

赤外発散の除去について

京大・数理解

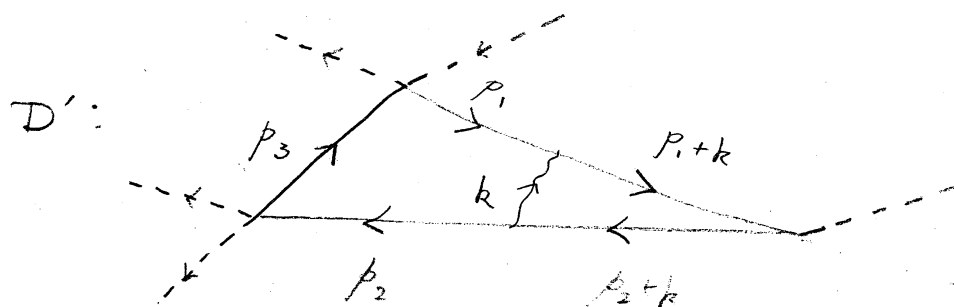
河合隆裕

赤外発散の問題は、 ϕ の ϕ 遷移確率に於いては消失する為か、余り真剣な研究が為されてきていないように思われる。例えば、行列要素に於いて有限な量を取り出すことを試みている [1] がこの方面の代表的な論文とされているが、これは、研究の方向を指し示した重要な物ではあるけれど、(数学者は勿論のこと) 良心的な物理学者を満足させ得るものとは、とても思えない。特に、[1] の議論自身が甘い、と云うだけで無く、それから帰結されて来る結果が、特異点の付近に於いては甚だ奇妙な物であること (例えば [2]) は深刻であろう。

ただ、数学者にとって興味深いことには、QCD に於いてやはり類似の問題を扱う必要を一部の物理学者は感じ始めている由で (Stapp, 小島 西氏による) 今後、赤外発散の理論的な研究も多く為されるのでは無いか、と期待される。特に、この方向で最近 Stapp [3] が提唱している recipe は、[1] と全く異なる、併作、物理的に合理的と思われる“有限量”の取出し方を与えているように思われる。尤も、その recipe で与えられる函数が有限な

物がどうかは *a priori* には明らかで無い。そこで
 現在そこに現われる函数の性質を Stapp と私で調べて
 いる所であるか ([4]), *microlocal analysis* の観点か
 ら極めて望ましいものであるように思われる。詳しくは
 [4] を参照して頂くとして、ここでは、どのような函
 数を考え、又、その主要項の構造がどのような物
 であるかを示すに止め度い。

話をはっきりさせる為に、次のような ファインマングラフ
 D' を考えよう：



(但し $\text{---}k\text{---}$ は massless line)

これに対応する ファインマン積分は 次の ファインマングラ
 フ D に対応する ランダウ-中面多様体 $L(D)$ に沿って特異
 性を示す：



[4]の主目標は、然るべく修正された ファインマン 積分 F_{00} の $L(D)$ に於ける不連続性が どのような物であることを示す事である。

先ず F_{00} の定義がどのようにして与えられるかを述べる。それは massless line の一端に現われる propagator

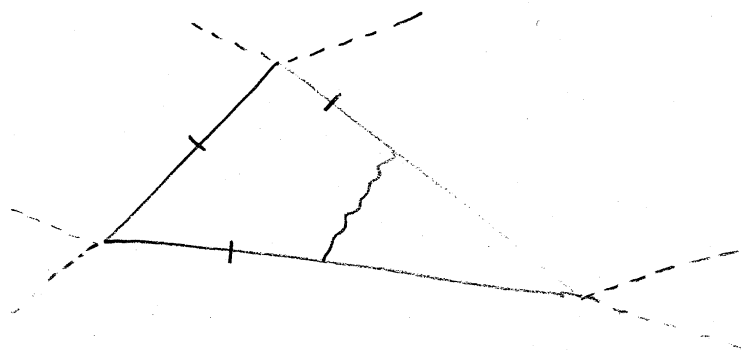
$$\frac{\not{p}_1 + m_1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \quad \frac{\not{p}_1 + \not{k} + m_1}{(p_1 + k)^2 - m_1^2 + i0}$$

(但し γ_μ をガンマ行列として $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\mu p_\nu$) を,

$$F_{1 \text{ def}} = \int d\lambda \left([\delta(\lambda) \not{\sigma}_\mu + \theta(\lambda) k^\sigma \frac{\partial}{\partial p^\mu}] (g^{\mu\nu} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\not{p} + m_1) \gamma_\sigma (\not{p} + \not{k} + m_1)}{(p^2 - m_1^2 + i0) ((p+k)^2 - m_1^2 + i0)} \right) \Big|_{p=p_1+\lambda k}$$

に置き換え、他端に関係する propagator も同様の 関数で置き換えることによって与えられる。(この他に もう一つ、 F_{00} , 或いは F_{0Q} なる関数も考える必要があるが ここでは触れないこととする。) この時, ($k \neq 0$ として)

Cutkosky rule を Ansatz として用いて F_{00} の discontinuity を計算すると、特異性の最も強い項は



なるグラフに対応するものであり、具体的には



なる部分に対応する因子として

$$-2\pi i \delta^-(p_1^2 - m_1^2) \left[\frac{(p_1 + m_1) \gamma_\mu (p_1 + k + m_1)}{2p_1 k + k^2 + i0} - \frac{p_1 \gamma_\mu (p_1 + m_1)}{p_1 k + i0} \right] g^{\mu\nu}$$

をとりて discontinuity integral を計算することとなる。

ガンマ行列の性質を用いて容易に計算できるように。

上の因子は

$$-2\pi i \delta^-(p_1^2 - m_1^2) \left(\frac{p_1 + m_1}{2p_1 k + k^2 + i0} \right) \left(\gamma_\mu k - \frac{p_1 \gamma_\mu k^2}{p_1 k + i0} \right) g^{\mu\nu}$$

となる。この因子は、[3]に於いて、 $p_1^2 = m_1^2$, $k^2 = 0$

と仮定して、coordinate space での漸近挙動を調

べることにより見出だされた因子

$$\frac{(p_1 + m_1) \delta_{p_1 k}}{2p_1 k + i0} g_{k0}$$

をより精密な形で再現させている。ここで、 $p_1^2 = m_1^2$ 且つ $k^2 = 0$ と言う所が、通常のファインマン積分に於いては、赤外発散を惹き起こす原因の所であるにも拘らず、ここで見出された因子は、(massless line に対応する propagator $1/(k^2 + i0)$ を考慮しても) 4次元積分 d^4k を行った時収束する物であることを注意され度い。

尚、今の場合、propagator に該する F_1 が既に好数項を含む為、量的にはずっと弱いけれども、discontinuity へのその符号の計算はかなり面倒な項が、上の主要項以外にいくつか出て来る。それ等の取扱いについては [4] を参照され度い。

文 献

- [1] Yennie, D.R., S.C. Frautschi and H. Suura: *Annals of Physics*, 13 (1961) 379.
- [2] Storrow, J.K.: *Nuovo Cimento*, 54 (1968) 15.
- [3] Stapp, H.P.: Exact solutions of the infra-red problem, LBL Report, LBL-13651 (1982)
- [4] Kawai, T. and H.P. Stapp: Infra-red finiteness of QED, in preparation.