

離婚に関する数理モデルの考察

Analysis of Mathematical Model for Divorce

*新城直幸・**岩本眞果・***森光太郎

*龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻, **島根大学総合理工学部数理情報システム学科, ***石原産業株式会社中央研究所生物科学研究室

*Naoyuki Shinjou and *Mami Iwamoto, ***Kotaro Mori

*Graduate Course of Applied Mathematics and Informatics Ryukoku University, Shiga 520-2194, JAPAN

**Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Nishikawatsu-cho 1060, Matsue-shi, Shimane 690-8506, JAPAN

***Central Research Institute, Ishihara Sangyo Kaisha, LTD, 2-3-1, Nishisibukawa, Shiga 525-0025, JAPAN

The number of divorces is increasing since 1980s in Japan. We hypothesize that this trend is due to a new nature of people. For example, recently, people feel annoying, when they are loved too much. Following Strogatz's model(1998), we examined a dynamical model which coupled ordinary differential equations describing the time-variation of the love or hate displayed by individuals in a romantic relationship. Incorporating terms that express such annoying feeling by a kind of logistic function, we found whether a couple unfortunately divorce or not depends on initial states of their love and their parameters of personality.

1 はじめに

我が国の離婚水準は、1980年代以降、離婚率は急速な上昇傾向に転じており、2000年には1000組に2組と世界的にみてもすでに高水準に達している。この傾向が続くならば離婚という事象は社会的に希有な事例ではなく、人々のライフコースの中における選択肢のひとつとなる時代に移行するとも言われている（安藏,2003）。では、なぜわが国の離婚は、近年急速に増加しているのだろうか。

離婚に関する民法の規定には「夫婦は、その協議で、離婚することができる」（民法第763条）とあり、日本の離婚では全体の90%がこの「協議離婚」である（河野 2012）。協議離婚は、当事者夫婦の離婚の合意のみで成立し、その理由を問わないため、離婚に至った経緯や理由については、特別な調査をしないかぎり明らかにすることができない。残りの9%は調停離婚、1%が判決離婚という割合となっている（厚生労働省統計情報部「人口動態統計」2010）。そのため、これまでの離婚研究の要因分析のほとんどが、家庭裁判所に申し立てられた「夫婦関係事件」（調停離婚と判決離婚）の申立理由の分析によって代替されてきた。しかしこれはわが国の離婚のわずか1割程度の件数にすぎず、しかも夫婦間の話し合いで結論が出せなかったという条件付きのものである。このような解析では、離婚の要因分析に偏りが生じていると思われる。一方、インターネット調査会社マクロミルのおこなった民間のアンケート調査（アエラ 2010：34-39）によると、離婚をしたか、検討中のペアが離婚を考えた理由として夫と妻が共通して挙げているのは、「愛情が冷めた」であった。近年、若者の感情として、相手からの思いが強すぎると、冷めてしまう（ウザイと思う）傾向があると思われる。そこで、本研究では、後述するストロガッツのモデルを参考にし、愛情の冷め方として、この「ウザイ」と思う効果をモデルに組み込み、それによって互いの気持ちに変動していくモデルを立てて、数値シミュレーションにより離婚の条件を考えた。

2 先行研究

Strogatz(1998)は数理モデルを用いてロミオとジュリエットの恋愛について考えた。Strogatzは $R(t)$ をロミオのジュリエットに対する愛情、憎しみ、 $J(t)$ をジュリエットのロミオに対する愛情、憎しみとして以

下のような線形微分方程式を構築した.

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} = cR + dJ \end{cases} \quad (2.1)$$

ただし, a は自分自身の感情の大きさを表すパラメータ, b はジュリエットの感情の影響を表すパラメータとする. Strogatz(1994) と彼の学生によりロミオの感情はパラメータ a, b に依存し, 以下の4つのパターンに分類できることを示した.

