

# Clifford理論と群環上の Auslander-Reiten 列の vertices

大阪大 理 宇野勝博 (Katsuhiko Uno)

$G$  を有限群、 $k$  を標数  $p$  の体とする。  $W$  を non-projective な ( $k$  上有限次元の) indecomposable 右  $kG$ -module とするとき、  
 いわゆる Auslander-Reiten 列 (以下 AR 列)

$$SW: 0 \rightarrow \Omega^2 W \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow 0$$

が同型を度外視して一意的に存在する。ここで、 $X$  は (右)  $kG$ -module,  $\Omega$  は Heller 作用素である。(AR 列の定義については [11, §17.6] 参照。) AR 列は一般に  $k$  上有限次元の多元環上の modules に対してもその存在と一意性が知られている。しかし、 $kG$  には群環特有のものとして部分群からの誘導 (Induction) がある。そこで AR 列の relative projectivity について次の様に定義する。

**定義 0**  $H \leq G$  に対し AR 列  $SW$  が  $H$ -projective であるとは、  
 $\exists 0 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow 0$  ( $kH$ -modules の短完全列) s.t.  $0 \rightarrow Z_1^G \rightarrow Z_2^G \rightarrow Z_3^G \rightarrow 0$   
 は、 $SW$  と他の短完全列の直和である。

ここでは、 $SW$  を  $H$ -projective としたとき、 $H$  をどれだけ小さく取れるかという問題を考える。

なお、 $SW$  の relative projectivity は Green [4] によって導入された概念であり、それに従って categorical な formulation 並びに必要となる結果について、§1 で述べる。

また、以下の内容は [6] と若干の重複があるので、そちらについても参照されたい。

## §1 準備

以下では、 $G$  は有限群、 $k$  を標数  $p$  の体とし、特に断らない限り module といえは、有限生成 右-module を意味するものとする。

$kG$ -module  $W$  に対して、 $H (\leq G)$  と  $kH$ -module  $W_1$  が存在して、 $W$  が  $W_1^G (= W_1 \otimes_{kH} kG)$  の直和因子に同型になるとき、(以下、この事を  $W | W_1^G$  と表す。)  $W$  は  $H$ -projective であるという。

$k$  自身は  $\{1\} (\leq G)$  <sup>上の</sup> module と考えられ、 $(k)^G \cong kG$  (正則表現) であるから、

$$\text{projective} \iff \text{H-projective}$$

である。また、次の事が知られている。

$$t_H^G : \text{End}_{\mathbb{K}H}(W) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}G}(W)$$

を trace map, 即ち  $f \in \text{End}_{\mathbb{K}H}(W)$  に対し  $\sum_{x \in H \backslash G} f^x$ ,  
 (但し  $\sum_{x \in H \backslash G} f^x(w) = \sum_{x \in H \backslash G} f(wx^{-1})x \quad (w \in W)$ ) を対応させる  
 $\mathbb{K}$ -linear な写像とする。このとき、次が成り立つ。

### Higman's criterion

$$W \text{ が } H\text{-projective} \iff \text{Id}_W \in \text{Im}(t_H^G).$$

定義からわかるように "H-projective" なる概念は、"直和"、  
 "induction" の定義できる場合には、いつでも与えることが  
 できる。

$\text{Mod } \mathbb{K}G$  で (有限次元右)  $\mathbb{K}G$ -modules と  $\mathbb{K}G$ -homomorphisms の  
 なる category を表すことにする。これは、いわゆる  $G$ -functor  
 [10] であり、"H-projective" なる概念が定義できる訳であ  
 る。

次に、 $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  で  $\text{Mod } \mathbb{K}G$  から  $\text{Mod } \mathbb{K}$  への finitely presented  
 $\mathbb{K}$ -linear contravariant functors とそれらの間の natural

transformations のなす category を表す。例えば、 $RG$ -module  $W$  にに対し、 $\text{Hom}_{RG}(\cdot, W)$  は、 $m\text{Mod } RG$  の object である。(F.12)

以下、簡単のため、 $\text{Hom}_{RG}(\cdot, W)$  のことを  $g(\cdot, W)$  と書く。

$m\text{Mod}$  については、Auslander-Reiten により、深く研究されているが、念のため、それら（の一部を）ここで複習しておく。  
([4, §1] も見よ。)

①  $m\text{Mod } RG$  の <sup>各</sup> object  $F$  について  $\{F(W)\} (W: RG\text{-module})$  を考えることにより、 $m\text{Mod } RG$  の objects の 直既約性、既約性、... が定義できる。

