

コンパクト位相群上の変換の分解

城面大 理 青 木 統 夫

1. 序

Abramov は *quasi-discrete spectrum* をもつ保測変換の概念を導入し, これらの変換に対して一つの理論を作った. [2]

Hahn, Parry [12] の中で, 彼等はコンパクト空間上の位相同型に対して類似の理論を展開している。T はコンパクト・連結・距離・可換群上のエルゴード的アフィン変換とし, 更に $\eta(T)$ は factor $T_{\eta(T)}$ が *quasi-discrete spectrum* をもつような最大の分解とする。Parry [15], Walters [21] は $T_{\pi(T)}$ が 0-エントロピーを持つような最大の分割 $\pi(T)$ と $\eta(T)$ が一致すること証明した。本論では, コンパクト・可換群上の *totally* エルゴード的アフィン変換は *quasi-discrete spectrum* をもつ factor と完全正のエントロピーを持つ factor との *skew product* と *isomorphic* であることを証明する。このような T が 0-エントロピーと完全正のエントロピーの factor に分解できるかどうか, 分らない。(講演の中に誤りがあったので訂正します。)

2. 準備

G はコンパクト・アーベル群, そして m は G 上の完備化された Haar 測度とする。確率空間 $(G, \mathcal{E}, m)$ を考える。ここで $\mathcal{E}$ は G の開集合全体から成生された $\mathcal{A}$ -代数の完備化である。 G 上のアフィン変換とは次のようなものである。

$$T(x) = a + A(x), \quad x \in G$$

ここで, A は G から G 上への endomorphism で, $a \in G$ とする。 T は m -保測変換である。 H は G の部分群とする。

$S(H)$ は H の coset の全体としたとき, $S(H)$ は可測分割である。(ここの可測性は Rohlin の意味ではないことに注意する。) $H_1 \subset H_2$ ならば, $S(H_1) \supset S(H_2)$, $S(G)$ は G の自明な分割, $S(D)$ は G の各点分割である。 $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ であるとき, $S(\bigcup H_n) = \bigcap S(H_n)$ 。ここで $\bigcup H_n$ は H_n を含む最小の位相群を表す。コンパクト Hausdorff 空間 W 上の homeomorphism $B(W \rightarrow W)$ が次の条件を満たすとき, B は distal であるという。任意の整数列 $\{n_j\}$, $x, y, z \in W$ に対して,

$$\lim B^{n_j}(x) = \lim B^{n_j}(y) = z$$

ならば, $x = y$ 。distal homeomorphism の連続な image である homeomorphism は又 distal である。 W 上に B -不変な確率測度 (Borel) が唯一存在するとき, B は uniquely

エルゴード的であるという。本論をとおして, Γ は G の character group を表わし, endomorphisms とその双対は同じ記号で表わすことにする。 $Z(\lambda)$ は整数を係数にもつ多項式環を表わす。 T が totally エルゴード的, quasi-discrete spectrum をもつならば, T は distal である [12]。

$$\Gamma_n = \{f \in \Gamma : (A-I)^n f = 0\}, \quad n=1, 2, \dots$$

は Γ の部分群である。 $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ならば, T は quasi-discrete spectrum をもつ。逆も成立する。 W は距離づけ可能, B は distal として P -不変 (確率 (Borel) 測度) であれば, $h_p(T) = 0$ [15]。 T が G 上の invertible アフィン変換, G は dense orbit $\{T^n x\}$ をもつならば, T は m -エルゴード的である [7]。 T は m -totally エルゴード的アフィン変換, 有限 A -orbit をもつ $f \in \Gamma$ はつねに $A(f) = f$ である [13]。 T が m -totally エルゴード的である必要十分条件は次を満たすことである。 α と $(A-I)G$ を含む最小な位相群は G と一致し, $f \in \Gamma$ に対して, $A^k(f) = f$ ならば, $A(f) = f$ である [13]。 endomorphism A が m -エルゴード的ならば, A は完全正のトロピックをもつ, として $(A-I)G = G$ である。故に, $(A-I)(b) = -\alpha$ を満たす $b \in G$ が存在して,

$$T(b + x) = b + A(x), \quad x \in G$$

であるから, T は完全正のトロピックをもつ。 $\lambda = \arg(S(n))$

は group partition $S(H)$ により、生成された K -代数とする。

$$\rho(T, P) = \bigwedge_{j=0}^{\infty} T^{-j} \bigvee_{\alpha} \{ \alpha : h_p(T, \alpha) = 0 \}$$

を定義する。 G が距離づけ可能ならば、 (G, ε, P) はルベツグ空間である。このとき、 $\rho(T, P)$ は $T_{\rho(T, P)}$ が 0-エントロピーをもつ maximum K -代数である [16]。 $T_{\rho(T, P)}$ は完全正のエントロピーをもつ K -代数 $\theta(T, P)$ が存在するとき、 $\rho(T, P)$ と $\theta(T, P)$ は P -independent である [16]。

$$\alpha(T) = \bigwedge_{n=0}^{\infty} T^{-n}(S(0))$$

は $T^{-1}(\alpha(T)) = \alpha(T)$ なる最も細かい分割であって、

$$\alpha(T) = \alpha(A) = \bigwedge_{n=0}^{\infty} A^{-n}(S(0)) = S(\bigvee_{n=0}^{\infty} \text{kernel } A^n)$$