1. ロミオの感情が自分の感情とジュリエットの感情により促進される場合 ($a, b > 0$)
2. ロミオの感情が自分の感情により促進され, ジュリエットの感情により抑制される場合 ($a > 0, b < 0$)
3. ロミオの感情が自分の感情に抑制され, ジュリエットの感情により促進される場合 ($a < 0, b > 0$)
4. ロミオの感情が自分の感情とジュリエットの感情に抑制される場合 ($a < 0, b < 0$)

方程式 (2.1) は互いに無関心に対応する平衡点として $R = J = 0$ を持ち, 解の挙動は固有値

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \quad (2.2)$$

により変化する. 以下では解の挙動について考える. $(a+b)^2 \geq 4(ad-bc)$ または複素数なら固有値は実である. 複素固有値解は $a+d < 0$ のとき安定したりミットサイクルとなり, $a+b > 0$ のとき不安定なりミットサイクルとなる. $a+d \equiv 0$ のとき解はある一定の周期を持ったリミットサイクルとなる. また実固有値を取るとき, 固有値が同符号の場合の結節点軌道と符号が異なる場合の鞍点軌道に分けることが出来る. 結節点軌道は固有値が共に負であれば安定であり, 固有値が正であれば不安定となる. 鞍点軌道は軌道が原点に向かう方向に安定した軌道を持ち, 原点からはなれる方向に不安定な軌道を持つ.

次に自分自身の感情には関係なく相手の感情に左右される特別な場合の解 ($a = d = 0$) の挙動について考える. この場合の固有値は $\lambda = \pm\sqrt{bc}$ であり, ダイナミクスは b, c に依存する. そして2人の感情は以下の3つに分けることが出来る.

1. お互いが愛し合っている場合 ($b, c > 0$)
2. お互いが憎しみ合っている場合 ($b, c < 0$)
3. 片方が愛して, もう一方が憎しみを持っている場合 ($bc < 0$)

1の解の挙動は鞍点軌道となり, 互いに愛し合うか, 憎しみ合う状態となる. 2の解の挙動も鞍点軌道となるが, 一方が愛し, もう一方が憎しみの感情を持った状態となる. 3の解の挙動は一定の周期を持った周期解となる. 次に2人ともが正反対の感情を持っている場合を考える ($c = -b, d = -a$). この場合の固有値は $\lambda = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ であり, ダイナミクスは a, b に依存する. そして2人の感情は

1. はりきり屋と世捨て人 ($ab > 0$)
2. ナルシストと用心深い恋人 ($ab < 0$)

に分けることが出来る。この結果はそれぞれの感情が自分自身 ($|a| > |b|$) に向いている、または相手 ($|a| < |b|$) に向いているかに依存する。前者の場合ははりきり屋と世捨て人が争っている状態、後者はナルシストと用心深い恋人が愛し合うまたは争っている状態となる。従って、彼らは愛と憎しみの4つの組み合わせ、または一定の周期を持った愛と憎しみのサイクルに行き着く。2人ともが共通の感情を持っている場合を考える ($c = b, d = a$)。この場合の固有値は $\lambda = a \pm b$ であり、このダイナミクスは a, b に依存する。 $|a| < |b|$ の用心深い恋人とはりきり屋は初期条件により愛し合うか、憎しみ合う状態となる。 $|a| < |b|$ のナルシストと世捨て人は一方が愛し、もう一方が憎しみの感情を持った状態となる。 R が定数であり、固有値が $\lambda = d, 0$ を満たすよう、ジュリエットに対するロミオの感情が彼女の感情に影響を受けず ($b = 0$)、自分自身の感情にも影響を受けないと仮定する。よってジュリエットの感情が $J = -cR/d$ で与えられる平衡点が存在し、平衡点は R の符号とジュリエットの恋愛のスタイルに依存し、正または負となる。ロミオがジュリエットを愛していると仮定すると ($R > 0$)、ジュリエットが用心深い恋人、ナルシストの場合の時にのみ ($cd < 0$)、ジュリエットはロミオを愛する。しかし、ジュリエットが用心深い恋人 ($d < 0$) の場合、平衡点は安定となる。ジュリエットがナルシスト的であれば、初期条件によって彼女の愛情は境界なく増大するか、憎んでいる状態になる。