② 各  $RG$ -module  $W$  にに対し、 $g(\cdot, W)$  は  $m\text{Mod } RG$  の projective な object で、 $W$  が indec.  $\iff g(\cdot, W)$  が indec. が成り立つ。(これは、下の 3 から従う。)

③ (米田の補題):  $W \mapsto g(\cdot, W)$  なる対応は、 $\text{Mod } RG$  から  $m\text{Mod } RG$  への covariant functor を与え、しかも、

$$(i) \quad W \cong W' \text{ in } \text{Mod } RG \iff g(\cdot, W) \cong g(\cdot, W') \text{ in } m\text{Mod } RG$$

$$(ii) \quad \text{Hom}_{RG}(W, W') \cong \text{Hom}_{m\text{Mod } RG}(g(\cdot, W), g(\cdot, W'))$$

が成り立つ。(即ち、上の functor は faithful かつ full である)

上の (ii) の同型は、 $f \in g(W, W')$  にに対し、 $f_*: g(\cdot, W) \rightarrow g(\cdot, W')$  (但し、<sup>各</sup>  $RG$ -module  $X$  に対し  $f_*(X)(\varphi) = f \circ \varphi$  ( $\varphi \in g(X, W)$ )) を対応させることにより、得られる。この同型を一般に  $\gamma (= \gamma_{W, W'})$  と

書くことにする。

④  $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  の simple な object  $F$  は次のいずれかの min. projective resolution を持つ。

$$(a) \quad 0 \rightarrow_G (\cdot, \text{rad } W) \rightarrow_G (\cdot, W) \rightarrow F \rightarrow 0$$

(但し,  $W$  は proj. indec.  $\mathbb{K}G$ -module)

$$(b) \quad 0 \rightarrow_G (\cdot, W'') \rightarrow_G (\cdot, W') \rightarrow_G (\cdot, W) \rightarrow F \rightarrow 0$$

(但し,  $W$  は non-proj. indec.  $\mathbb{K}G$ -module で  $0 \rightarrow W'' \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow 0$  は AR 列)

逆に、各 indec.  $\mathbb{K}G$ -module から  $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  の simple な object が上の様に得られ、projective cover の一意性より、これは  $1$  対  $1$  に対応する。この意味で、 $g(\cdot, W)$  を projective cover に持つ  $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  の simple な object を  $SW$  と書く。

また、 $g(\cdot, W) \rightarrow SW \rightarrow 0$  の kernel を  $\text{rad}_g(\cdot, W)$  と表すと

$$\text{rad}_g(X, W) = \{ f \in g(X, W) : f \circ g \in \text{rad } \text{End}_{\mathbb{K}G}(W) \ \forall g \in g(W, X) \}$$

( $X$  は  $\mathbb{K}G$ -module) となることが知られている。

更に、上の (a) は、一般の有限次元  $\mathbb{K}$ -algebra で、simple modules とその projective covers を対応させることにより、simple modules の同型類の代表系と proj. indec modules の同型類の代表系が  $1$  対  $1$  に対応していることに相当する。従って、上の事は、この対応の自然な拡張であり、この意味で non-proj indec  $\mathbb{K}G$ -module  $W$  (すなわち  $g(\cdot, W)$ ) と  $W$  で終わる AR 列  $\blacksquare$  が、 $1$  対  $1$  に対応している。

ここまでの所は、 $\mathbb{K}G$  が群環であるという事実は重要ではない。  
しかし、最近 J. A. Green [4] が  $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  が  $G$ -functor となることを示し、" $H$ -projective" 等の概念を定義した。

まず、induction を定義する。

$H \leq G$  に対し、 $\text{Ind}_H^G : m\text{Mod } \mathbb{K}H \rightarrow m\text{Mod } \mathbb{K}G$  と  
 $m\text{Mod } \mathbb{K}H$  の object  $F$  と  $\mathbb{K}G$ -module  $W$  に対し、

$$(\text{Ind}_H^G F)(W) = F(W_H)$$

と定義する。 ( $W_H$  は  $W$  の  $H$  への restriction である)

同様に restriction  $\text{Res}_H^G : m\text{Mod } \mathbb{K}G \rightarrow m\text{Mod } \mathbb{K}H$  は、  
 $m\text{Mod } \mathbb{K}H$  から  $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  への induction の adjoint として定義される。  
さらに conjugation も定義でき、 $m\text{Mod } \mathbb{K}G$  は  $G$ -functor となる。

