

Remarks on seminormal oversemigroups

愛知教育大学教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)

茨城大学理学部 松田隆輝 (Ryuki Matsuda)

半群はすべて可換で, cancellative torsion-free で, 演算は加法で書かれていて 0 を持つとする. 自明な半群 $\{0\}$ は, 今は除くものとする.

S を半群とするとき, $q(S) = \{s_1 - s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$ を S の商群という. T が S を含む $q(S)$ の部分半群のとき, T を S の oversemigroup という.

今, T を半群, S を T の部分半群とする. T の元 t が S 上整 (integral) とは, ある自然数 n が存在して $nt \in S$ となるときをいい, S 上整である T の元の全体を S^* と書くとき, S^* を T における S の整閉包 (integral closure) という. S が T において整閉 (integrally closed) であるとは, $S = S^*$ のときをいう. 特に $T = q(S)$ のとき, S が T において整閉であるとき, S は正規 (normal) 半群という. これらの定義などについては [1] を参照して下さい.

定義 1. $G = q(S)$ を S の商群とする. S が半正規半群 (seminormal semigroup) とは, $\alpha \in G$ で, $2\alpha \in S$, $3\alpha \in S$ なら, $\alpha \in S$ が成立するときをいう.

例 1. S を $(1, 0), (1, 1)$ で $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ において生成される半群とする. 但し, $\mathbb{Z}$ は整数環とする. このとき, $S = \{(a, b) \mid a \geq b, a, b \in \mathbb{Z}_0\}$ となる. 但し, $\mathbb{Z}_0$ は負でない整数全体とする. $q(S) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である. $\alpha \in q(S)$ で $2\alpha \in S$, $3\alpha \in S$ とする. $\alpha = (a-c, b-d)$ と書ける. 但し, $(a, b), (c, d) \in S$ である. $2\alpha \in S$ より, $a-c \geq b-d$. よって, $\alpha \in S$. これより S は半正規半群となる. $R = k[S]$ を体 k 上 S の半群環とすると, R は半正規環である.

例 2. k を体とする. 代数曲線 $y^2 = x^3$ の座標環を $R = k[X, Y] / (Y^2 - X^3) = k[U^2, U^3]$ とする. S を $2, 3$ で生成される $\mathbb{Z}$ の半群とすると, $S = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ となる. $q(S) = \mathbb{Z}$ となる. $1 \in q(S)$ で $2 \cdot 1 \in S$, $3 \cdot 1 \in S$ だが, 1 は S の元ではないので S は半正規半群ではない. よって $R = k[S]$ も半正規環ではない.

例 3. k を体とする. 代数曲面 $y^2 = xz^2$ の座標環を

$$R = k[X, Y, Z] / (XZ^2 - Y^2) = k[U^2, UV, V]$$

とする. S を $(2, 0), (1, 1), (0, 1)$ で生成される半群とすると, $S = \{(2a + b, b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_0\}$ で, $q(S) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である. $(1, 0)$ は S の元ではないが, $2(1, 0) \in S$. $3(1, 0)$ は S の元ではない. 今 $\alpha = (m, n) \in q(S)$ で $2\alpha \in S$, $3\alpha \in S$ とする. $3\alpha \in S$ より m, n は負ではない整数である. $m = 2t$ とおくと, $\alpha = (m, n) = (m, 0) + (0, n) = t(2, 0) + n(0, 1) \in S$. また, $m = 2t + 1$ のとき, n が 0 でないとき, $\alpha = (m, n) = t(2, 0) + (1, 1) + (n-1)(0, 1) \in S$. $n = 0$ とすると, $3\alpha = (3m, 0) = (3t+1)(2, 0) + (1, 0)$ となり矛盾である. これより $n \neq 0$ である. よって S は半正規半群である. 従って R は半正規環である.

注意. 例 3 より, S は半正規半群でも 2-閉 ($\alpha \in q(S)$ で $2\alpha \in S$ のとき, $\alpha \in S$ となることをいう) とは限らない.

次に半群 S のイデアルの定義を復習しよう (cf. [1]). I は空集合ではない S の部分集合とする.

(1) I が S のイデアルとは, $I + S \subset I$ のときをいう.

(2) P を S のイデアルとする. $x, y \in S$ で $x + y \in P$ のとき, $x \in P$ 又は $y \in P$ が成立するとき, P を S の素イデアルという.

(3) M を S のイデアルとする. M が極大イデアルとは, $M \neq S$ で, 且つ I が S のイデアルで M を含むときは, $I = S$ か又は $I = M$ のときをいう.

$M = \{ m \in S \mid m \text{ は } S \text{ の非単元} \}$ が空集合でなければ, M は S の唯一つの極大イデアルである.

補題 1. (1) $\{ S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ を S の半正規 oversemi-groups の directed union とする. このとき $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ は半正規半群である.

(2) S の半正規 oversemigroups の共通部分はまた半正規 oversemigroup である.

(3) T を S の加法的閉集合とする. S が半正規半群なら, S_T もそうである.

