

Deformed Sierpinski Gaskets について

関 口 健 東北学院大学 教養学部

§ 0. 序

本稿では, Okada - Sekiguchi - Shiota [8] から Deformed Sierpinski Gasket に関する部分を中心に報告する。我々の目的は infinite graph network N 上の heat kernel $p_t(x, y)$ の decay order α , 即ち

$$p_t(0, 0) = O(t^{-\alpha}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

を求めることである。ここで $0 \in N$, 2α はいわゆる spectral dimension である。 N が周期性をもっているときは, Garau - Okada - Okada [3] の方法で, 多くの場合に Green 関数を直接計算できるので, それから α が求められる。以下では N が非周期的な場合, 例として Deformed Sierpinski Gasket, の decay order α の計算方法について試みを述べる。

§ 1. decay order の考察

一般の infinite graph network N について, 次の結果がある。

Th. (Carlen - Kusaka - Strook [2])

$$\sup_{x, y \in N} p_t(x, y) = O(t^{-\beta}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$= z, \quad (*) \quad \beta = \inf_{\substack{u \in L^2(N) \\ \Sigma(u, u) < \infty}} \frac{\log \left(\frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \right)^2}{\log \frac{\|u\|_2^2}{\Sigma(u, u)}}$$

$$\Sigma(u, u) = \int_N |\nabla u|^2 dx$$

一般に β は decay order α より小さいが, (*) で u の制限をくわえれば, decay order α 以下の β は α と予想される。実際次の補題を示す。

Lem. $u_t = p_t(x, 0)$ とおくと,

$$\frac{\log \left(\frac{\|u_t\|_1}{\|u_t\|_2} \right)^2}{\log \frac{\|u_t\|_2^2}{\Sigma(u_t, u_t)}} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

これは

$$- \frac{\log p_t(0, 0)}{\log t} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

上の結論は, u_t は $p_t(0, 0) = O(t^{-\alpha})$ as $t \rightarrow \infty$ と考えられる。更に計算が可能と仮定する。 u_t の代用

とし、次のように v_n を考えることにしよう。

$K_n \subset N$ は compact で、 $K_n \subset K_{n+1}$, $B(0, n) \subset K_n$ とし、 v_n は harmonic on $\overset{\circ}{K}_n$ で $v_n(0) = 1$, $v_n = 0$ on K_n^c とする。すなわち、 v_n は 0 と 1, K_n の外で 0 とする電圧分布と考えられる。このとき β に依存するものではない。

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{\|v_n\|_1}{\|v_n\|_2} \right)^2}{\log \frac{\|v_n\|_2^2}{\Sigma(v_n, v_n)}}$$

すなわち、

$$\left(\frac{\|v_n\|_1}{\|v_n\|_2} \right)^2 \approx V(K_n) \equiv K_n \text{ の } \mathbb{E} \text{ 値}$$

$$\|v_n\|_2^2 \approx V(K_n)$$

と考えられるから、

$$R_n = 1 / \Sigma(v_n, v_n) \quad (\text{電気抵抗})$$

とあり、 α の代用として 1-2 次元量を定義する。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log V(K_n)}{\log V(K_n) R_n}.$$

以上の考察から、我々は

$$\alpha = \delta = \gamma$$

が成立すると思う。すなわち、

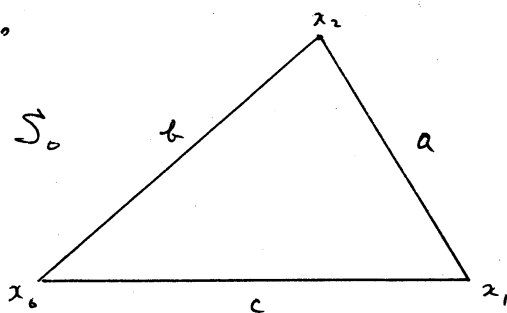
以下で Deformed Sierpinski Gasket を用いて、 γ の