3 モデル

3.1 モデル方程式

Strogatz のモデル方程式では2人の気持ちが高ければ無限大に増大してしまう。よって以下では Strogatz のモデル方程式をもとにして、気持ちをある一定に押さえるような効果を入れたモデル方程式について考える。相手の気持ちと自分の気持ちを変数として以下のようなモデル方程式を構築した。

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -au + b \left(1 - \frac{v}{k_1}\right) v \\ \frac{dv}{dt} = -cv + d \left(1 - \frac{u}{k_2}\right) u \end{cases} \quad (3.1)$$

ただし、 u, v はそれぞれ男性の気持ち、女性の気持ちを表す変数、 a は男性の気持ちの減少率、 b は女性の気持ちの影響を表すパラメータ、 c は女性の気持ちの減少率、 d は男性の気持ちの影響を表すパラメータ、 k_1, k_2 は収容力を表すパラメータである。

3.2 平衡点

方程式 (3.1) の平衡点の個数について調べる。まず (3.1) を $\lambda_1 = \frac{1}{k_1}, \lambda_2 = \frac{1}{k_2}$ とおく

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -au + b(1 - \lambda_1 v) v, \\ \frac{dv}{dt} = -cv + d(1 - \lambda_2 u) u \end{cases} \quad (3.2)$$

となる。この方程式の定常問題で v を消去し、 u のみの方程式に変形した後、

$$u = \frac{U'}{\lambda_2}, \quad \alpha = \frac{\lambda_1 d}{\lambda_2 c}, \quad \beta = \frac{ac}{bd}$$

とおくと U' に関する方程式

$$U' ((1 - \alpha(1 - U')) U') (1 - U') - \beta = 0$$

を得る. $U' = 0$ 以外の解を調べる. 上の式を U' で割って $1 - U' = U + \frac{1}{3}$ とおくと

$$F(U, \alpha, \beta) = U^3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)U - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha}{27} - \frac{1}{3} + \beta\right) = 0 \quad (3.3)$$

となる. この方程式のパラメータ α, β に関する分岐問題を考える. 分岐点を与える α, β に関する条件は2つの方程式

$$F(U, \alpha, \beta) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial U}(U, \alpha, \beta) = 0, \quad (3.4)$$

から決まる. (3.4) から

$$U = \pm \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られ, これを (3.3) に代入し, 式を整理すると

$$\beta = \begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right), & \left(U = \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ \alpha \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right) & \left(U = -\left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \quad (3.5)$$

を得る.

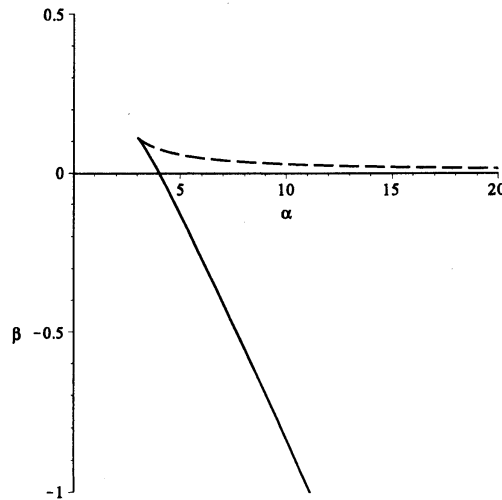


Fig 1: 実線:(3.5) の第 1 式, 破線:(3.5) の第 2 式

Fig 1 より

$$\alpha \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right) < \beta < \alpha \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

では (3.3) を満たす解 U が 3 つ存在し,

$$\beta = \alpha \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right) = \alpha \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

では (3.3) を満たす U が 2 つ存在する. また,

$$\alpha \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} \right) \right) < \beta < \alpha \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} \right) \right)$$

では (3.3) を満たす U は 1 つだけ存在する. 以上より $U = 0$ を含めると平衡点は最大 4 つ存在することがわかる.