特に  $\mathbb{K}G$ -module  $W$  に対して、Frobenius 相互律中に現われる同型を用いて、

### 補題 1.1

$$\text{Res}_H^G ({}_G(\cdot; W)) \cong {}_H(\cdot, W_H).$$

を得る。 ( $\mathbb{K}H$ -module  $X$  に対し  $\text{Res}_H^G ({}_G(\cdot; W))(X) = {}_G(X^G, W)$  となることに注意せよ。) この同型は、以下で頻繁に使われる。

**定義 1.2**  $m\text{Mod } kG$  の object  $F$  について,  $H \leq G$  と  $m\text{Mod } kH$  の object  $F_1$  で  $F_1 \mid \text{Ind}_H^G F$  となるものが存在するとき,  $F$  は  $H$ -projective であるという.

注意 non-proj. indec  $kG$ -module  $W$  に対し,  $SW$  を  $W$  で終わる AR 列 と同一視すると, simple な object  $SW$  が 定義 1.2 の意味で  $H$ -projective であることと, AR 列  $SW$  が 定義 0 の意味で  $H$ -projective であることは, 同値であることが, 簡単に確かめられる.

さて, 次の結果は重要であり, 対応する  $\text{Mod } kG$  での類似の結果は, やはり Green によって以前に得られており, よく知られている.

**定理 1.3.** ([4. Th. 4.7])

$F$  を  $m\text{Mod } kG$  の indec. な object とするとき,  $G$  の  $p$ -部分群  $P$  が  $G$ -共役を  $\text{度}$  外観して一意的に定まり,

$$F \text{ が } H\text{-proj} \iff H \geq_G P$$

が成り立つ. (ここで  $H \geq_G P$  は  $\exists x \in G$  s.t.  $H^x \supseteq P$  となることを意味する.)

定理 1.3 の  $P$  を  $F$  の vertex とよび  $\text{vtx}(F)$  と表す。最初に提示した問題は「 $\text{vtx}(SW)$  を求めよ」と言いかえられる。

$SW$  は simple であるから indec. であり, しかも次が成立する。

**定理 1.4** ([4, (5.12) and (7.7)])

$W$  を indec.  $kG$ -module,  $P = \text{vtx}(W)$  (即ち.  $\text{Mod } kG$  における定理 1.3 と同様の主張から従う.  $W$  が  $P$ -projective となる最小の  $P$ )、 $S$  を  $W$  の source (即ち.  $W|S^G$  となる indec.  $kP$ -module) とする。さらに  $I_G(S)$  を  $N_G(P)$  における  $S$  の inertial 部分群:

$$I_G(S) = \{ x \in N_G(P) : S \otimes_{kP} x \cong S \text{ (} kP\text{-同型)} \}$$

とする。このとき、次が成り立つ。

$$I_G(S) \geq_G \text{vtx}(SW) \geq_G \text{vtx}(W).$$

注意 Green 対応の理論、及び Clifford 型の定理により、上の状況で、 $\underbrace{kI_G(S)}_{\text{indec.}}\text{-module } W_1$  で

$$W|W_1^G, \quad \text{vtx}(W) = \text{vtx}(W_1), \quad \text{vtx}(SW) = \text{vtx}(SW_1)$$

を満たすものが存在することが知られている。従って、 $\text{vtx}(SW)$  を求めるには、 $\text{vtx}(W) \trianglelefteq G$ ,  $W$  の source  $S$  は  $G$ -invariant (i.e.  $I_G(S) = G$ ) と仮定してよい。

このような状況では、(stable) Clifford 理論が有用であり、これについて §2 で述べる。

最後に Higman's criterion について述べる。

定義は省略するが ([4, §5] を見よ)  $m \text{Mod } \mathbb{K}G$  の objects  $F, F'$  に対して、"trace  $\overset{a}{\mapsto}$ "  $T_H^G : \text{Hom}(\text{Res}_H^G F, \text{Res}_H^G F') \rightarrow \text{Hom}(F, F')$  が定義される。これについて次が成り立つ。

**定理 1.5.** ([4, Th. 5.11])

$m \text{Mod } \mathbb{K}G$  の object  $F$  について

$$F \text{ が } H\text{-projective} \iff \text{Id}_F \in \text{Im}(T_H^G).$$

## §2. 一般 Clifford 理論

この section では stable Clifford 理論 [1] について述べる。我々の目的のためには、群環の場合で充分であるが、折角の機会であるので、いわゆる一般 Clifford 理論を環の extensions に関して述べることにする。 ([7])

