

Jäger-Rejto Approach on Growth Estimates of Generalized Eigenfunctions and Principle of Limiting Absorption

東京都立大理学研究科 望月 清 (Kiyoshi MOCHIZUKI)

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University
Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan

Abstract

In this paper we consider the Schrödinger operators with oscillating long-range potentials. We make an improvement of a result of Jäger and Rejto on the growth estimate of generalized eigenfunctions, and apply it to show the principle of limiting absorption. If the operators are of the form $-\Delta + c \sin b|x|/|x| + V_3(x)$, $V_3(x) = O(|x|^{-1-\delta})$ ($\delta > 0$) as $|x| \rightarrow \infty$, the principle is established for the interval $J \subset \mathbf{R}_+$ satisfying $\text{dist}\{J, b^2/4\} > |bc|/\min\{2, 4\delta\}$. If the operators are of the form $-\Delta + c \sin(\log |x|)/\log |x| + V_3(x)$, $V_3(x) = O(|x|^{-1}\{\log |x|\}^{-1-\delta})$, the principle is established for J satisfying $\inf J > |c|/4\delta$.

1. 序

1943 年 F. Rellich [13] は次の結果を得ている。

定理 R $B^c(R_0) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| > R_0\}$ とし、 $u = u(x) \in C^2(B^c(R_0))$ は

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in B^c(R_0)$$

の解とする。 $\lambda > 0$ で $\text{supp } u \neq \text{compact}$ なら、

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{S(R)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda |u|^2\} dS > 0.$$

ここに $S(R) = \{x; |x| = R\}$, また $r = |x|$.

これと Sommerfeld radiation condition ([16])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} |\partial_r u \mp i\sqrt{\lambda} u|^2 dS = 0$$

を合わせて

定理 S $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を外部領域、 $u \in C^2(\Omega)$ は

$$-\Delta u = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

の解とする。 $\lambda > 0$ で u が radiation condition を満たすなら $u \equiv 0$.

注意 境界条件は Neumann でも Robin でもよい。

これは Green の公式から従う。実際、 $\Omega(r) = \Omega \cap \{|x| < r\}$ とすると

$$0 = \int_{\Omega(r)} \{\bar{u}\Delta u - u\Delta\bar{u}\}dx = \int_{S(r)} \{\bar{u}\partial_r u - u\partial_r\bar{u}\}dS$$

より

$$\int_{S(r)} |\partial_r u \mp i\sqrt{\lambda}u|^2 dS = \int_{S(r)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\}dS$$

が得られる。radiation condition と Rellich の定理から $\text{supp}u = \text{compact}$ であるが u が x について analytic だから $u \equiv 0$ が従う。

定理 S は極限吸収の原理の証明に欠かせない。

Rellich の定理を Schrödinger 作用素の場合に拡張する試みは Povzner ([12]) 等によってなされていた。本格的な結果は次の Kato の定理である ([8])。

定理 K $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を外部領域、 $u \in C^2(\Omega)$ は

$$(1.1) \quad -\Delta u + V(x)u = \lambda u, \quad x \in \Omega$$

の解とする。 $V(x)$, λ が

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r|V(x)| = K \geq 0, \quad \lambda > \frac{K^2}{4}$$

を満たし $\text{supp}u \neq \text{compact}$ なら、 $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{K/\sqrt{\lambda}+\epsilon} \int_{S(r)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\} dS = \infty.$$

注意 $\lambda > K^2$ のときは上の結果は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \int_{S(r)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\} dS = \infty$$

と書け、半直線 (K^2, ∞) での固有値の非存在がわかる。また、 $K = 0$ のときは $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\epsilon \int_{S(r)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\} dS = \infty$$

となる。ここで $\epsilon = 0$ とは出来ず、その意味でこの結果は Rellich の結果より弱い。

Kato の結果はその後 Simon [15], Agmon [1], Eidus [3], Roze [14], Ikebe-Uchiyama [4], Uchiyama [17], Mochizuki [9], Jäger-Rejto [5], Eastham-Kalf [2] 等により、種々の potential に対して拡張された。これらのうち、[17], [9] では多体問題を含む homogeneous potential:

$$(1.2) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \left\{ \gamma^{-1} r \partial_r V(x) + V(x) \right\} \equiv E_\gamma < \infty \quad \text{for some } \gamma \in (0, 2]$$