計算結果を述べるが、Sierpinski Gasket については、すでに知られている decay order α は ν と一致する。

§ 2. Deformed Sierpinski Gasket

まず Deformed Sierpinski Gasket の説明から始める。

S_0 を図の x_0 となる 3 辺の長さは a, b, c の三角形 (周を考慮する) とする。



縮小写像 f_i ($i=0, 1, 2$) は

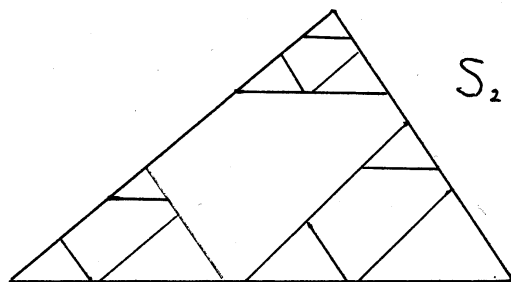
$$f_0(x) = k(x - x_0) + x_0, \quad f_1(x) = l(x - x_1) + x_1, \quad f_2(x) = m(x - x_2) + x_2$$

とする。ここで $k, l, m > 0$, $l+m, m+k, k+l \leq 1$,

$$S_n = S_n(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{j=0}^n \bigcup_{0 \leq i_1, \dots, i_j \leq 2} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_j}(S_0)$$

$$S_\infty = S_\infty(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(a, b, c, k, l, m)$$

と置く。



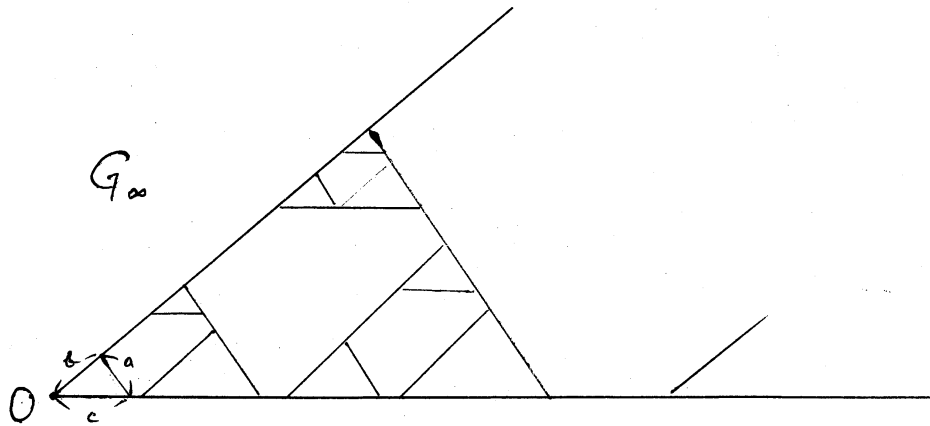
S_∞ は Deformed Sierpinski Gasket と呼ぶことにする。

$S_\infty(a, a, a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が通常の Sierpinski Gasket である。
 S_∞ は infinite graph network と考える。

$$G_n = G_n(a, b, c, k, l, m) \equiv \frac{1}{k^n} S_n(a, b, c, k, l, m)$$

$$G_\infty = G_\infty(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$$

とする。ここで $\frac{1}{k^n} S_n$ は S_n を $\frac{1}{k^n}$ 倍拡大したものを示す。



infinite graph network G_∞ を用いて γ は §1 で定義した γ は次式で与えられる。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log V(G_n)}{\log V(G_n) R_n}$$

次から γ の値を計算する結果を得る。

Th i) $k = l = m = \frac{1}{2}$ のとき $\gamma = \frac{\log 3}{\log 5}$

$$ii) \min(l+m, m+k, k+l) < 1 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\log(1 + \frac{l}{k} + \frac{m}{k})}{\log \frac{1}{k}(1 + \frac{l}{k} + \frac{m}{k})} & , k+l+m \geq 1 \\ \frac{1}{2} & , k+l+m < 1 \end{cases}$$

注意 1° γ は a, b, c に無関係に決つた。

2° $k=l=m=1/2$ のとき, γ は Kusuoka [6]