3.3 解の漸近安定性

3.2 で示したように (3.2) の平衡点は最大 4 つ存在する. 以下では 4 つの平衡点の安定性について考える. まず (3.2) の平衡点を (u^*, v^*) とするとこの線形化行列は

$$J = \begin{pmatrix} -a & b(1 - 2\lambda_1 v^*) \\ d(1 - 2\lambda_2 u^*) & -c \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る. よって

$$\text{Tr } J = -a - c < 0 \quad (3.6)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \frac{b}{a}(1 - \lambda_1 v)v \\ \psi(u) &= \frac{d}{c}(1 - \lambda_2 u)u \end{aligned} \quad (3.7)$$

とおく. まずはじめに平衡点が 1 つの場合 $((u^*, v^*) = (0, 0))$ の安定性を考える. この時の方程式のヌルクラインは Fig 2 のようになる.

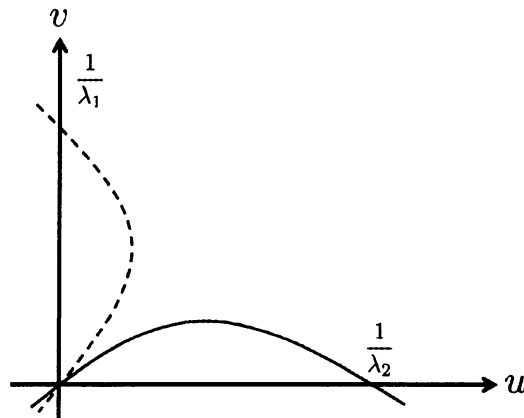


Fig 2: 破線: $u = \phi(v)$, 実線: $v = \psi(u)$

このときの J の行列式は

$$\det J = ac - bd$$

となる. 平衡点 $(u^*, v^*) = (0, 0)$ では

$$\frac{d}{du}\psi(0) < \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(0)},$$

すなわち

$$\frac{d}{c} < \frac{a}{b}$$

より $\det J > 0$ となる。したがって J の固有値の実部は負になる。平衡点 $(u, v) = (0, 0)$ は安定である。
次に平衡点が2つの場合を考える。このときのヌルクラインは Fig 3 のようになる。

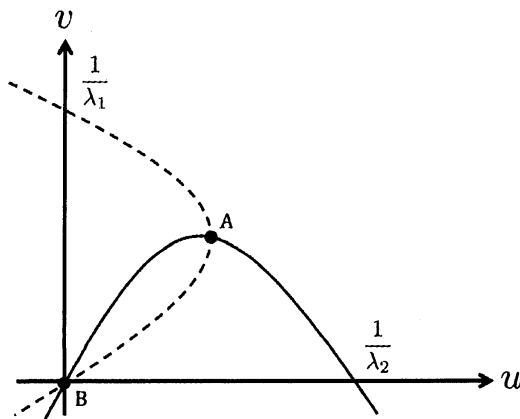


Fig 3: 破線: $u = \phi(v)$, 実線: $v = \psi(u)$

このときの行列式は

$$\det J = ac - bd(1 - 2\lambda_1 v^*)(1 - 2\lambda_2 u^*) = ac \left(1 - \frac{d\phi}{dv}(v^*) \frac{d\psi}{du}(u^*) \right)$$

となる。ただし u^*, v^* は平衡点 A または B とする。点 A で $\frac{d\phi}{dv}(v^*) = 0$ のときは明らかに $\det J > 0$ となるので $\frac{d\phi}{dv}(v^*) \neq 0$ とする。Fig 3 のヌルクラインからわかるように点 A, B ではそれぞれ

