

完全可積分系の distribution 解の 可解性について. 北大理 杉本 尚文

1. 本稿では, 不確定特異点型の holonomic system の超関数解の構造について, 得られた結果を紹介する. まず, 常微分方程式 $P(\partial)u=0$ についての結果を思い出すと, P は hyperfunction の Category に全射である. この証明は, 非常に簡単であることに, hyperfunction で考える事の透明性を示している.

しかし, 「 P は distribution に全射か」という問題は, かなり難しい問題である. これは, Malgrange により正しい事が証明されているが, その証明は, C^∞ class の漸近解の存在を用いた, かなりの step を必要とするものである. 著者は, この問題を, ~~正則~~境界値を与える正則解を構成する事で, 「ultra-distribution」の場合も正しい事を示した.

さて, この問題を多変数の場合に考察するために, まず hyperfunction の時, どのような結果があるか. list up すると:

定理1 (Schapira)

$M \hookrightarrow X$: 実解析多様体とその複素化.

m : 連続 D_X 加群

$$\text{この時 } \operatorname{Ext}_{D_X}^{\dim X} (m, B_M) = 0 \quad \square$$

ただし B_M は hyperfunction の $\mathbb{R}$.

定理2 (Honda - Schapira の系)

$N_i \subset M$: N_i は closed analytic subsets of M

m は holonomic system $\mathbb{C}$. $\pi(\operatorname{char}(m)) \subset \bigcup N_i^{\mathbb{C}}$ とする.

$$\text{この時 } \operatorname{Ext}_{D_X}^i (m, B_M) = 0 \quad (i \geq 1) \quad \square$$

ここで $\pi: T^*X \setminus T_x^*X \rightarrow X$, $N_i^{\mathbb{C}}$ は N_i の複素化.

もちろん $\dim X = 1$ の時は、定理 1.2 共に、Hyperfunction の全射性という事実と同値になる.

従って、定理 1.2 の B_M を distribution の $\mathbb{R}$ $D_{\mathbb{R}, M}$ に置き換えた時、類似の結果が成立する事が期待される.

しかし、ここで注意したくは、いかなる事は、定理 1.2 は、 B_M の超越性により、 m が確定特異点型の場合のみを考へれば良いという点である.

$\mathcal{D}_{\mathbb{A}, M}$ の時は、この様な事は全く言えない上に、解の構造が Stokes line の影響で、複雑になっている。

2. $\mathcal{D}_{\mathbb{A}, M}$ の場合を考える為に、次の最も基本的な完全積分可能系を考える事とする。

以下、 $\mathbb{C}^n = (z_1, \dots, z_n)$ とし、原点の近傍で考える。

$$m : (z_i^{d_i} D_{z_i} - A_i(z)) \vec{u} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ただし、 $d_i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathfrak{gl}(\ell; \mathcal{O}_0)$ とし、完全可積分条件を満たすものとする。

この時得られる結果は。

定理 3

m は上に与えた完全可積分系として

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X}^{\dim X} (m, \mathcal{D}_{\mathbb{A}, M}) = 0 \quad \square$$

更に、 A_i に条件を加えると。

定理 4

各 $A_i(0)$ の固有値が、すべて異なっているならば

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X}^i (m, \mathcal{D}_{\mathbb{A}, M}) = 0 \quad (i \geq 1) \quad \square$$

が言える。

証明は + 分り易い角領域での解の構成を行い、
 更に、適当な代表元を選びなおす事で、構成した
 角領域上の解を境界値が distribution を与える
 様、増大度を保ちながら広げると言う 2つの Step
 よりなる。詳細は準備中の論文をみていただきたい。

[1] Honda-Schapira : On the vanishing theorem of
 Holonomic modules with positive characteristic varieties
 R.I.M.S. (1991).

[2] Honda : On the solvability of ordinary differential
 equations in the space of distributions.
 J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 39. (1992).