を満たす。これより、 $\alpha(T)$ は group partition である。このことから、

$$\rho(T, m) \subset \alpha\text{-alg}(S(F))$$

である。ここで $S(F)$ は $\alpha(T) = S(F)$ を満たす G の部分群 F から成る group partition である。 E は Γ の部分集合、 A は G 上の automorphism とする。 E を含む A -不変な最小な部分群を $gp\{A, E\}$ で表わす。 E が可算集合ならば、 $gp\{A, E\}$ は可算集合である。 $gp\{A, E\}$ の双対空間 F はコンパクト・ T -ベル群で、距離づけ可能であって、 A -不変である。 A が G から G 上への endomorphism のとき、 $A(gp\{A, E\}) \subset gp\{A, E\}$ である。 Γ を含む最小の divisible group を Γ_d で表わす。 $f' \in \Gamma_d$

に対して, $kf' \in \Gamma$ なる整数 $k \neq 0$ が存在するから, A は Γ_d 上の automorphism A' を lifted することができる。即ち, $f' \in \Gamma_d$, $c \neq k$ は $kf' \in \Gamma$ なる整数とする。 A' は $kA'(f') = A(kf')$ によって定義したものである。このことから, アフィン変換 $T = a + A$ は Γ_d の双対空間 G_d 上のアフィン変換 $T'(x') = a' + A'(x')$ の factor になっている。

3. 最大部分の Γ -代数

G は character group Γ を持つコンパクト・アベル群, T は G 上のアフィン変換とする。

定理 1 T は m -totally エルゴード的であれば,

$$\phi(T, m) = \alpha\text{-alg}(S(\text{ann}(U_{n=1}^{\infty} T_n)))$$

である。

この定理を示すために次の補題を準備する。

補題 1 Γ は有限次元トラスの character group, そして g は Γ から Γ の中への homeomorphism とする。 Γ' は Γ の部分群, すべての $g \in \Gamma'$ に対して $g(g) = 0$ を満たすものとする。このとき Γ' は Γ の直積因子である。

証明. G は m -次元トラスとする。次を示す Γ の

base $v_1, v_2, \dots, v_n$ が存在する。

$$\Gamma' = \{v_1^{e_1}\} \times \{v_2^{e_2}\} \times \dots \times \{v_n^{e_n}\},$$

ここで, $e_1, e_2, \dots, e_n$ はある整数, $\{v_i\}$ は v_i を生成とする自由巡回群である。今 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ は G の monothetic generator とする。このとき, $T_a = T_{a_1} \times \dots \times T_{a_n}$ はエルゴード的, 故に T_{a_j} , $j=1, 2, \dots, n$, もエルゴード的である。 G は連結であるから, $T_{a_j^{e_j}}$ はエルゴード的である。ここで, $T_{a_j^{e_j}} \times \dots \times T_{a_n^{e_n}}$ もエルゴード的であることを示すことができる。 $v_j \in \Gamma'$ に対して,

$$0 = \varphi(v_j^{e_j})(x) = \varphi(v_j)(x^{e_j}), \quad x \in G.$$

$b = (a_1^{e_1}, \dots, a_n^{e_n})$ とおく。このとき $\varphi(v_j)(b) = 0$ 故に $\varphi(v_j)(x) = 0$ ($x \in G$) である。このことから, $e_j = 1$ $j=1, 2, \dots, n$, であるから,

$$\Gamma' = \{v_1\} \times \dots \times \{v_n\}.$$

故に, Γ' は Γ の直積因子である。

補題 2 G は有限次元のトーラスとする。 $T(x) = a + Ax$ は G から G 上へのアフィン変換とする。 T が m -Totally エルゴード的, quasi-discrete spectrum をもたらすば, A は次の行列によって与えられた automorphism と isomorphic である。

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & 1 \end{array} \right\|$$

証明. $\Gamma = \cup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ であることに注意する。 Γ は有限次元であるから, $\Gamma = \cup_{n=1}^R \Gamma_n$ となる整数 $k > 0$ が存在する。

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset \Gamma_k = \Gamma$$

である。補題 1 によつて,

$$\Gamma_j = \{w_1\} \times \cdots \times \{w_{h_j}\},$$

$$j = 1, 2, \dots, k; \quad h_k = n$$

をみたす Γ の base $w_1, w_2, \dots, w_n$ が存在する。群 $\{w_j\}$ は $\{\psi_j\}$ に isomorphic である。そこで, ψ_j は次の関数である。

$$\psi_j(x_j) = \exp[2\pi i(p_j x_j)],$$

$$p_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

故に,

$$\Gamma_j \sim \{\psi_1\} \times \cdots \times \{\psi_{h_j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