$R, S$  を 1 をもつ環とし、 $\iota: R \rightarrow S$  を  $\iota(1_R) = 1_S$  なる環準同型とする。さらに  $R$ -module  $V$  を 1 fix しておく。

任意の  $S$ -module は  $\iota$  を通して  $R$ -module とみなせる。特に  $S$  自身は  $R$ - $R$ -bimodule と考えられる。

**定義 2.1.**  $S$ -module  $V^S$  ( $:= V \otimes_R S$ ) が  $R$ -module として、  
 $\underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n \text{ 回}} \quad (\exists n)$  の直和因子に同型であるとき、即ち  
 $(V^S)_R \mid V \oplus \cdots \oplus V$  となるとき、 $V$  は  $S$ -invariant であるという。

**注意**  $N \trianglelefteq G$ ,  $S = \mathbb{K}G$ ,  $R = \mathbb{K}N$ ,  $\iota: \mathbb{K}N \rightarrow \mathbb{K}G$  を自然なうめ込みとすると、 $\mathbb{K}N$ -module  $V$  について  $(V^G)_N \cong \bigoplus_{g \in G/N} (V \otimes g)_N$  となるので、「 $V$  が  $\mathbb{K}G$ -inv.  $\iff \bigoplus_{g \in G/N} (V \otimes g) \mid V \oplus \cdots \oplus V$ 」となる。特に  $V$  が直既約のとき、これは「 $V \otimes g \cong V$  as  $\mathbb{K}N$ -module  $\forall g \in G$ 」と同値になり、 $V$  が  $G$ -inv. ( $I_G(V) = G$ ) であることに他ならない。

$E = \text{End}_S(V^S)$ ,  $E_1 = \text{End}_R(V)$  とおく。 $\iota': E_1 \rightarrow E$  を  $\iota'(\varphi) = \varphi \otimes \text{Id}_S$  ( $\varphi \in E_1$ ) と定義すると、 $\iota'$  は環準同型となる。また、 $V^S$  は自然に  $E$ - $S$ -bimodule と考えられる。

任意の  $S$ -module  $W$  に対し、 $\text{Hom}_S(V^S, W)$  は自然に  $E$ -module となる。また任意の  $E$ -module  $Y$  に対し  $Y \otimes_E V^S$  は自然に  $S$ -module となる。実際、 $\text{Hom}_S(V^S, \cdot)$  は  $\text{Mod}(S)$  から  $\text{Mod}(E)$  への、また  $\cdot \otimes_E V^S$  は  $\text{Mod}(E)$  から  $\text{Mod}(S)$  への covariant functor を与える。

$\text{Mod}(S|V)$  を object が  $S$ -module  $W$  で  $W_R | \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n \text{ 回}} (\exists n)$  を満たすものからなる  $\text{Mod}(S)$  の additive full subcategory. また、 $\text{Mod}(E|E_1)$  で、object が  $E$ -module  $Y$  で、 $Y_{E_1} | E \oplus \cdots \oplus E$ , 即ち、 $Y_{E_1}$  が (f.g.) proj.  $E_1$ -module となるものからなる  $\text{Mod}(E)$  の additive full subcategory を表す。

### 定理 2.2 (Clifford correspondence)

$V$  は  $S$ -inv. と仮定する。このとき、 $\text{Hom}_S(V^S, \cdot)$ ,  $\cdot \otimes_E V^S$  の  $\text{Mod}(S|V)$ ,  $\text{Mod}(E|E_1)$  へのそれぞれの制限は、 $\text{Mod}(S|V)$  と  $\text{Mod}(E|E_1)$  の間の equivalence を与える。

$E$  が扱い易い環となるとき、上の定理により、 $\text{Mod}(S|V)$  の objects は対応する  $\text{Mod}(E|E_1)$  の objects を考えることにより、その様子が良くわかることがある。

重要な場合は、やはり  $N \trianglelefteq G$ ,  $R = kN$ ,  $S = kG$  の場合がある。  
このとき、次が成り立つ。

(一般に有限次元  $k$ -algebra  $R$  に対し  $JR$  はその radical を表す。)

**補題 2.3.**  $V$  を  $G$ -inv.  $kN$ -module とする。このとき:

(i)  $E$  は 強  $G/N$ -次数つき algebra となる。即ち  $E$  は sub-spaces  $E_{\bar{x}}$  ( $\bar{x} \in G/N$ ) 達への分解  $E = \bigoplus_{\bar{x} \in G/N} E_{\bar{x}}$  をもち、  
 $E_{\bar{x}} E_{\bar{y}} = E_{\bar{xy}}$  ( $\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/N$ )、かつ、各  $E_{\bar{x}}$  は  $E$  の unit を少なくとも 1 つ含む。さらに、 $E_1 = E_1 \in \text{End}_R(V)$  としうる。