Rammz/- Toulouse [9] の $a=b=c$ のとき求めた

spectral dimension に決つて $\alpha = \frac{\log 3}{\log 5}$ に一致する。

3° γ は $k=l=m=1/2$ の不連続点 T_2 であり

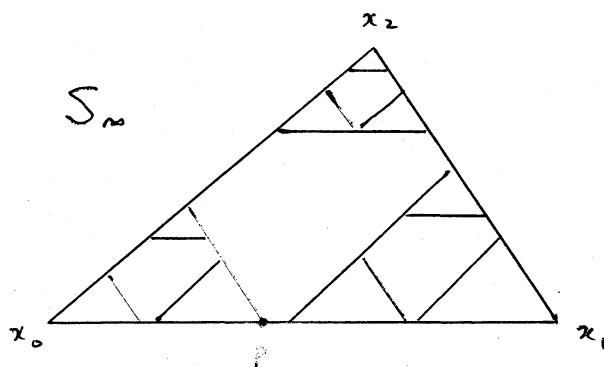
したがって興味深い。

Th の証明で注意すべき点は、抵抗 R_n の計算に、なか
り $Y-\Delta$ 公式を用いたことである。詳細については、
[8] を見ればよい。

§ 3. S_n における調和関数 (電圧分布)

S_n の x_0, x_1, x_2 に対する電圧 $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$
を与えておく。 S_n における電圧分布 (調和関数) $h(x)$
を求めることは容易である。 S_n の自己相似性から、図におけ
る点 p における電圧 $h(p)$ が求まればよい。 我々は S_n
の p における電圧 $h_n(p)$ を求め、 $h(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(p)$ とし

2 $h(p)$ を求めることにする。



現在 $a \geq 3$, $h(p)$ を求めるわけではなから、部分的な結果を次に挙げる。計算の基本となるのは、ここでも γ - Δ 公式である。

Th. i) $k = l = m = 1/2$ $a \geq 2$

$$h(p) = \frac{2}{5} h(x_0) + \frac{2}{5} h(x_1)$$

ii) $a = b = c$, $k = l = m < 1/2$ $a \geq 2$

$$h(p) = (1-k) h(x_0) + \frac{2k}{3} h(x_1) + \frac{k}{3} h(x_2)$$

注意 1° i) は a, b, c に無関係であり、 $a = b = c$ のときは、Kigami [4] で求められた調和関数と一致している。

2° ii) は $k \uparrow 1/2$ とする。

$$h(p) = \frac{1}{2} h(x_0) + \frac{1}{2} h(x_1) + \frac{1}{8} h(x_2)$$

となり. $a = b = c$, $k = l = m = \frac{1}{2}$ の場合に一致した。
 1) $a = b = c$ と h は J_n 上 不連続となる。
 これは §2 で見た σ の不連続性と関連しているように
 思われる意味深い。

参考文献

- [1] M.T.Barlow and E.A.Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Probab. Th. Rel. Fields*, 79(1988), 59-85.
- [2] E.A.Carlen, S.Kusuoka and D.W.Strook, Upper bounds for symmetric Markov transition functions, *Ann. Inst. Poincare, Sup. au no 2*(1982), 245-270.
- [3] B.Gaveau, M.Okada and T.Okada, Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis, to appear in *Proceedings of the special year in Several Complex Variables at Mittag-Leffler '87-'88* (ed. J.E.Fornaess and C.O.Kiselman), Princeton Univ. Press.
- [4] J.Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces, *Japan J. Appl. Math.*, 6(1989), 259-290.
- [5] J.Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, preprint.
- [6] S.Kusuoka, A diffusion process on a fractal, *Probabilistic Methods in Mathematics and Physics* (Katada 1985), Kinokuniya-North Holland, Tokyo, 1987, 251-279.
- [7] S.Kusoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ.RIMS, Kyoto Univ.* 25(1989), 659-680.
- [8] M.Okada, T.Sekiguchi and Y.Shiota, Heat kernels on infinite graph networks and deformed Sierpinski gaskets, *Japan J. Appl. Math.*, to appear
- [9] R.Rammal and G.Toulouse, Random walks on fractal structures and percolation clusters, *J. Phys. Lett.*, 44(1983), 13-22.