である。簡単のため, $\Gamma_j = \{\psi_1\} \times \cdots \times \{\psi_{h_j}\}, j = 1, 2, \dots, k,$ と仮定する。[4] の定理 2.1 によつて, A は次の三角行列によつて与えられ automorphism と同型であることが分かる。

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & * & 1 \end{array} \right\|$$

次の補題は[13]の中に述べられているものとほとんど同じである。しかし、ここでは G の連結性は仮定しない。

補題 3. T は G 上の invertible アフィン変換とする。もし T が m -totally エルゴード的ならば、

$$\rho(T, m) = \lambda - \operatorname{alg}(S(\operatorname{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))$$

である。

証明、 2 つの部分に分けて証明する。

(I) G が距離づけ可能の場合。 $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, すべて $0 \neq p \in \mathbb{Z}(\lambda)$ に対して, $p(A)f \neq 0$ のとき, $gp\{A, f\}$ は単位元以外は有限の orbit をもたない。 $gp\{A, f\}$ は $G/\operatorname{ann}(gp\{A, f\})$ の character group, T は $G/\operatorname{ann}(gp\{A, f\})$ 上のアフィン変換を induce する。その変換は完全正のエントロピーをもつ。故に, $\rho(T, p)$ と $\lambda - \operatorname{alg}(S(\operatorname{ann}(gp\{A, f\})))$ は p -independent である。これ故に,

$$\Gamma' = \{f \in \Gamma : p(A)f = 0 \text{ for some } 0 \neq p \in \mathbb{Z}(\lambda)\}$$

とおくとき,

$$\rho(T, m) \subset \lambda - \operatorname{alg}(S(\operatorname{ann}(\Gamma')))$$

である。以後, $\Gamma = \Gamma'$ と仮定することにする。 A' は Γ を含む最小の divisible group Γ_a 上の A によって induce された automorphism とする。 $T(x) = a + A(x)$ は Γ_a の character

とするとき,

$$G_d = G_{d1} \times G_{d2}$$

である。この分割に対応して, T' が次のように分割される。

$$T' = T'_1 \times T'_2。$$

T'_2 が完全正のイントロセ°をもつことを示すために, T' が m -totally エルゴード的であることを示す。(m は G_d 上の Haar 測度) Γ は有限 A -orbits として fixed elements だけをもつから, 同じことが Γ_d , A' -orbits に対しても成立する。次に, $(A'-I)f'=0$, $f'(a')=0$ を満たす character $f' \neq 0$ が存在したとすると, ある整数 $k \neq 0$ に対して,

$$0 \neq f = kf' \in \Gamma$$

であるから, $f(a')=0$, $f(Ax')=f(x')$ が成立する。 f は $\text{ann}(\Gamma)$ の cosets 上で一定な値をとる character である。そして

$$f(a)=0, \quad f(Ax)=f(x)。$$

しかし, a , $(A-I)G$ を含む最小の群は G と一致するから, $f \equiv 0$ となり矛盾する。故に, T' は totally エルゴード的である。この故に, T'_1, T'_2 も totally エルゴード的である。特に, A'_2 はエルゴード的であるから, T'_2 は完全正のイントロセ°をもつ。他方,

$$\Gamma_{d1n} = \{ f' \in \Gamma_{d1} : (A'-I)^n f' = 0 \}, n=1, 2, \dots$$

group G_d 上のアフィン変換

$$T'(x') = a' + A'(x'), \quad x' \in G_d$$

の factor である。すべての $f' \in \Gamma_d$ に対して, $P(A')f' = 0$ なる $0 \neq P \in \mathbb{Z}(\lambda)$ が存在する。 $P'(\lambda)$, $\lambda - 1$ は互に素である $P' \in \mathbb{Z}(\lambda)$, $\lambda - 1$ に対して

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^n P'(\lambda)$$

とできる。このときある整数 $k \neq 0$ に対して,

$$u(\lambda)(\lambda - 1)^n + v(\lambda)P'(\lambda) = k$$

なる $u, v \in \mathbb{Z}(\lambda)$ が存在すること知られている。故に,

$$u(A')(A' - I)^n (t'/k) + v(A')P'(A')(t'/k) = f'$$

である。

$$f'_1 = u(A')(A' - I)^n (t'/k),$$

$$f'_2 = v(A')P'(A')(t'/k)$$

とおく。このとき, $P'(A')f'_2 = 0$, $(A' - I)^n f'_1 = 0$ である。

$$\Gamma_{d1} = \{f' \in \Gamma_d : (A' - I)^n f' = 0 \text{ for some } n \geq 1\}$$

$$\Gamma_{d2} = \{f' \in \Gamma_d : P'(A')f' = 0 \text{ for some } P'(\lambda) \text{ prime to } \lambda - 1\}$$