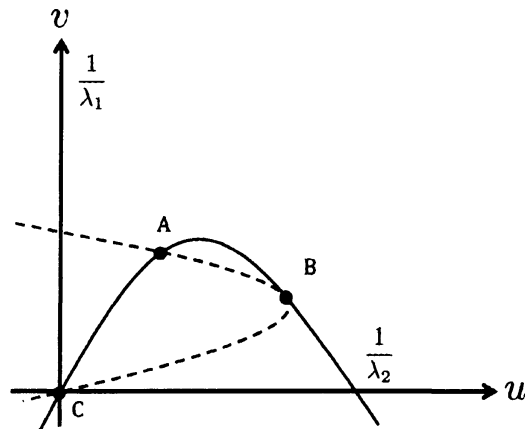
$$A: \frac{d}{du}\psi(u^*) < \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(v^*)}, \quad B: \frac{d}{du}\psi(u^*) > \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(v^*)}$$

が成り立つので

$$A: \det J > 0, \quad B: \det J < 0 \tag{3.8}$$

となる。よって, (3.6), (3.8) より点 A は安定であり, 点 B は不安定である。

次に平衡点が3つの場合を考える。このときのヌルクラインは Fig 4 のようになる。

Fig 4: 破線: $u = \phi(v)$, 実線: $v = \psi(u)$

点 A, B, C ではそれぞれ

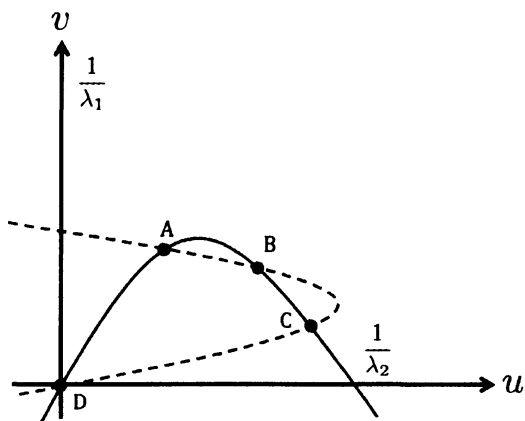
$$A: \frac{d}{du}\psi(u^*) < \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(v^*)}, \quad B: \frac{d}{du}\psi(u^*) = \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(v^*)}, \quad C: \frac{d}{du}\psi(u^*) > \frac{1}{\frac{d}{dv}\phi(v^*)}$$

が成り立つので

$$A: \det J > 0, \quad B: \det J = 0, \quad C: \det J < 0 \quad (3.9)$$

となる. よって, (3.6), (3.9) より点 A は安定であり, 点 C は不安定である. 点 B では 0 固有値が現れる線形化だけでは判定できない.

最後に平衡点が 4 つの場合を考える. このときのヌルラインは Fig 5 のようになる.

Fig 5: 破線: $u = \phi(v)$, 実線: $v = \psi(u)$

点 A, B, C, D ではそれぞれ

$$A, C: \frac{d}{dv}\psi(u^*) < \frac{1}{\frac{d}{du}\phi(v^*)}, \quad B, D: \frac{d}{dv}\psi(u^*) > \frac{1}{\frac{d}{du}\phi(v^*)},$$

が成り立つので

$$A, C: \det J > 0, \quad B, D: \det J < 0 \quad (3.10)$$

となる. 従って, (3.6), (3.10) より点 A, C は安定であり, 点 B, D は不安定である.