(ii)  $(JE_1)E$  は  $E$  の両側イデアルである。

(iii)  $E_1/JE_1 \cong k$  のとき、 $E/(JE_1)E$  は、 $G/N$  のある twisted group algebra over  $k$  と同型になる。

我々の目的とは直接関係ないが 定理 2.2 と関連して知られていることをつけ加えておく。 ([7])

(i)  $\iota: R \rightarrow S$  が Kasch, 中山の意味で (proj.) Frobenius のとき、  
 $V$  が  $S$ -inv. なら、 $\iota: E_1 \rightarrow E$  も (proj.) Frobenius となる。更に  
このとき、いわゆる複合 (compounding) ([3]) が成り立つ。  
ちなみに、 $S$  が 完備局所ネーター環、 $R$  が  $S$  に含まれる

正則局所環のとき、 $i: R \hookrightarrow S$  が (free) Frobenius であることと、 $S$  が Cohen-Macaulay でしかも Gorenstein であることは同じである。

vii)  $V$  が  $S$ -inv. で completely reducible のとき、 $V^S$  の  $S$ -submodules のなす lattice と  $E$  の右イデアルのなす lattice は同型である。

### §3. Vertices of simple objects of $m\text{Mod } \mathbb{K}G$ .

$W \in \text{indec. } \mathbb{K}G\text{-module}$  として fix し、simple object  $SW$  の vertex を求める。

定理 1.4 より、 $\text{stx}(W) \leq G$  としてよい、かつ  $W$  の source は  $G$ -inv. としてよい。

そこでまず 次の状況で考える。

(\*)  $N \leq G$ ,  $V$  は  $G$ -inv.  $\mathbb{K}N$ -module,  $W \mid V^G$  とする。

さらに、 $E = \text{End}_{\mathbb{K}G}(V^G)$ ,  $e \in W$  に対応する  $E$  の primitive idempotent とする ;  $e V^G = W$ 。 また、 $E_e = \text{End}_{\mathbb{K}N}(V)$  とする。

このとき、次が成り立つ。

定理 3.1. <sup>([9])</sup>  $N \leq H \leq G$  なる  $G$  の部分群  $H$  に対し.

$SW$  が  $H$ -proj.  $\iff eE/eJE$  が  $H/N$ -proj.

注意 (i) 定理の右辺で  $eE/eJE$  が  $H/N$ -proj. とは、強  $G/N$ -次数つき algebra  $E$  上の module として考えたものである。即ち  $E_H := \text{End}_{kH}(V^H)$  とおくと、 $E_1 (= \text{End}_{kN}(V)) \hookrightarrow E$  と同様に、 $E_H \hookrightarrow E$  なる自然なうめ込みがあり、この意味で  $E_H$  を  $E$  の subalgebra と思う。このとき、 $\exists Y: E_H\text{-module s.t. } eE/eJE \mid Y \otimes_{E_H} E$  となることから  $eE/eJE$  が  $H/N$ -proj. の意味である。また、 $E$  のこの relative projectivity に対しても Higman's criterion (と同様の命題) が成り立つ。

(ii)  $eE/eJE$  は simple  $E$ -module であるが、実は  $JE_1$  はこの module を annihilate する。従ってこれは  $E/(JE_1)E$ -module と考えられ、 $k$  が十分大で  $V$  が indec. のときは、補題 2.3 (ii) より、 $G/N$  のある twisted group algebra 上の simple module と考えられる。このような algebra 上の modules の relative projectivity の定義は [2] でも与えられているが、上の注意 (i) で述べた定義と一致する。

(iii) 定理の  $(\Rightarrow)$  は以前に得られていた。 ([6, §3])

実際,  $eE/eJE$  は functor  $SW$  の  $V^G$  での値  $SW(V^G)$  として得られる。即ち  $m\text{Mod } kG$  での  $\overset{\text{exact}}{\text{sequence}} \quad G(\cdot, W) \rightarrow SW \rightarrow 0$  から  $E\text{-modules}$  の  $\overset{\text{exact}}{\text{sequence}} \quad G(V^G, W) \rightarrow SW(V^G) \rightarrow 0$ , i.e.,  $eE \rightarrow eE/eJE \rightarrow 0$  を得る。従って  $(\Rightarrow)$  は極めて自然な命題であり, 簡単な証明もある。しかし  $(\Leftarrow)$  は明らかではなく, 証明には, Higman's criterion を用いる。

