

# 非灰色の対流層モデル

について

東大 理 海野 和三郎

## § 1 表現

輻射流体の記述を前の研究に述べた一般変分原理に基づいて行う。これは一般化されたエントロピー生成の最小原理とあるが、直接的には保存則を次の形に積分形にまとめることである。

$$\begin{aligned} 0 = \delta \Phi \equiv \int dx dy dz & \left[ \frac{\delta P}{\delta} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial P u_i}{\partial x_i} \right\} \right. \\ & + \delta u_i \left\{ \frac{\partial P u_i}{\partial t} + \frac{\partial P u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i \right\} \\ & \left. + \delta \ln T \left\{ \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho T u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right\} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

$P$ : 圧力,  $\rho$ : 密度,  $T$ : 温度,  $u_i$ : 速度,  $g_i$ : 重力加速度 ( $g_i = -g \delta_{i3}$ )

$S$ : エントロピー,  $F_i$ : 輻射流量

目的は水平平均をとったモデルの決定であるが、対流の決定が同時に必要となる。両者を分離してその関連を調べる。

水平平均をバーで記し  $P = \bar{P}(1 + \alpha)$ ,  $\rho = \bar{\rho}(1 - \eta)$ .

$T = \bar{T}(1 + \theta)$ ,  $S = \bar{S} + S_1$ ,  $u_i = \bar{u}_i + u_{1i}$ ,  $F_i = \bar{F}_i + F_{1i}$

$\rho u_i = \overline{\rho u_i} + (\rho u_i)_1$ ,  $\rho u_i u_j = \overline{\rho u_i u_j} + (\rho u_i u_j)_1$  等と書く。(1)の

水平平均は若干の計算により,

$$\delta \overline{\Phi} = \int dx dy dz \left[ \overline{\rho} \omega \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\overline{P} + \overline{\rho} \omega^2) + g \overline{P} \right\} + \delta(\ln \overline{T}) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( W + \frac{u_j^2}{2} \right)_1 \overline{\rho} \omega + \overline{P} \right\} \right] = 0, \quad (2)$$

但し, 同時に水平(xy)面における対称性をも考慮して,

$$\overline{\rho u_i} = 0, \quad (\overline{u_i} = -\overline{\eta u_{i1}} \ll |u_{i1}|). \quad (3)$$

W: エンタルピー,  $\omega \equiv u_3$ . (2)は平均モデルの構造をきめる。

対流圧  $\overline{\rho \omega^2}$ , 対流熱流量  $(W + u_j^2/2)_1 \overline{\rho} \omega$  を通じて対流が関与し,

$\overline{P}$  を通じて非灰色輻射輸送が内題となる。対流を決定する式

は(1)と(2)の差である。 $\rho u_i$ は小さくなくてよいが,  $\omega, \eta, \theta$ を一次の量とすると

$$\begin{aligned} \delta \Phi_c = & \int dx dy dz \left[ \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \overline{\rho} \omega \left\{ \overline{P} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right\} \right. \\ & + \delta u_{i1} \left\{ \overline{P} \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} + (\rho u_j \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_j})_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{P} \omega) - g_i \overline{P} \eta \right\} \\ & \left. + \delta \theta \left\{ \overline{P} \overline{T} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \overline{\rho} \omega \frac{\partial \overline{S}}{\partial z} + (\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j})_1 - \theta \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \right\} \right] \\ = & 0. \end{aligned} \quad (4)$$

対流の決定には勿論モデル(バーの量)が知られている必要があるが, 問題は2つの非線型項  $(\rho u_j \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_j})_1$  と  $(\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j})_1$  及び非灰色輻射流出  $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}$  の取扱いである。その外, 現行の混合距離理論との違いとしては安定層への対流のつきぬけがあるが, これは(4)の非局所性を考慮すれば自然に入る。問題点を次の2節で論ずる。

## § 2 非線型項

圧縮性不均質流体の乱流理論に完全なものがない以上、非線型項の取扱いは本質的困難がある。速度場温度場をフーリエ分解し、ハイゼンベルグ理論などを用いて乱流のスペクトル理論を展開することも可能であるが、モデル計算の上に实际的ではない。ここでは流れの代表的渦要素のみを取扱ひ、しかも1つの要素内の物理量の変動の間の位相関係は非圧縮性層流対流におけると同様であると假定する近似を用いる。

