

結合の変化する大域結合写像系における自発的構造形成

東京大学 総合文化研究科 伊藤 淳司¹

近年、様々なタイプのネットワークに関する研究が盛んになっている。実世界におけるネットワークのほとんどはダイナミクスを持つ要素から構成されており、また、そのダイナミクスがネットワークの構造形成に影響を及ぼしていると考えられるにもかかわらず、ほとんどの研究において、ネットワークの要素はそれ自身のダイナミクスを持っていない。本研究では、動的な要素からなるネットワークに対する抽象モデルを提唱し、数値実験により、主に構造形成に関する特徴を研究した。

われわれのモデルは、互いに相互作用を持つ N 個の動的な要素からなり、またその相互作用の強さは時間的に変動するものとする。 $f(x)$ を要素のダイナミクスを記述するマップの関数とすると、われわれのモデルが従う式は以下になる。

$$x_{n+1}^i = f[(1-c)x_n^i + c \sum_{j=1}^N w_n^{ij} x_n^j], \quad (1)$$

ここで x_n^i は i 番目の要素の n ステップ目における状態変数を表す。 c は他の要素が要素 i のダイナミクスに与える影響の強さを表す。 w_n^{ij} は要素 i から要素 j への、 n ステップ目における結合の強度であり、時間的に変動する。要素のマップとしてはロジスティックマップを用いる ($f(x) = ax(1-x)$) が、他のマップを用いても、それがカオスを示す限りは同様の振る舞いが期待される。

結合のダイナミクスに関しては、以下のようなルールを採用する。まず、状態変数が近い値をもつ要素の間の結合が強められる。続いて、ひとつの要素に流入する結合の強度の総和は、1 に規格化されるものとする。この規格化は、結合間の競合を簡単な形で表現したものである。式は以下になる。

$$w_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cdot g(x_n^i, x_n^j)] w_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cdot g(x_n^i, x_n^j)] w_n^{ij}}, \quad (2)$$

$$g(x_n^i, x_n^j) = 1 - 2|x_n^i - x_n^j| \quad (3)$$

以降、数値実験の結果を示す。要素数は100とし、 δ は0.1に固定する。初期条件としては、まず、結合に関しては、自分自身に対する結合は0とし、その他の結合はすべて同一の値をとるものとする。要素の状態変数に関しては、初期値は0から1までのランダムな数を取るものとする。

パラメータ a と c の値によってさまざまな集団運動が見られるが、ここでは要素間のダイナミクスに同期が見られないパラメータ領域について考慮する。具体的には、 $3.7 < a < 4.0$ 、 $0 < c < 1$ の範囲の値を用いる。このパラメータ領域では、要素間の結合は柔軟に変動し、ネットワークの構造が時間的に変動するのが観察される。

ネットワークの変動の強さを表す指標として、ネットワークの活動度 A を以下のように定義する： $A = \frac{1}{(N-1)^2} \cdot \frac{1}{\tau_m} \sum_{i \neq j} \sum_{n=\tau_t}^{\tau_t+\tau_m} |w_n^{ij} - w_{n-1}^{ij}|$ 。これは結合強度の1ステップあたりの変化量の平均である。図1(a)に活動度 A を a 、 c に対してグレースケールでプロットしたものを示す。対角線の周辺に活動度の高い帯状の領域が見られる。

次に、ネットワーク内に時間的に安定な構造があるかどうかを調べる手段として、まず平均コネクションマトリクスを以下のように定義する： $W^{ij} = \frac{1}{\tau_m} \sum_{n=\tau_t}^{\tau_t+\tau_m} w_n^{ij}$ 。これはコネクションマトリクスの時間平均である。平均マトリクスの要素の値の分散をとることにより、時間的に安定な

¹ E-mail: ito@complex.c.u-tokyo.ac.jp

構造のあるなしを確かめることができる。図 1 (b) に平均マトリクス値の分散をグレースケールでプロットしたものを示す。

図 1 (a)、(b) を比較すると、図 1 (a) における活動度の高い領域が、図 2 (b) では 2 つの領域、すなわち、活動度が高く、かつ分散も高い領域と、活動度が高く、分散は低い領域とに分けられることがわかる。前者の領域内ではネットワーク内に時間的に安定な構造があることを示している。このような領域内で、最も分散の高いパラメータ値、 $a = 3.97$ 、 $c = 0.12$ について、ネットワークの構造をより詳細に調べる。

ネットワークの構造を定量的に調べるため、適当な閾値を設定して結合を離散化し、グラフとして表現することにする。このようにして得られたグラフについて、各要素に入ってくる結合の本数と、出て行く結合の本数の分布をプロットしたのが図 2 である。

入結合に関しては分布は単峰型となり、そのピークは約 8 にある。このような単峰性は入結合に関する規格化によって生じているものと考えられる。一方、出結合の分布はより複雑な形状を持ち、二つの成分に分離できる。すなわち、指数的に減衰する部分と、48 付近にピークを持つ単峰型の成分である。これは出結合に関しては、要素が 2 つのグループ、すなわち、多数の出結合を持つ要素のグループと、非常に少数の出結合しか持たない要素のグループとに分離していることを示している。

モデルの抽象性や GCM のもつ一般性から、本研究で見出されたネットワークの構造形成は、動的な要素からなるネットワーク一般について広く見出されるものと期待される。

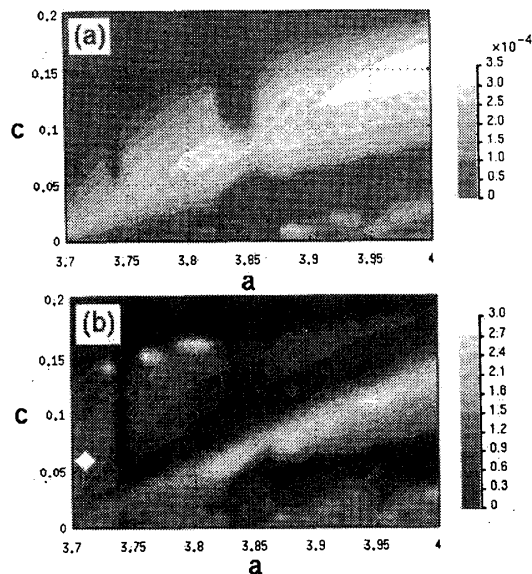


図 1: (a) ネットワークの活動度。(b) 平均コネクションマトリクス値の分散。ここでは出結合の強度の和の分散を用いている。

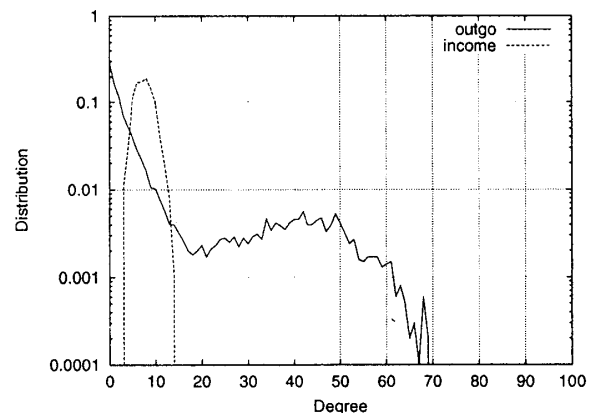


図 2: 入結合と出結合の本数の分布

参考文献

- [1] D.J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998); A. -L. Barabasi and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [2] K. Kaneko, *Physica* **41D**, 137, (1990); **54D**, 5, (1991).
- [3] K. Kaneko, *Physica* **75D**, 55, (1994); J. Ito and K. Kaneko, *Neural Networks* **13**, 275, (2000).