(証明のスケッチ)

Step I まず登場する同型写像達を列挙しておく。

1. 米田同型 (§1. [3])

$$\Upsilon: \text{End}_{kG}(W) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{m\text{Mod } kG}(G(\cdot, W))$$

$$\Upsilon_H: \text{End}_{kH}(W_H) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{m\text{Mod } kH}(H(\cdot, W_H))$$

(共に  $k$ -algebras としての同型で,  $f \mapsto f_*$  にうつす)

2. Frobenius 同型 (補題 1.1)

$$\alpha_H(\cdot): \text{Res}_H^G(G(\cdot, W)) = G(\cdot, W)_H \xrightarrow{\sim} H(\cdot, W_H)$$

3. Clifford correspondence の同型 (定理 2.2)

$$\varepsilon: \text{End}_{kG}(W) \xrightarrow{\sim} \text{End}_E(eE) = eEe \quad (\text{as } k\text{-algebras})$$

4.  $\text{Mod}(E)$  と  $\text{Mod}(E_H)$  をつなぐ Frobenius 同型

(定理 3.1 の下の注 (i) も見よ.)

$$a': eE =_G (V^G, W) \xrightarrow{\sim} {}_H(V^H, W_H) = eE_H \quad (\text{as } E_H\text{-modules})$$

以上の同型達は trace maps と次の様に関係している。

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{End}_{m\text{Mod } kG} ({}_G(\cdot, W)) & \xleftarrow[\gamma]{\sim} & \text{End}_{kG} (W) & \xrightarrow[\gamma]{\sim} & \text{End}_E (eE) \\
 \uparrow \tau_H^G & & \uparrow \tau_H^G & & \uparrow \tau_H^G \\
 \text{End}_{m\text{Mod } kH} ({}_{\text{Res}_H^G}({}_G(\cdot, W))) & & \text{End}_{kH} (W_H) & & \text{End}_{E_H} (eE) \\
 \searrow a_H(\cdot) & & \searrow \gamma_H & & \searrow \gamma_H \\
 \text{End}_{m\text{Mod } kH} ({}_H(\cdot, W)) & & & & \text{End}_{E_H} (eE_H)
 \end{array}$$

(Curved arrows indicate commutativity of the squares.)

但し、 $\tau_H^G$  (trace map) に対しては、具体的に<sup>定義を</sup>述べてないが、 $E$ が<sup>3重</sup> $G/N$ -次数つき algebra であることを利用して、 $\tau_H^G$  と同様に定義できる。また上の diagram の左半分の可換性は [[4, Prop. 6.4]] で示されている。さらに、 $a_H(\cdot)$ 、 $a'$  については、元の同型写像が induce する endomorphism rings の同型を同じ文字で表している。

Step II Step I の diagram から  $SW$  或いは  $eE/eJE$  の入った diagram へ移行するため. 次の事を思い出しておく.

$G(\cdot, W)$ ,  $H(\cdot, W_H)$  はそれぞれ  $m\text{Mod } kG$ ,  $m\text{Mod } kH$  の proj. な objects である. また,  $eE$ ,  $eE_H$  はそれぞれ,  $\text{Mod } E$ ,  $\text{Mod } E_H$  の proj. な objects である. しかも exact sequences

$$\begin{aligned} G(\cdot, W) &\rightarrow SW \rightarrow 0, & eE &\rightarrow eE/eJE \rightarrow 0 \\ \text{Res}_H^G(G(\cdot, W)) &\rightarrow \text{Res}_H^G(SW) \rightarrow 0, & (eE)_{E_H} &\rightarrow (eE/eJE)_{E_H} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

がある. ここで  $E_G^{(1)}$  等を次の様におく.