4 数値シミュレーション

数値シミュレーションを行う前に離婚の閾値を定めておく．男女の気持ちが離れすぎている場合または男女の気持ちがそれぞれ 0 に近い場合を離婚する状態と定める．

$$u \ll v, \quad v \ll u, \quad u \simeq 0, \quad v \simeq 0$$

まずはじめに平衡点が 1 つの場合の数値シミュレーションを考える．

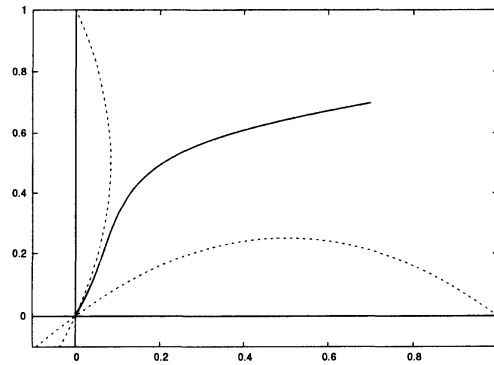


Fig 6: 破線: $u = \phi(v)$, $v = \psi(u)$, 実線:(3.2) の数値シミュレーション結果

Fig 6 は $a = 1.5$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $d = 0.5$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 1.0$, 初期値 $(u, v) = (0.7, 0.7)$ の数値シミュレーションを表している．この結果からこのパラメータではどの初期値でも男女の気持ちが 0 に収束することになるので必ず離婚してしまう．

次に平衡点が 2 つの場合の数値シミュレーションを考える．

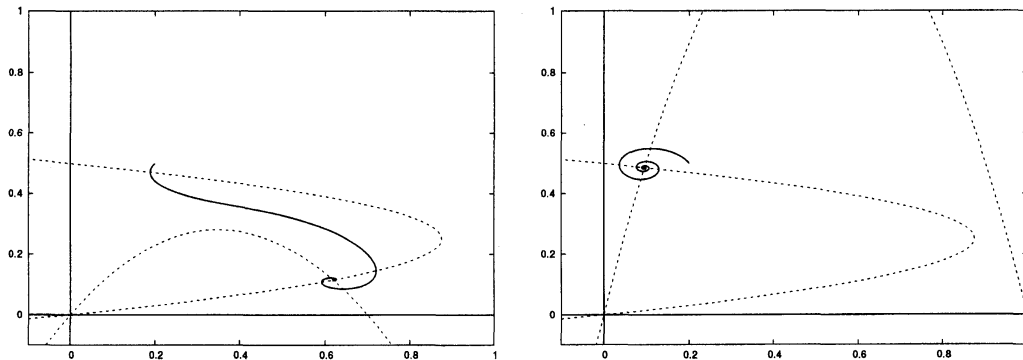


Fig 7: 破線: $u = \phi(v)$, $v = \psi(u)$, 実線:(3.2) の数値シミュレーション結果

Fig 7 の左図は $a = 0.5$, $b = 3.5$, $c = 0.5$, $d = 0.8$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.7$, 右図は $a = 0.5$, $b = 3.5$, $c = 0.5$, $d = 2.8$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1.0$ の数値シミュレーション結果を表している．ただし、共に初期値 $(u, v) = (0.2, 0.5)$ である．この結果から左図は男性の気持ちは高いが、女性の気持ちが低くなるため離婚してしまう．右図は女性の気持ちは高いが、男性の気持ちが低くなるため離婚してしまう．

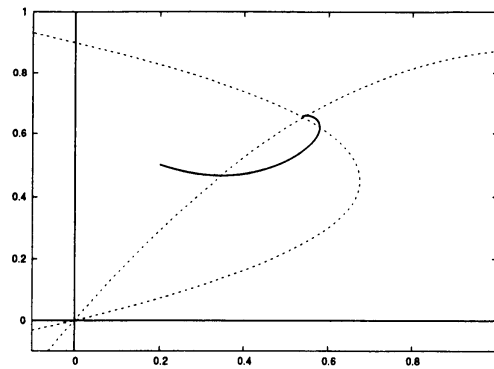


Fig 8: 破線: $u = \phi(v)$, $v = \psi(u)$, 実線:(3.2) の数値シミュレーション結果

Fig 8 は $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 0.5$, $d = 0.8$, $k_1 = 0.9$, $k_2 = 2.2$ で初期値 $(u, v) = (0.2, 0.5)$ の数値シミュレーションを表している。この結果から男女ともに気持ちが高い位置で保たれているため離婚しないことがわかる。この3つの数値シミュレーション結果から平衡点が2つの場合は初期値によらずパラメータ a , b , c , d , k_1 , k_2 によって離婚するかしないか分かれることがわかる。