に対して growth estimate を得ている。

次の結果は Mochizuki-Uchiyama [11] に依る。

定理 MU $u \in C^2(\Omega)$ を (1.1) の解とし、 $V(x)$ が (1.2) を満たすとする。 $\lambda > E_2$ で $\text{supp} u \neq \text{compact}$ なら、 $\lambda > E_\gamma \geq E_2$ なる $\forall \gamma \in (0, 2]$ に対して

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} r^{\gamma/2} \int_{S(r)} \left\{ |\partial_r u|^2 + \lambda |u|^2 \right\} dS > 0.$$

(1.2) を満たす例として von Neumann-Wigner 型 potential

$$(1.3) \quad V(x) = \frac{c \sin br}{r} + V_3(x), \quad c, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

がある。ここに $V_3(x)$ は short-range potential である。この potential に対して上の結果から次が言える。

$$\lambda > E_2 = \frac{|bc|}{2} \quad \text{なら } \lambda \text{ は固有値でない。}$$

一方、Kato の定理を用いれば次が言える。

$$\lambda > K^2 = c^2 \quad \text{なら } \lambda \text{ は固有値でない。}$$

von Neumann-Wigner 型 potential に対して最近の論文 Jäger-Rejto [6] で次の結果が示された。

定理 JR $u \in C^2(\Omega)$ を (1.1) の解とする。 λ が

$$(1.4) \quad \left| \lambda - \frac{b^2}{4} \right| > \frac{|bc|}{2}$$

を満たし、 $\text{supp} u \neq \text{compact}$ なら

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} \left\{ |\partial_r u|^2 + \lambda |u|^2 \right\} dS > 0.$$

この結果は二つの意味で新しい。ひとつは $\lambda = 0$ の近くでの固有値の非存在を主張し得る点で、他は weight $r^{\gamma/2}$ で $\gamma = 0$ と取れており、Rellich の定理の真の拡張になっている点である。

この結果と Kato の定理を合わせると次が言える。

$$|c| < \frac{|b|}{\sqrt{5}+1} \text{ なら正の固有値は存在しない。}$$

実際、このときは $b^2/4 - |bc|/2 > c^2$ が成り立つ。

注意 定理 MU を使うと $|c| < |b|/4$ となり、結果は悪くなる。本来の von Neumann-Wigner potential は $c = 8, b = 2$ であり、このときは $V_3(x)$ を適当にとると $\lambda = 1$ が固有値になる。 $|c|$ が大きいときは定理 MU が固有値の非存在に関する結果としては最良になっている。

一般固有関数の growth estimate は解の或 functional についての微分不等式を構成して証明される。定理 JR の証明も Kato 以来のこの方法に忠実であるが、新しい点は彼等が解の approximate phase を含む functional を採用しているところにある。approximate phase は radiation condition の定義に密接に関わっており、[6] では以前我々 (Mochizuki-Uchiyama [10]) が極限吸収の原理を示すのに用いたものと同じ phase function が使われている。[10] では [6] に類似の functional identity を導いたが、それを直接 growth estimate の証明には使わなかった。ここではこの functional identity を出発点として一般固有関数の growth estimate を証明する。我々の結果は定理 JR の一般化で、証明はずいぶん見易いものになっている。彼等の証明は難解で follow しきれない。

potential があると radiation condition がうまく定義されるとはかぎらず、Rellich 型の定理は直接には極限吸収の原理に結びつかない。しかし、ここでは functional identity が radiation condition に関係して作られているので、極限吸収の原理も同じ λ の範囲で容易に証明できる ([10], Mochizuki [8])。

2. 仮定と結果

$\mathbf{R}^n$ での Schrödinger 作用素 $L = -\Delta + V(x)$ を考える。potential $V(x)$ は実数値で局所 L^2 , 遠方で有界とする。 $n \geq 4$ の場合はこの他に V の singularity の order を制限する Stummel 条件を仮定する。このとき L は定義域 $D(L) = H^2(\mathbf{R}^n)$ をもつ $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の自己共役作用素になる。

$V(x)$ には更に条件をつけるが、そのために関数 $\mu(r)$ を $r > 0$ で正值で

$$\mu(r) = o(r^{-1}) \text{ as } r \rightarrow \infty, \quad \mu(r) \in L^1([R, \infty)) \text{ for } R > 0$$