$$\begin{aligned} E_G^{(1)} &= \{ f \in \text{End}_{m\text{Mod } kG}(G(\cdot, W)) \mid f(\text{rad}_G(\cdot, W)) \subset \text{rad}_G(\cdot, W) \} \\ I_G^{(1)} &= \{ \quad \quad \quad \mid f(G(\cdot, W)) \subset \quad \quad \quad \} \\ E_H^{(1)} &= \{ f \in \text{End}_{m\text{Mod } kH}(\text{Res}_H^G(G(\cdot, W))) \mid f(\text{Res}_H^G(\text{rad}_G(\cdot, W))) \subset \text{Res}_H^G(\text{rad}_G(\cdot, W)) \} \\ I_H^{(1)} &= \{ \quad \quad \quad \mid f(\text{Res}_H^G(G(\cdot, W))) \subset \quad \quad \quad \} \\ E_G^{(2)} &= \{ f \in \text{End}_E(eE) \mid f(eJE) \subset eJE \} \\ I_G^{(2)} &= \{ \quad \quad \quad \mid f(eE) \subset eJE \} \\ E_H^{(2)} &= \{ f \in \text{End}_{E_H}(eE) \mid f(eJE) \subset eJE \} \\ I_H^{(2)} &= \{ \quad \quad \quad \mid f(eE) \subset eJE \} \end{aligned}$$

$E_*^{(*)}$  は対応する endomorphism ring の subalgebra とし,  $I_*^{(*)}$  は  $E_*^{(*)}$  のイデアルになるのは明らかである. また, 上に述べたことより,

$$\begin{aligned} \text{End}_{m\text{Mod } kG}(SW) &\cong E_G^{(1)} / I_G^{(1)} \\ \text{End}_{m\text{Mod } kH}(\text{Res}_H^G(SW)) &\cong E_H^{(1)} / I_H^{(1)} \end{aligned}$$

$$\text{End}_E(eE/eJE) \cong E_G^{(2)} / I_G^{(2)}$$

$$\text{End}_{E_H}(eE/eJE) \cong E_H^{(2)} / I_H^{(2)}$$

となる。

Step III  $f \in \text{End}_{kH}(W_H)$  に対して次が成り立つ。

$$(i) \quad \alpha'^{-1} z_H(f) \in E_H^{(2)} \iff a_H(\cdot)^{-1} \gamma_H(f) \in E_H^{(1)}$$

$$" \in I_H^{(2)} \iff " \in I_H^{(1)}$$

$$(ii) \quad \alpha'^{-1} z_H(f) \in E_H^{(2)} \text{ (resp. } I_H^{(2)}) \Rightarrow z t_H^G(f) \in E_G^{(2)} \text{ (resp. } I_G^{(2)})$$

$$a_H(\cdot)^{-1} \gamma_H(f) \in E_H^{(1)} \text{ (resp. } I_H^{(1)}) \Rightarrow \gamma t_H^G(f) \in E_G^{(1)} \text{ (resp. } I_G^{(1)}).$$

実際には、この step が証明の key であり、これを示すには、各 module, isomorphism の定義にたどり着き、check していくしかない。

Step IV Step III (i) より  $\alpha'^{-1} z_H \gamma_H^{-1} a_H(\cdot)$  は同型

$$\theta_H : E_H^{(1)} / I_H^{(1)} \xrightarrow{\sim} E_H^{(2)} / I_H^{(2)} \quad (\text{as } k\text{-algebras})$$

を induce する。  $H=G$  のときは、  $\alpha'^{-1} z_H = z$ ,  $a_H(\cdot)^{-1} \gamma_H = \gamma$  であるので特に

$$\theta_G : E_G^{(1)} / I_G^{(1)} \xrightarrow{\sim} E_G^{(2)} / I_G^{(2)}$$

を得る。

Step I の diagram の可換性と Step III (ii) より 次の diagram を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 E_G^{(1)} / I_G^{(1)} & \xrightarrow[\theta_G]{\sim} & E_G^{(2)} / I_G^{(2)} \\
 \uparrow \overline{T_H^G} & \cap & \uparrow \overline{I_H^G} \\
 E_H^{(1)} / I_H^{(1)} & \xrightarrow[\theta_H]{\sim} & E_H^{(2)} / I_H^{(2)}
 \end{array}$$

ここで  $\overline{T_H^G}$ ,  $\overline{I_H^G}$  はそれぞれ,  $T_H^G$ ,  $I_H^G$  が induce する写像である。  
 この diagram と Step II の結果より, 次の diagram が得られること  
 とか check できる.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{End}_{\text{mod } kG}(SW) & \xrightarrow{\sim} & \text{End}_E(eE/eJE) \\
 \uparrow T_H^G & \cap & \uparrow I_H^G \\
 \text{End}_{\text{mod } kH}(Res_H^G(SW)) & \xrightarrow{\sim} & \text{End}_{E_H}(eE/eJE)
 \end{array}$$