最後に平衡点が4つの場合の数値シミュレーションを考える。

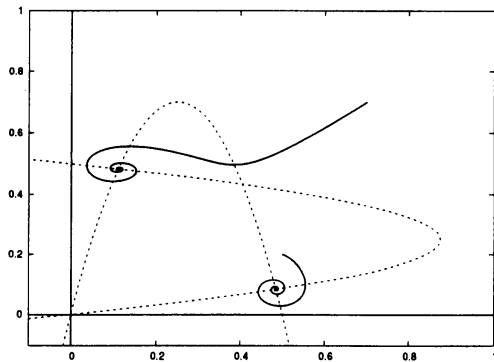


Fig 9: 破線: $u = \phi(v)$, $v = \psi(u)$, 実線:(3.2) の数値シミュレーション結果

Fig 9 は $a = 0.5$, $b = 3.5$, $c = 0.5$, $d = 2.8$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$, 初期値 $(u, v) = (0.5, 0.2)$, $(0.7, 0.7)$ の数値シミュレーションを表している。この結果も Fig 7 と同様に一方の気持ちは高いが、もう一方の気持ちが低くなっているため離婚してしまう。

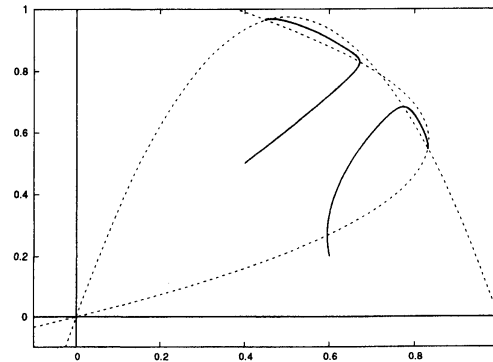


Fig 10: 破線: $u = \phi(v)$, $v = \psi(u)$, 実線:(3.2) の数値シミュレーション結果

Fig 10 は $a = 0.5$, $b = 1.4$, $c = 0.5$, $d = 1.9$, $k_1 = 1.1$, $k_2 = 1.0$, 初期値 $(u, v) = (0.4, 0.5)$, $(0.6, 0.2)$ の数値シミュレーションを表している. この結果から Fig 8 と同様に男女ともに気持ちが高い位置で保たれているため離婚しないことがわかる. この 2 つの数値シミュレーション結果から平衡点が 4 つの場合は初期値, パラメータ a , b , c , d , k_1 , k_2 によって離婚するかないか分かれることがわかる.

5 まとめ

以下では本研究で得られた結果をまとめる.

1. Strogatz のモデル方程式をもとにしたモデル方程式 (3.1) の結果から平衡解がパラメータに依存し, 最大 4 つ存在することが確認できた. この 4 つの平衡点のそれぞれについて安定性の計算を行い, 安定性を確認することが出来た.
2. 数値計算の結果から平衡点が 1 つの場合は初期値に依存せずに必ず離婚してしまい, 平衡点が 2 つの場合は初期値には依存しないがパラメータ a , b , c , d , k_1 , k_2 の取り方により離婚するかないか変化. 平衡点が 4 つの場合は初期値, パラメータ a , b , c , d , k_1 , k_2 の取り方により離婚するかないか変化することが確認できた.

6 研究課題

今回 Strogatz のモデル方程式をもとにしたモデル方程式 (3.1) からパラメータにより必ず離婚する場合や初期値により離婚する, しないが変化することが得られた. しかし, 今回はモデル方程式を簡略化するために負の感情を考えていない. この負の感情を考えることにより Strogatz のような分類が出来るのではないかと考えられる.

参考文献

- [1] 安蔵伸治, 2003. “離婚とその要因-わが国における離婚に関する要因分析-”, JGSS 研究論文集 2:25-45.
- [2] 河野俊彦, 2012. “「離婚」その潜在的要因”, 仏教大学大学院 社会福祉学研究科篇 40:53-70
- [3] Sprott, J.C, 2004. “*Dynamical Models of Love*”, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences 8(3):303-313