なる性質を持つものとする。以下では $\liminf_{r \rightarrow \infty} r^2 \mu(r) > 0$ も仮定するが、これでは一般性を失うことはない。

(A1) $V(x)$ は

$$V(x) = V_1(r) + V_2(x) + V_3(x)$$

のように分解される。ここに、 $V_1(r), V_2(x), V_3(x)$ はそれぞれ次の意味での oscillating long-range potential, long-range potential, short range potential である： $r \rightarrow \infty$ で

$$\begin{cases} V_1(r) = O(1), & V_1'(r) = O(r^{-1}), \\ V_1''(r) + aV_1(r) = O(\mu(r)) & \text{for some } a \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r^{-1}V_2(x) &= O(\mu(r)), \quad \nabla V_2(x) = O(\mu(r)), \\ V_3(r) &= O(\mu(r)). \end{aligned}$$

(A2) (A1) の μ に対して $\exists \mu_j = \mu_j(r)$, $j = 1, 2$ で

$$(2.1) \quad \mu(r)^2 \leq \mu_1(r)\mu_2(r), \quad 0 < \mu_1(r) \leq \mu_2(r).$$

更に

$$\varphi_j(r) = \left\{ \int_r^\infty \mu_j(s) ds \right\}^{-1}, \quad j = 1, 2$$

とおくとき、次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \frac{\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)} \leq \frac{1}{r} \quad \text{for } r > R_0 > 0,$$

$$(2.3) \quad E^\pm(\varphi_1) \equiv \limsup_{r \rightarrow \infty} \left[\pm \left\{ \frac{\varphi_1(r)}{2\varphi_1'(r)} V_1'(r) + V_1(r) \right\} \right] < \infty.$$

(A3) $L = -\Delta + V(x)$ は unique continuation property をもつ。

(A1) を満たす potential に対して

$$E_2^\pm = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left[\pm \left\{ \frac{r}{2} V_1'(r) + V_1(r) \right\} \right]$$

とおくと次の定理が成り立つ。

定理 1 (A1) のもとで u を

$$(2.4) \quad -\Delta u + V(x)u = \lambda u, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

の解とする。 λ が

$$(2.5) \quad \lambda > \frac{a}{4} + E_2^+ \quad \text{or} \quad \lambda < \frac{a}{4} - E_2^-$$

を満たし、 $\text{supp } u \neq \text{compact}$ なら

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} \{ |\partial_r u|^2 + |u|^2 \} dS > 0.$$

$|x|$ が大きい x と $\zeta = \lambda \pm i\epsilon$, $\epsilon > 0$, に対して

$$k_\pm(x, \zeta) = -i\sqrt{\zeta - \eta V_1(r) - V_2(x)} + \frac{n-1}{2r} + \frac{-\eta V_1'(r)}{4\{\lambda - \eta V_1(r) -$$

$$\eta = \eta(\zeta) = \frac{4\zeta}{4\zeta - a}$$

とおく。ここに $\sqrt{\cdot}$ は $\operatorname{Im}\sqrt{\cdot} > 0$ なる枝をとっている。 λ が (2.5) を満たすとき、 $|x|$ が十分大きければ $\sqrt{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)} > 0$ ([10], Lemma 8.2) となるから極限

$$k_{\pm}(x, \lambda) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_{\pm}(x, \zeta) = \mp i \sqrt{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)} \\ + \frac{n-1}{2r} + \frac{-\eta(\lambda)V_1'(r)}{4\{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)\}}$$

が存在する。これを用いて radiation condition は次のように定義される。

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} |\partial_r u + k_{\pm}(x, \lambda)u|^2 dS = 0.$$

極限吸収の原理を示すのに (A2), (A3) も使われる。区間 $J \subset \mathbf{R}_+$ を

$$(2.6) \quad \inf J > \frac{a}{4} + \max\{E^+, E^+(\varphi_1)\} \quad \text{or} \quad \sup J < \frac{a}{4} - \max\{E^-, E^-(\varphi_1)\}$$

のようにとり

$$K_{\pm} = \{\zeta = \lambda \pm i\epsilon; \lambda \in J, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}$$

とおく。ここに $\epsilon_0 > 0$ は小さい定数である。次の方程式を考える。

$$(2.7) \quad -\Delta u + V(x)u - \zeta u = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \zeta \in K_{\pm}.$$