を定義する。このとき, $A'(\Gamma_{d1}) = \Gamma_{d1}$, $A'(\Gamma_{d2}) = \Gamma_{d2}$

そして $\Gamma_d = \Gamma_{d1} \times \Gamma_{d2}$ である。

$$G_{d1} = G_d / \text{ann}(\Gamma_{d1}),$$

$$G_{d2} = G_d / \text{ann}(\Gamma_{d2})$$

と仮定するとき、

$$\Gamma_{d_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{d_1 n}$$

であるから、 Γ_1 は補題 1, [8] によつて $\mathcal{O}$ -イントロヒードである。即ち、

$$\rho' = \lambda - \operatorname{alg}(\mathcal{S}(\operatorname{ann}(\Gamma_{d_1})))$$

は Γ_p が $\mathcal{O}$ -イントロヒードをもつた最大の λ -代数である。故に、

$$\rho(\Gamma, m) \subset \rho' = \lambda - \operatorname{alg}(\mathcal{S}(\operatorname{ann}(\Gamma \cap \Gamma_{d_1})))$$

である。結果的に、

$$\Gamma \cap \Gamma_{d_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$$

を示すことができるから、

$$\rho(\Gamma, m) = \lambda - \operatorname{alg}(\mathcal{S}(\operatorname{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))$$

である。

(II) $\mathcal{G}$ が距離づけ可能でない場合。(I) と [3] から示すことができる。

補題 4 $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ とする。このとき、 Γ は distal である。

証明は [4] によつて得られる。

補題 5. T は invertible アフィン変換, m -totally エルゴード的とする。このとき, $p(T, m)$ は $h_m(T_{p(T, m)}) = 0$ となる最大の λ -代数である。

証明. 補題 3 により, $p(T, m) = \lambda\text{-alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))$ が成立する。一般性を失うことなく, $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ と仮定する。ここで, T は ρ -エントロピーをもつことを証明する。任意の $E \in \mathcal{H}$ (ここで $\mathcal{H}$ は Γ の可算個の元から成るすべての集合の族とする) に対して, $gp\{A, E\}$ は可算である。 $gp\{A, E\}$ の双対空間 G_E はコンパクト・アーベル群で, 距離づけ可能である。 T によって induce された G_E 上のアフィン変換を T_E によって表わすことにする。このとき, T_E は distal である。故に, T_E は ρ -エントロピーをもつ。 G から G_E への projection を φ_E で表わすとき,

$$\varphi_E^{-1}(p(T_E, m_E))$$

は $\mathcal{E}$ の λ -部分代数である。但し, m_E は G_E 上の Haar 測度とする。

$$\bigvee_{E \in \mathcal{H}} \varphi_E^{-1}(p(T_E, m_E)) = \mathcal{E}$$

であることは明らかである。 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{E}$ の有限代数とする。

$D \in \mathcal{D}$ に対して, $m(B_n \Delta D) < 1/n$ となる $E_n \in \mathcal{H}$,

$B_n \in \varphi_{E_n}^{-1}(p(T_{E_n}, m_{E_n}))$ が存在する。 $E = \bigcup_n E_n$ とおくと,

$E \in \mathcal{H}$ として $D \in \varphi_E^{-1}(p(T_E, m_E))$ である。故に,

$h_m(T, \alpha) = 0$ である。これを証明せよ。

$\mathcal{S}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ の可測分割, $\varphi_{\mathcal{S}}$ は Ω から $\Omega/\mathcal{S}$ 上への projection とする。もし $\mathcal{S}$ が $T^{-1}(\mathcal{S}) \leq \mathcal{S}$ を満たしているならば, T は $\Omega/\mathcal{S}$ 上の factor transformation を induce する。 $\alpha(T) = \mathcal{S}(F)$ (F は Ω のある部分群) のとき, $T_{\mathcal{S}(F)}$ は Ω/F 上の invertible アフィン変換である。 Ω から $\Omega/\mathcal{S}$ への projection を $\varphi_{\mathcal{S}}$ で表わすことにする。

補題 6. T は m -totally エルゴード的 アフィン変換とするとき,

$$\phi(T, m) = \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)))$$

である必要十分条件は

$$\varphi_{\mathcal{S}}^{-1}(\phi(T_{\mathcal{S}(F)}, m/\mathcal{S}(F))) = \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \cap F))$$

が成立することである。

証明. Ω は距離づけ可能とする。

$$\begin{aligned} & \varphi_{\mathcal{S}}^{-1}(\phi(T_{\mathcal{S}(F)}, m/\mathcal{S}(F))) \\ &= \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(F)) \cap \phi(T, m) \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} & \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \cap F)) \\ &= \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(F)) \cap \alpha - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n))) \end{aligned}$$

であるから, 補題 4, 5 から,

$$\alpha - \text{alg}(S(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n))) \subset \rho(T, m)$$

そして

$$T^{-1}(S(F)) = S(F)$$

より

$$\rho(T, m) \subset \alpha - \text{alg}(S(F))$$

である。これ故に, G が距離づけ可能な場合には示された。

次に, G が距離づけ可能でない場合を示す。

B は任意の有限代数 ($B \subset \rho(T, m)$) とする。このとき, 任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\bigcup \{ \alpha : h_m(T, \alpha) = 0 \}$$