したがって、 $\rho u_i$  の分散、渦要素の代表的波数、有効レイノルズ数、有効ペクレ数を  $\langle \rho u_i^2 \rangle$ ,  $k_i$ ,  $Re$ ,  $Pe$  とかけば、非線型項は次の様に表わされるものとする。(= 回以上の指標は和)

$$(\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j})_1 = - \frac{1}{Re} \langle \rho u_j^2 \rangle \frac{1}{k_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i \quad (15)$$

$$(\rho u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j})_1 = - \frac{1}{Pe} \langle \rho u_j^2 \rangle \frac{1}{k_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} S_1 \quad (16)$$

$Re$  は実験的及び理論的に推定される約10である。 $Pe$  はよくわからないが、渦度の輸送とエントロピー輸送と同じ係数をもつものと考えれば  $Re$  と同じとしてよいであろう。実際は運動エネルギースペクトルとエントロピースペクトルと一般的には同一でない影響があると予想されるが、その差は僅かである。式(16)のように置くことが許されれば、変動量の分散については非線型であるが、位相については線型であるが、これは本質的困難はなくなる。

### 3.3 非灰色輻射伝達

対流渦の輻射流出について吸収係数が振動数による非灰色性が考慮されたことがない。この効果は巨星の対流層において場合によっては非線型項をきろんと扱うこと以上に重要であらう。

輻射場をエディントン近似で記述すると、

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_\nu = -4\pi \kappa_\nu \rho (J_\nu - B_\nu) \quad (7)$$

$$\operatorname{grad} J_\nu = -\frac{3}{4\pi} \kappa_\nu^+ \rho \mathbf{F}_\nu \quad (8)$$

$\nu$ : 振動数,  $\mathbf{F}_\nu$ : 輻射流量,  $J_\nu$ : 平均強度,  $B_\nu$ : プランク函数,  
 $\kappa_\nu$ : 吸収係数,  $\kappa_\nu^+$ : 吸収係数 + 散乱係数

水平平均からのずれについての一次までの式をつくり,  $J_{\nu 1}$  を消去すれば, (バーを省略)

$$\mathbf{F}_{\nu 1} - \frac{1}{3\kappa_\nu^+ \rho} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \operatorname{div} \mathbf{F}_{\nu 1} \right) = - \left( \frac{\kappa_{\nu 1}^+}{\kappa_\nu^+} + \eta \right) \mathbf{F}_\nu - \frac{1}{3\kappa_\nu^+ \rho} \operatorname{grad} \cdot [4\pi B_{\nu 1} + \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \left( \frac{\kappa_{\nu 1}}{\kappa_\nu} + \eta \right) \operatorname{div} \mathbf{F}_\nu] \quad (9)$$

稠要素が光学的に薄い場合はこの式は

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_{\nu 1}^{(thin)} = 4\pi \kappa_\nu \rho B_{\nu 1} + \left( \frac{\kappa_{\nu 1}}{\kappa_\nu} + \eta \right) \operatorname{div} \mathbf{F}_\nu, \quad (10)$$

積分 ( $\nu$  について) して

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_1^{(thin)} = 16\pi \kappa_F B \theta + \left( \frac{\chi_1}{\chi} + \eta \right) \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\chi = \int \kappa_\nu \left( \frac{\partial B_\nu}{\partial T} / \frac{\partial B}{\partial T} \right) d\nu, \quad \frac{\chi_1}{\chi} = \int \frac{\kappa_{\nu 1}}{\kappa_\nu} \left( \frac{\partial F_\nu}{\partial z} / \frac{\partial F}{\partial z} \right) d\nu. \quad (12)$$

光学的に厚い場合は

$$\mathbf{F}_1^{(thick)} = -\frac{16\pi B}{3\kappa_F^+ \rho} \operatorname{grad} \theta - \left( \frac{\chi_1^+}{\chi^+} + \eta - 4\theta \right) \mathbf{F}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\kappa^+} \sim \int \frac{1}{\kappa^+} \left( \frac{\partial \bar{B}_v}{\partial T} / \frac{\partial \bar{B}}{\partial T} \right) dv, \quad \frac{\kappa_1^+}{\kappa^+} = \int \frac{\kappa_1^+}{\kappa^+} \frac{1}{F} dv, \quad (14)$$

(4)の最後の項が必要であるが、これには以上の2つの場合のいずれを(9)の構造を参考にしている。

$$\int \delta \theta \operatorname{div} \mathbf{F}_1 dx dy dz = \int [(1-D) \delta \theta \operatorname{div} \mathbf{F}_1^{(thin)} - D \operatorname{grad} \delta \theta \cdot \mathbf{F}_1^{(thick)}] dx dy dz, \quad (15)$$

$$D = 3\tau_c \tau_c^+ / (1 + 3\tau_c \tau_c^+), \quad \tau_c = \kappa \rho / k, \quad \tau_c^+ = \kappa^+ \rho / k. \quad (16)$$

