$) とおく。 α を ∂W 上の simple loop で ∂W を
その各が $\ell^{(i)}$ を含むような二つの Klein bottles with one hole に
切り開くものとし、 $\cup$ を α に沿って W に 2-handle を付けて

て得られる 3-manifold とする。このとき $C(3)$ を、 $\mathcal{U}$ から、 $\partial\mathcal{U}$ の二つの Klein bottles を $\mathcal{L}^{(1)}$ が $\mathcal{L}^{(2)}$ に移されるような同相写像で張り合わせて得られる 3-manifolds で $P \times P$ でないものの全体の族とする。

上記の定義のもとに、我々の主定理は以下の如くである。

Theorem 3.1

M を genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed connected 3-manifold とする。このとき、 M が separating incompressible Klein bottle を含む為の必要十分条件は、 M が $C(1)$ 又は $C(2)$ に属することである。 M が

2-sided non-separating incompressible Klein bottle を含む為の必要十分条件は、 M が $C(3)$ に属することである。

証明。

M の genus 2 の Heegaard splitting を $M = V_1 \cup V_2$ とする。 M が 2-sided incompressible Klein bottle を含めば、Lemma 2.1 の証明からその Klein bottle は以下のような $\underbrace{\text{四つの}}_{\text{四つの}}$ Klein bottles K のいずれかに ambient isotopic である。

場合 1.1 $i=1, 2$ に対して $K \cap V_i$ は Lemma 1.1 における type (3) の annulus。

場合 1.2 $K \cap V_i$ は Lemma 1.1 における type (1) の annulus。

$K \cap V_2$ は $\Rightarrow$ の non-separating Möbius bands。

場合 2.1 $i=1, 2$ に対して $K \cap V_i$ は Lemma 1.1 における type (5) の annulus。

場合 2.3 $i=1, 2$ に対して $K \cap V_i$ は non-separating Möbius band。

場合 1.1 と場合 1.2 の時。M を K で切り開くことによ、て M は場合 1.1 なら C(1) に、場合 1.2 なら C(2) に属することがわかる。逆に M が C(1) または C(2) に属せば、M は genus 2 の Heegaard splitting を持ち、separating incompressible Klein bottle を含むことがわかる。

場合 2.1 のとき、場合 2.3 のような Klein bottle が存在することがわかる。場合 2.3 のとき M は C(3) に属する。逆に M が C(3) に属せば、genus 2 の Heegaard splitting を持ち、2-sided non-separating incompressible Klein bottle を含むことがわかる。

Proposition 3.2

M を genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed connected 3-manifold とする。M が 2-sided non-separating compressible Klein bottle を含めば、M は $P \# P$ である。

証明。

K を 2-sided non-separating compressible Klein bottle とし、 D を compressible disk とする。W.B.R. Lickorish [5] に注意し、M. Ochiai [6] の結果を用いれば、 dD は K を一つの annulus に切り開くことがわかる。このとき J. Hempel [2] の lemma 3.17 に注意すれば、 $M \cong P \ast P$ を得る。

§ 4 Calculations of homology groups and fundamental groups.

Proposition 4.1

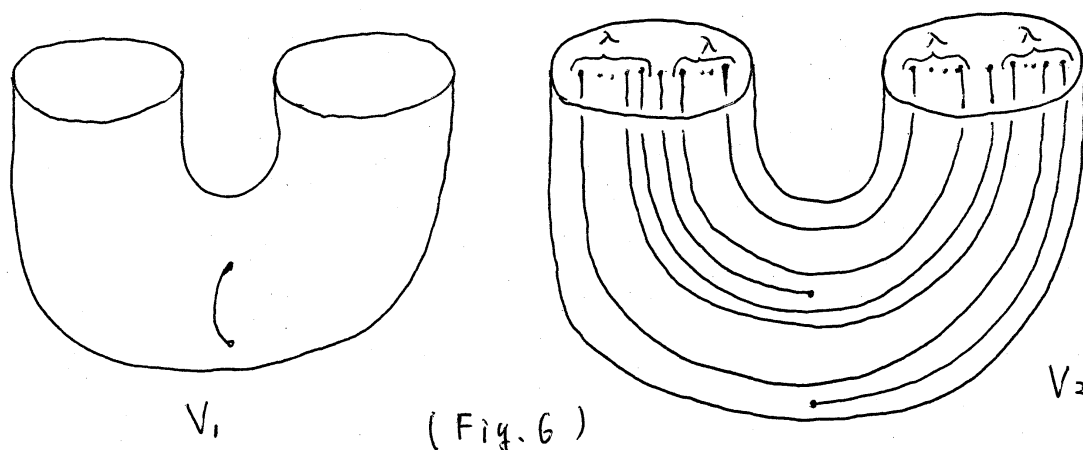
M が $C(1)$ に属せば、 $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ である。 M が $C(2)$ に属せば、 n が奇数のとき、 $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ 、 n が偶数のとき、 $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ である。

証明略

正整数 λ に対し、Fig. 6 で与えられる P 内の one bridge knot を $k(\lambda)$ とし、この $k(\lambda)$ から得られる $C(1)$ の 3-manifold を $M(\lambda)$ とすれば、

$$\pi_1(M(\lambda)) \cong \left\langle \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \mid \begin{array}{l} (xyx^{-1}y)^{\lambda} x x (y^{-1}x^{-1}y^{-1}x)^{\lambda} \\ (xyx^{-1}y)^{\lambda} x y x y^{-1} (x^{-1}y^{-1}x y^{-1})^{\lambda} \end{array} \right\rangle$$

となる。



このとき、R.H. Crowell and R.H. Fox [1] に従って $\pi_1(M(\lambda))$ の elementary ideals を計算することにより、 $\lambda \neq \lambda'$ ならば、 $\pi_1(M(\lambda)) \neq \pi_1(M(\lambda'))$ を得る。故に次の命題が成り立つ。

Proposition 4.2

genus 2 の Heegaard splitting を持ち、separating incompressible Klein bottle を含み、基本群が同型でない 3-manifolds が無限個存在する。

最後に C(3) については次の命題が成り立つ。

Proposition 4.3

負でない任意の整数 t に対して、C(3) に属する 3-manifold M で $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{4t}$ となるものが存在する。

証明略

References

- [1] R.H.Crowell and R.H.Fox : Introduction to Knot Theory , Ginn and Co. , Boston , Math. , 1963.
- [2] J.Hempel : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton N.J. , Princeton University Press , 1976.
- [3] W.Jaco : Lectures on three manifold topology , Conference board of Math. No. 43 , 1980.
- [4] T.Kobayashi : Structures of the Haken manifolds with Heegaard splitting of genus two , Osaka J. Math. 21 (1984) , 437 - 455.
- [5] W.B.R.Lickorish : Homeomorphisms of non-orientable two manifolds , Proc. Cambridge Philos. Soc. 59 (1963) , 307 - 317.
- [6] M.Ochiai : 2-sided embedding of projective planes into 3-manifolds , Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) , 641 - 650.
- [7] M.Ochiai : On Haken's Theorem and its Extension , Osaka J. Math. 20 (1983) 461 - 468.