定理の主張は, この diagram と Higman's criterion (定理1.5) より ただちに得られる。

次に 定理 3.1 の 2, 3 の応用について述べる。

**系 3.2**  $k$  は十分大とする。  $W$  を indec.  $kG$ -module,  $P = \text{vt}_x(W)$   $S$  を  $W$  の source,  $I_G(S)$  を  $S$  の ( $N_G(P)$  中の) inertial 部分群とする。定義から  $W \mid S^G$  であるが、 $S^G$  における  $W$  の直和因子としての重複度が  $p$  と素な  $\text{vt}_x(SW)$  は  $I_G(S)$  の  $p$ -Sylow 部分群である。

証明には、次の補題が必要である。

**補題** ([4, Prop. 7.9] の特別な場合より) ただちに得られる)

$k$  は十分大とする。定理 3.1 の設定 (\*) のもとで次が成り立つ。

$$\dim_k eE/eJE = V^G \text{ における } W \text{ の直和因子としての重複度.}$$

(系 3.2 の証明)

定理 1.4 より  $P \triangleleft G$ ,  $I_G(S) = G$  としてよい。このとき  $V = S$  として定理 3.1 と同じ状況になる。又補題 2.3 iii) より  $eE/eJE$  は  $G/P$  の twisted group algebra 上の module となる。(定理 3.1 の後の注 ii) 参照) 従って vertex と dimension の  $p$ -part の関係についてよく知られた事実 (の twisted group algebra version) より  $eE/eJE$  の vertex は  $G/P$  の  $p$ -Sylow 部分群である。  
(ここで上の補題より  $p \nmid \dim_k eE/eJE$  となることを用いている)

従って定理 3.1 より系の結論を得る。

$k$  が十分大で  $G$  自身が  $p$ -群のとき、系 3.2 の仮定は常に満たされている。(実際  $W = S^G$  となる。) 従って、このとき  $SW$  の vertex は  $I_G(S)$  に一致する。これは [4, Th. 8.2] に他ならない。

**系 3.3**  $k$  は十分大とする。 indec,  $kG$ -module  $W$  に対して

$$J\text{End}_{kG}(W) = \sum_{H \leq_{kG} v_x(W)} t_H^G(\text{End}_{kH}(W))$$

と仮定する。このとき  $v_x(W) = v_x(SW)$  である。

(証明) 定理 1.4 より  $v_x(W) \triangleleft G$ ,  $W$  の source は  $G$ -inv. としてよい。このとき Knörr [5] の結果により、仮定から  $eE/eJE$  (記号は定理 3.1 と同じ) は proj.  $E$ -module である。従って  $v_x(eE/eJE) = v_x(W)/v_x(W)$  となり、定理 3.1 より結論が得られる。

上の証明で「 $eE/eJE$  が proj.  $\Rightarrow v_x(W) = v_x(SW)$ 」の部分は以前別証を与えていた。[8, §2] ここでは、定理 3.1 を考えることにより、この結果の意味が一層はっきりする。

simple  $\mathbb{K}G$ -module は常に系 3.3 の仮定を満たすので、  
 $W$  が simple  $\mathbb{K}G$ -module のとき、 $\text{vtx}(W) = \text{vtx}(SW)$  が常に成り  
 立つ。

## References

- [1] Cline E.: Stable Clifford Theory. J. of Algebra 22 (1972),  
 350-364.
- [2] Conlon S.B.: Twisted Group Algebras and Their Representations,  
 J. Austral. Math. Soc. 4 (1964), 152-173.
- [3] Dade E.C.: Compounding Clifford's Theory. Ann. of Math. (2) 91  
 (1970), 236-290.
- [4] Green J.A.: Functors on Categories of Finite Group Repre-  
 sentations. J. of Pure and Applied Alg. 37 (1985) 265-298.
- [5] Knörr R.: On the Vertices of Irreducible Modules. Ann. of  
 Math (2) 110 (1979), 487-499.
- [6] 宇野 : 有限群の表現論における Auslander-Reiten 理論  
 数理研講究録 580 「群論」 59-69
- [7] Uno K.: Generalized Clifford Theory. Ph.D. dissertation.  
 University of Illinois at Urbana-Champaign, 1985.

- [8] Uno K.: On the Sequences Induced from Auslander-Reiten sequences. to appear in Osaka. J. Math.
- [9] Uno K.: Relative Projectivity and Extendibility of Auslander-Reiten sequences. preprint.
- [10] 吉田 : トポスにおける transfer 理論, 数序 32 卷 3 号, 1980.
- [11] Benson D.: Modular Representation Theory : New Trend and Methods. Springer Lecture Note 1081, Springer Verlag 1984.