(4) T を torsion-free アーベル群, S をその部分半群とする. M を $M \cup T$ の形の付値半群の極大イデアルとする. このとき, 半群 $S \cup M$ が半正規である必要十分条件は S が半正規半群であることである.

例えば, (3) の証明を試みよう. $\alpha \in q(S_T)$ で $2\alpha \in S_T$, $3\alpha \in S_T$ とする. このとき, $2\alpha = s - t$, $3\alpha = s' - t$ ($s, s' \in S$) となる S の元 t がとれる. $2(\alpha + t) \in S$, $3(\alpha + t) \in S$ で S は半正規半群だから, $\alpha + t \in S$ となる. よって, $\alpha \in S_T$ となる. (4) については, [2, Proposition 3.11] をみて下さい.

定理 1. T を半群とし, S をその部分半群で S と T のすべての中間半群は半正規であるとする. このとき次のことが成立する.

(1) T の各元 t に対して S の元 s が存在して, $s + t$ は S 上整になる.

(2) B を S の加法的閉部分集合とする. このとき S_B と T_B のすべての中間半群は半正規である.

(3) ([2, Theorem 3.14]) S は群, 又は T は S の over-semigroup である.

定理 2. T を半群, S をその部分半群とする. このとき次の (1) - (3) は同値である.

(1) S と T の間のすべての半群は半正規である.

(2) $2u, 3u \in T$ となる任意の $u \in q(T)$ に対して,

$S[2u, 3u]$ は半正規半群である.

特に, $T = q(S) = G$ のときは次の (3) と (1) (又は (2)) は同値となる.

(3) 各 $\alpha \in G - S$ に対して, α を含まない極大な S のすべての oversemigroup は半正規半群である.

例えば, (3) $\Rightarrow$ (1) を証明してみよう. L を S の oversemigroup とする. 任意の $\alpha \in G - L$ に対して, ツオルンの補題より, α を含まない L の oversemigroup で極大な半群 L_α が存在する. L_α は半正規半群で $L = \bigcap L_\alpha$ だから, 補題 1 (2) より, L は半正規半群となる.

定理 3. 次の (1) - (3) は同値である.

(1) S は半正規半群である.

(2) S^* を S の整閉包とする. 任意の $u \in S^* - S$ に対して, S の $S[u]$ における導手は $S[u]$ の根基イデアルである.

(3) m が自然数で, $\beta \in q(S)$ のとき, m 以上の任意の自然数 n に対して $n\beta \in S$ なら $\beta \in S$ である.

例えば, (1) から (2) を証明してみよう. 今, (1) と (3) の同値性はいえたとする. C を S の $S[u]$ における導手とする. α

を $S[u]$ における C の根基の元とする. α が C の元であることを示す. ある自然数 n が存在して, $n\alpha \in C$ となる.

β が $S[u]$ の元とすると, 負でない任意の整数 m に対して, C は $S[u]$ のイデアルだから, $m\alpha + n\alpha \in S[u] + C \subset C$ となる.

よって, $(m+n)(\alpha + \beta) = (m\alpha + n\alpha) + (m+n)\beta \in S[u] + C \subset C$ となる. C は S のイデアルでもあるから,

$(m+n)(\alpha + \beta) \in S$ となる. (3)より, $\alpha + \beta \in S$ である.

よって, $\alpha + S[u] \subset S$ であるから $\alpha \in C$ となる. これで,

C は根基イデアルであることがいえた.

次に半群における可逆分数イデアルを定義しよう.

定義 2. S を半群とし, I を空集合でない $G = q(S)$ の部分集合とする.

(1) I が S の分数イデアルとは, 次の 2 つの条件を満たすときをいう.

$$(i) \quad S + I \subset I.$$

$$(ii) \quad r + I \subset S \text{ となる } S \text{ の元 } r \text{ が存在する.}$$

(2) $I^{-1} = \{ \alpha \in G \mid \alpha + I \subset S \}$ とおく. $I + I^{-1} = S$ のとき, I は可逆分数イデアルという.

半群における可逆分数イデアルは単項分数イデアルである.

何故なら, $I + I^{-1} = S$ だから $a \in I$ と $b \in I^{-1}$ が存在して
 $0 = a + b$ となる. 任意の I の元 x に対して, $x = x + 0 =$
 $x + (a + b) = a + (b + x) \in a + S$ となる. よって
 $I \subset a + S$ がいえた. 逆に, 任意の $I + S$ の元 $a + s$ に対し
て I は S のイデアルだから, $a + S \subset I$. ゆえに $I = a + S$
となり, I は単項分数イデアルであることがいえた.

従って, ピカール群

$\text{Pic}(S) = \{ \text{可逆分数イデアル} \} / \{ \text{単項分数イデアル} \}$
は (0) となる.

定理 4. $\text{Pic}(S) = (0)$.

参考文献

[1] R. Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ.
of Chicago, Chicago, 1984.

[2] M. Kanemitsu and R. Matsuda, Note on seminormal
overrings, to appear in Houston J. Math. vol. 22
(1996).