によって生成された代数の有限代数 B' が存在して,

$$h_m(T, B) \leq h_m(T, B') + \delta$$

が成立する。 B' はある整数 n に対して

$$\bigvee_{j=1}^n \{ \alpha_j : h_m(T, \alpha_j) = 0 \}$$

に含まれる。そして B' は次のような形の atom を持つ。

$$B_u = \bigcup_{j=1}^p \bigcap_{i=1}^n B_{u_i v_j},$$

$$u = 1, 2, \dots, k.$$

故に,

$$h_m(T, B) \leq h_m(T, B') + \delta \leq \sum_{j=1}^n h_m(T, \alpha_j) + \delta$$

であるから,

$$h_m(T, \mathcal{B}) = 0$$

である。一方,

$$\mathcal{E} = \bigvee_{E \in \mathcal{U}} \wedge - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\text{gp}\{A, E\})))$$

であるから, ある $E \in \mathcal{U}$ が存在して

$$\mathcal{B} \subset \wedge - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\text{gp}\{A, E\})))$$

である。 $\text{gp}\{A, E\}$ の双対空間 G_E に対して, それ上に induce した アフイ: 変換 T_E として G_E 上の Haar 測度を m_E で表わす。このとき φ_E は G から G_E 上への projection として,

$$\mathcal{B} \subset \varphi_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E))$$

である。

$$T_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E)) = \mathcal{P}(T_E, m_E)$$

であるから,

$$\mathcal{P}(T, E) = \bigvee_{E \in \mathcal{U}} \varphi_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E))$$

である。すべての $E \in \mathcal{U}$ に対して, G_E は距離づけ可能であるから,

$$\mathcal{P}(T_E, m_E) = \wedge - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\text{gp}\{A, E\} \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n))))$$

そして

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(T, m) &= \bigvee_{E \in \mathcal{U}} \wedge - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\text{gp}\{A, E\} \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)))) \\ &= \wedge - \text{alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n))) \end{aligned}$$

である。これで証明が完了。

4. アフィン変換の分解

この節では, G はコンパクト・アーベル群 として T はアフィン変換 (必ずしも 1-1 ではない) とする。

補題 7. G はコンパクト・完全非連結・アーベル群 とする。このとき, G のアフィン変換 $T(x) = a + Ax$ が totally エルゴード的である必要十分条件は endomorphism A がエルゴード的であることである。

証明、 A がエルゴード的であれば, T は強混合的である。故に, T は totally エルゴード的である。

逆に, T が totally エルゴード的であれば, A はエルゴード的であることを示す。 G の一定値でない character $f(x)$ に対して, 整数 $n \neq 0$ が存在して

$$(*) \quad f(A^n x) = f(x), \quad x \in G$$

とできる。今 $(*)$ を満たす character $f(x)$ が存在しないと仮定しよう。 G は完全非連結で, コンパクトであるから,

$$kf(x) = 0, \quad x \in G$$

を満たすような整数 $k > 0$ が存在する。

$$T^{nk}(x) = a + A(a) + \cdots + A^{n^{k-1}}(a) + A^{nk}(x)$$

であるから, 次の等式が成立する。

$$f(T^{nk}x) = f(A^{nk}x) + \sum_{j=0}^{n^{k-1}} f(A^j a)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(A^{jn}(A^p(a))) \\
&= f(x) + \sum_{p=0}^{n-1} kf(A^p(a)) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

故に, $f(x)$ は T^{nR} -不変である。これは totally エルゴード的であることに矛盾する。

補題 8. G は n -次元トーラス, T は G 上のアフィン変換とする。もし T は m -totally エルゴード的であれば, $G = G_1 \times G_2$ をみたすコンパクト群が存在して, T は次のような skew product transformation と isomorphic である。

$$T(x, y) \sim (B_1(x) + r_1, B_2(y) + q(x) + r_2)$$

$$(x, y) \in G_1 \times G_2.$$

ここで B_1 は G_1 から G_1 への automorphism, B_2 は G_2 から G_2 への endomorphism として q は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

証明. ある整数 k に対して, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ であることに注意する。補題 1 の如く, ある部分群 Υ に対して

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j \times \Upsilon$$

である。 G の適当な ordered base をとるとき, 次の成立する。

$$\Gamma_j = \{w_1\} \times \cdots \times \{w_{d_j}\}, \quad j=1, 2, \dots, k,$$

$$Y = \{w_{d_k+1}\} \times \cdots \times \{w_n\}.$$

故に, 補題2によ, て A は次の行列によ, て与えられた automorphism に isomorphic である。

$$\left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline D_3 & D_2 \end{array} \right\|$$

こゝで, D_1 は $d_k \times d_k$ の三角行列, 即ち

$$D_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & * & \ddots \\ & & & 1 \end{array} \right\|,$$