恒星の対流に対しては一般に(15)は充分な精度をもつと考えられる。

(15)のような取扱いは非灰色モデルを逐次近似で数値的に計算する場合にも用いられる。この場合は $\theta$ ,  $\mathbf{F}_1$ は前の近似の誤差 $\Delta \theta$ ,  $\Delta \mathbf{F}$ を意味することになるが、これ以外に境界条件からくる附加項がついてくる点になるだけで、ほぼ同じ形式となる。

#### §4 乱対流の性質

(2)において、乱対流による圧力及びエネルギー流量が平均の大気構造を定める要素となつていことが示された。前者はガス圧に対する補正となるにすぎないが、後者は活潑な対流層では輻射流量と遙かにしのぐので本質的役割をする。対流エネルギー流量の主要項は  $\overline{W_1 p_w} \approx c_p T \overline{p_w \theta}$  である。主要渦に対して非圧縮性層流対流にかける如く、 $\theta$ と $p_w$ との位相関係と等しいとする。次を用いれば、これは  $c_p T \langle p_w \rangle \langle \theta \rangle$

( $\langle \cdot \rangle$  は数) となるので, (4) によって  $\rho, \theta$  の値を決定する。このとき、 $\rho$  と  $\theta$  の値として  $\langle \rho \rangle$  と  $\langle \theta \rangle$  とを求めることが課題となる。

大気が定常の場合には以上の見地からすると(4)の時間微分を含む項はすべて不要となる。これらの項の和は熱力学の関係式を用いて  $\int dx dy dz C_i(\bar{p}, \bar{T}) \delta X_i \frac{\partial X_i}{\partial t}$  の形に書けるので、 $S$  として時間変化に関連する変分をとらない限り(変化量の間の位相関係を調べるのでない限り)  $\int dx dy dz C_i(\bar{p}, \bar{T}) \frac{1}{2} \frac{\partial (\delta X_i X_i)}{\partial t}$  となり、定常の仮定により消えてしまうからである。したがって問題は定常対流と本質的に同じ取扱いとなる。

(5)(6)(9)を(4)に代入し、状態方程式などにより  $\rho$  と  $S$  を  $\omega, \theta$  で表わせば、(4)は形式的に次の形となる；

$$S\Phi_c = \int dx dy dz \delta X_i J_i(X_j; \bar{p}, \bar{T}) = 0 \quad (17)$$

但し、 $X_i$  は  $\omega, \theta, p_u, p_v, p_w$  を表わし、 $J_i$  は  $x, y, z$  による微分などを含んだ汎関数であるが、特に  $\langle X_j \rangle$  については二次までを含む。 $\delta X_i$  は  $\langle X_i \rangle$  及び波数  $k_j$  に対する任意変分を独立にとつたものを表わし、(17)により変分パラメータ ~~と~~ とつた  $\langle X_i \rangle$  及び  $k_j$  はすべて決定する。

大気を有限の層に分割し、各境界面における  $\langle X_i \rangle, k_j$  を変分パラメータとすれば(中間は折線をつなぐものとする)、(17)は多変数連立代数方程式を与える。これを解けば  $\langle \rho \rangle, \langle \theta \rangle$  が  $\rho$  の関数として求まる。

対流の非局所性は無視すれば局所的なモデルとなる。

この場合(17)から得られるものは従来の混合距離理論となる。

また、 $\langle X \rangle$ の $z$ -依存性を $\langle X \rangle_0 d_L(z)$ のように表わし $\delta \langle X \rangle_0$ の変分を考えると一般的性質が議論できる。その結果、対流渦の代表的大きさは密度が $e$ 倍となる高さ(スケール・ハイト)程度になることなどが示される。

対流の非局所性が考慮できることは特に赤色巨星の表面の安定層への対流のつきぬけが扱える点で重要であると考えられる。スペクトル分析と比較すべきモデル及び内部構造の表面条件などを定める上に影響があるであろう。

## §5 モデル計算法

実際にモデルを計算する場合には、平均モデルを与えるのに対流が入り、対流を定めるのに平均モデルが必要なので、荒いモデルから出発して逐次近似をしなければならぬ。基本式は(2)と(17)であるが、変数を $Y_i = Y_i^{(0)} + \Delta Y_i$ のようにとって(2)と(17)を $\delta(\Delta Y_i)$ の式に変型する。但し $Y_i$ は $\bar{P}, \bar{T}, \langle \rho \rangle, \langle \rho \rangle \chi_{ij}$ などである。更に前節で述べたように有限層に分割し、境界での $\Delta Y_i$ を変分パラメータとして、連立代数方程式を導き、これを計算機で解くことになる。その扱いはヘニエ法と大同小異となる。