ブロック D_2, D_3 の中は整数である。 G_1 は $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ の双対空間, G は Y の双対空間とする。 B_1 は行列 D_1 に対応する G_1 から G_1 上への automorphism, B_2 は行列 D_2 に対応する G_2 から G_2 上への endomorphism として φ は行列 D_3 に対応する G_1 から G_2 の中への homomorphism とするとき, A は次に isomorphic である。

$$(B_1(x), B_2(y) + \varphi(x)) \quad ((x, y) \in G_1 \times G_2).$$

結果的に, ある $a' = (a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ に対して, T は

$$(B_1(x) + a_1, B_2(y) + \varphi(x) + a_2)$$

に isomorphic である。

これで補題は示された。

定理 2. T はコンパクト・アーベル群上のアフィン変換とする。もし T が m -totallyエルゴード的, $h_m(T) > 0$ ならば, コンパクト群 G_1, G_2 が存在して, T は次の skew product 変換

$$T(z) \sim (B_1(x) + b_1, B_2(y) + q(x) + b_2), \\ (x, y) \in G_1 \times G_2$$

に isomorphic である。ここで, B_1 は quasi-discrete spectrum をもつ automorphism, B_2 は完全正のエントロピーをもつ endomorphism として q は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

証明. 補題 7 によって, G は完全非連結であると仮定することができる。

証明を 3 つの部分に分けて行う。

(I) Γ が endomorphism A に関して finitely generated であると仮定する。即ち, $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Gamma$ が存在して, Γ のすべての元は次の型である,

$$P_1(A)f_1 + P_2(A)f_2 + \dots + P_m(A)f_m, \quad P_i \in \mathbb{Z}(\lambda).$$

$$\Gamma_n = \{ P_1(A)f_1 + \dots + P_m(A)f_m : P_i \in \mathbb{Z}(\lambda) \text{ and degree of}$$

$$(P_i) \leq n, \quad i=1, 2, \dots, m \}$$

とおく。 Γ_n は Γ の部分群であって, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$ である。

よって, $A^{-1}(f_i) \in \Gamma_n, \quad i=1, 2, \dots, m$ なる n が存在する。

とができる。

$$A^{-1}(Y_n) \subset Y_n$$

そしてもし $H = \text{ann}(Y_n)$ とおくと,

$$A^{-1}(H) \subset H$$

である。 $A^j(Y_n)$, $j \geq 0$, は finitely generated である。故に

$A^j(Y_n)$, $j \geq 0$, は次のように分割される。 $\Gamma_{ul(j)}$ は自由巡回群の直積, $\Gamma_{vl(j)}$ は有限 order の巡回群の直積としたとき,

$$A^j(Y_n) = \Gamma_{ul(j)} \times \Gamma_{vl(j)}$$

である。 $\Gamma_{vl(j)} = \{0\}$ であることを示す。 $A(\Gamma_{vl(j)}) = \Gamma_{vl(j)}$

そして $T(x) = a + A(x)$, $x \in G$, は totally エルゴード的であるから, すべて $f \in \Gamma_{vl(j)}$ に対して,

$$A^n(f) = f$$

を満たす n が存在する。 $kf(x) = 0$ かつ k が存在することは $\Gamma_{vl(j)}$ の性質から明らかである。故に,

$$\begin{aligned} f(T^{n^k}x) &= f(A^{n^k}x) + \sum_{j=0}^{n^k-1} f(A^j a) \\ &= f(x) + \sum_{p=0}^{n-1} k f(A^p a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。 T の totally エルゴード性により f は一定値である。

これは $\Gamma_{vl(j)} = \{0\}$ を示している。故に

$$A^j(Y_n) = \Gamma_{ul(j)}$$

である。補題1によって,

$$A^j(Y_n) = Y_{(j)} \times \Gamma_{(j)}$$

である。

$$Y_n \subset A(Y_n) \subset \dots, \bigcup_{j=1}^{\infty} A^j(Y_n) = \Gamma$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bigcup_{j=0}^{\infty} A^j(Y_n) \\ &= \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma_{(j)} \right) \times \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} Y_{(j)} \right) \end{aligned}$$

である。 G'_1, G'_2 はそれぞれ $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{(j)}, \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_{(j)}$ は character group とすれば,

$$G = G'_1 \times G'_2$$

である。

$$G'^{(j)}_1 = G'_1 / A^{-j}(Y_n),$$

$$G'^{(j)}_2 = G'_2 / \text{ann}(\Gamma_{(j)})$$

そして

$$G'^{(j)}_2 = G'_2 / \text{ann}(Y_{(j)})$$

である。族 $\{G'^{(j)}_1\}, \{G'^{(j)}_2\}$ として $\{G'^{(j)}_1\}$ は inverse limit systems である。故に, G_{∞} は $\{G'^{(j)}_1\}$ の inverse limit である。また, G は G_{∞} に isomorphic である。 $G_{1\infty}, G_{2\infty}$ はそれぞれ $\{G'^{(j)}_1\}, \{G'^{(j)}_2\}$ の inverse limits である。 G'_1, G'_2 はそれぞれ $G_{1\infty}, G_{2\infty}$ に isomorphic である。そこで, $G = G_{\infty}$, $G'_1 = G_{1\infty}$ として $G'_2 = G_{2\infty}$ と仮定する。 $G'^{(j)}$, $j \geq 1$, は有限次元 Γ - Γ - Γ であることに注意する。 A_j は A の j -induced

で得た $G^{(j)}$ から $G^{(j)}$ 上への endomorphism とする。inverse limits G_1, G_2 にも対応するコホモト群 $\{G_1^{(j)}\}, \{G_2^{(j)}\}$ が存在して、補題 8 によつて endomorphism A_j は次の変換に isomorphic である。

$$(B_1^{(j)}(y), B_2^{(j)}(y') + \varphi^{(j)}(y)), \quad (y, y') \in G_1^{(j)} \times G_2^{(j)}.$$

こゝで、 $B_1^{(j)}$ は $G_1^{(j)}$ から $G_1^{(j)}$ 上への automorphism, $B_2^{(j)}$ は $G_2^{(j)}$ から $G_2^{(j)}$ 上への endomorphism として $\varphi^{(j)}$ は $G_1^{(j)}$ から $G_2^{(j)}$ の中への homomorphism である。 $B_1: G_1 \rightarrow G_1$ は

$$B_1(y) = (B_1^{(1)}(y_1), B_1^{(2)}(y_2), \dots)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots) \in G_1$$

によつて定義する。 B_2 は G_2 から G_2 上への endomorphism で次のように定義する。

$$B_2(y') = (B_2^{(1)}(y'_1), B_2^{(2)}(y'_2), \dots)$$

$$y' = (y'_1, y'_2, \dots) \in G_2.$$

更に、

$$\varphi(y) = (\varphi^{(1)}(y_1), \varphi^{(2)}(y_2), \dots)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots) \in G_1$$

と置く。 φ は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

$$A'(y, y') = (B_1(y), B_2(y') + \varphi(y))$$

$$(y, y') \in G_1 \times G_2$$

と置く。 A は A' と isomorphic であることは容易に示される。

ある $b = (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ が存在して, T は

$$T(z) \sim (B_1(y) + b_1, B_2(y') + q(y) + b_2),$$

$$(y, y') \in G_1 \times G_2$$

に isomorphic である。 B_1 は quasi-discrete spectrum をもつ, B_2 は 完全連続 (totally continuous) である。

(II) G はコンパクト・アベル群, 距離づけ可能とする。

Γ は可算, $\Gamma = \{f_1, f_2, \dots\}$ である。 $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Gamma$,

$$gp\{A, f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

は endomorphism A に関して finitely generated である。 したがって次の包含関係がある

$$A(gp\{A, f_1, \dots, f_n\}) \subset gp\{A, f_1, \dots, f_n\}.$$

これより

$$H_n = \text{ann}(gp\{A, f_1, \dots, f_n\})$$

とすると, $A(H_n) \subset H_n$, $A^{-1}S(H_n) \subseteq S(H_n)$ である。

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$$

そして

$$(*) \quad H_1 \supset H_2 \supset \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \{0\}$$

である。 T は G/H_n のアッペル変換 $T_n \in \text{induce}$ する。(II)

によつて, 部分群 G_{1n}, G_{2n} が存在して G_{1n} の character group Γ_{1n}

$$\Gamma_{1n} = \{f \in \Gamma_{1n} : (A-I)^m f = 0 \text{ for some } m \geq 1\},$$

G_{n2} の character group Υ_{n2}

$$\Gamma = \Upsilon_{n1} \times \Upsilon_{n2},$$

をとり。そして Γ_n は

$$(B_1(y) + b_1, B_2(y') + q(y) + b_2), (y, y') \in G_{n1} \times G_{n2}$$

に isomorphic である。(*) と (I) の議論から, $\mathcal{G}$ は パワト群 G_1 ,

G_2 が存在し, それらの character groups はそれぞれ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$,

Υ ($\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \times \Upsilon$) である。そして Γ は

$$(B_1(y) + b_1, B_2(y') + q(y) + b_2), (y, y') \in G_1 \times G_2$$

に isomorphic である。ここで, B_1 は G_1 から G_1 上への auto-

morphism, B_2 は G_2 から G_2 上への endomorphism として q

は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

以上で定理は証明された。

注意 1. G は n -次元トーラス ($n=1, 2, \dots, \infty$) とする。

T は次のようなアフィン変換とする。

$$T(x) = a + A(x), x \in G.$$

$a \in G$, A は次の行列によって与えられる automorphism である。

$$\left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\| \quad D_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ * & & & 1 \end{array} \right\|$$

D_2 の固有値は 1 の根ではない。 D_1 に対応する automorphism は aperiodic である。故に、このような automorphism は C -エントロピーをもつ。アフィン変換 T は直積

$$T = T_1 \times T_2$$

に等しい。ここで T_1 は C -エントロピーをもち、 T_2 は完全正のエントロピーをもつ。

注意 2. G は character group $Y \times Z$ をもつコンパクトアーベル群とする。 Y は有限 order をもつ巡回群の有限直積、 Z は自由巡回群の有限直積とする。 $T(x) = \alpha + A(x)$, $x \in G$ とする。 $A(Y) = Y$ から、

$$A(z, y) = (\psi(z), \alpha(y) + \varphi(z)), (z, y) \in Z \times Y$$

である。ここで φ は Z から Y の中へのある homomorphism, ψ は Z から Z の中への endomorphism, α は Y から Y の上への automorphism である。このような群と T に対して、位相的エントロピーと metric エントロピーは一致する。このことを示すことは簡単である。

G_1, G_2 はそれぞれ Y, Z の双対空間とする。 G_1 は Y に isomorphic である。 G_2 は有限次元トーラスである。そして $G = G_1 \times G_2$ である。 $A(G_2) = G_2$ 。 T' において T の G_2 への制限を表わす。 α^P は直径 $1/p$ の開集合の族とする。 α^P は

isometry に関して不変である。 $G_1 \times G_2$ の部分被覆 $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ に対して refinement $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}^P$ が存在することが知られている。

G_1 は有限群であるから,

$$A^N(x) = x, \quad \forall x \in G_1$$

をみたす整数 $N > 0$ が存在する。特に,

$$\mathcal{O}_1 = \{ \{x_1\} : x_1 \in G_1 \}$$

とする。このとき,

$$T^N(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}^P) = T_{a_1}(\mathcal{O}_1) \times T'^N(\mathcal{O}^P),$$

T_{a_1} は G_1 上のある translation ($T_{a_1}x_i = x_i + a_1$) とする。このことは

$$h_{\text{top}}(T^N, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}^P) = h_{\text{top}}(T_{a_1} \times T'^N, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}^P)$$

より故に

$$h_{\text{top}}(T^N) = h_{\text{top}}(T_{a_1}) + h_{\text{top}}(T'^N)$$

である。 $h_{\text{top}}(T_{a_1}) = 0$ であることは明らかである。そこで

$$h_{\text{top}}(T'^N) = h(T'^N) = h(T^N)$$

を示すことが出来る。故に, $h_{\text{top}}(T^N) = h(T^N)$, ところで

$h_{\text{top}}(T) = h(T)$ が示される。

注意 3. T はコンパクト・アーベル群からそれへのアフィン変換とすると, 注意 2, [5], [6] そして [8] により,
 $h_{\text{top}}(T) = h_m(T)$ (m は G 上の Haar 測度) が容易に示される。

参 考 文 献

1. R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. MacAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) 309 - 319.
2. L. M. Abramov, Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum, Amer. Math. Soc. Transl. 39 (1964), 37 - 56.
3. N. Aoki, On two invariant λ -algebras for an affine transformation, Mich. Math. J. 17 (1970), 397 - 399.
4. ———, On generalized commuting order of automorphisms with quasi-discrete spectrum, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 79 - 97.
5. ———, Topological entropy and measure theoretic entropy for automorphisms on compact groups, Math. Systems Theory, 5 (1971), 4 - 6.
6. ———, Topological entropy of distal affine transformations on compact abelian groups, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 11 - 17.
7. ———, On skew product transformations with quasi-discrete spectrum, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971),

555 - 560.

8. K.R. Berg, Entropy of torus automorphisms of topological dynamics, An International Symposium, Benjamin, New York, (1969), 67 - 79.
9. ———, Convolution of invariant measures, maximal entropy, Math. Systems Theory 3 (1969), 146 - 150.
10. P. Billingsley, Ergodic theory and information, John Wiley and Sons, New York, 1965.
11. C. Fofias, Automorphisms of compact abelian groups as models for measure-preserving invertible transformations, Mich. Math. J. 13 (1966), 349 - 352.
12. F. Hahn and W. Parry, Minimal dynamical systems with quasi-discrete spectrum, J. London Math. Soc. 40 (1965), 309 - 323.
13. D.S. Ornstein, A K -automorphism with no square root and Pinsker's conjecture, (to appear).
14. ———, A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails, (to appear).
15. W. Parry, On the coincidence of three invariant α -algebras associated with an affine transformation, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1297 - 1302.

16. W. Parry, Entropy and generators in ergodic theory, Benjamin, New York, 1969.
17. ———, Zero entropy of distal and related transformations, An International Symposium, Benjamin, New York (1969), 383 - 389.
18. M. S. Pinsker, Dynamical systems with zero or completely positive entropy, Dok. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 1025 - 1026.
19. L. S. Pontrjagin, Topological groups, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1958.
20. H. Totoki, Ergodic theory, Lecture notes No. 14 Aarhus Univ. 1969.
21. P. Walters, On the relationship between zero entropy and quasi-discrete spectrum for affine transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 661 - 667.