下の定理では norm

$$\|f\|_{\xi} = \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \xi(r) |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty \quad \text{for } \xi(r) > 0.$$

をもつ重み付き L^2 -space $L_{\xi}^2 = L_{\xi}^2(\mathbf{R}^n)$ が用いられる。

定理 2 (A1) ~ (A3) を仮定し、 J は (2.6) を満たすとする。Schrödinger 作用素 L の resolvent $R(\zeta) = (L - \zeta)^{-1}$, $\zeta \in K_{\pm}$, は $L_{\mu_1}^2$ から $L_{\mu_2}^2$ への作用素として $K_{\pm}$ の閉包 $\bar{K}_{\pm}$ に連続的に拡張でき、

$$(2.8) \quad \sup_{\zeta \in K_{\pm}} \|R(\zeta)f\|_{\mu_2} \leq C \|f\|_{\mu_1^{-1}}, \quad C = C(K_{\pm}) > 0$$

が成り立つ。さらに $R(\lambda \pm i0)f$ は radiation condition を満たす。

3. 恒等式

u を (2.7) の解とする。実数値関数 $\sigma = \sigma(r)$ に対して $u_{\sigma} = e^{\sigma} u$, $f_{\sigma} = e^{\sigma} f$ とおくと u_{σ} は

$$-\Delta u_{\sigma} + 2\sigma' \tilde{x} \cdot \nabla u_{\sigma} + \left(V - \zeta + \sigma'' + \frac{n-1}{r} \sigma' - \sigma'^2 \right) u_{\sigma} = f_{\sigma}$$

を満たす。更に $\theta_{\sigma\pm} = \nabla u_\sigma + k_\pm(x, \zeta)u_\sigma$ とおくと上式は

$$-\nabla \cdot \theta_{\sigma\pm} + (k_\pm + 2\sigma')\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm} + \left(q_\pm + \sigma'' + \frac{n-1}{r}\sigma' - 2\sigma'k_\pm\right)u_\sigma = f_\sigma$$

と表せる。ここに

$$q_\pm(x, \zeta) = V(x) - \lambda + \partial_r k_\pm(x, \zeta) + \frac{n-1}{r}k_\pm(x, \zeta) - k_\pm(x, \zeta)^2.$$

$k_\pm(x, \zeta)$ はこの $q_\pm(x, \zeta)$ が short-range になるように定めたものである。

$\psi = \psi(r)$, $r > 0$, を滑らかな正値関数とし、上式に $2\psi\tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}$ を乗じ、実部をとって $B(R, t) = \{x; R < |x| < t\}$ で部分積分する。

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\{2\nabla \cdot \theta_{\sigma\pm}(\tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm})\} &= -\operatorname{Re}\nabla \cdot \left\{2\theta_{\sigma\pm}(\tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}) - \tilde{x}|\theta_{\sigma\pm}|^2\right\} \\ &\quad + \left(2\operatorname{Re}k_\pm - \frac{n-1}{r}\right)|\theta_{\sigma\pm}|^2 - 2\operatorname{Re}k_\pm|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2 \\ &\quad + \frac{2}{r}\{|\theta_{\sigma\pm}|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2\} + 2\operatorname{Re}\{(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k_\pm \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}u_\sigma\} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} -2\operatorname{Re}\{\sigma'^2 u_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}\} &= -\operatorname{Re}\nabla \cdot \{\tilde{x}\sigma'^2 |u_\sigma|^2\} \\ &\quad \left\{2\sigma'\sigma'' + \sigma'^2\left(\frac{n-1}{r} - 2\operatorname{Re}k_\pm\right)\right\}|u_\sigma|^2 \end{aligned}$$

に注意して次の等式が得られる。

命題 1 u を (2.7) の解とすると

$$\begin{aligned} \left\{\int_{S(t)} - \int_{S(R)}\right\} \psi \left\{2|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2 - |\theta_{\sigma\pm}|^2 + \sigma'^2 |u_\sigma|^2\right\} dS &= \int_{B(R,t)} \psi \left[\right. \\ &\quad \left(2\operatorname{Re}k_\pm - \frac{\psi'}{\psi} - \frac{n-3}{r}\right)|\theta_{\sigma\pm}|^2 + 2\left(2\sigma' + \frac{\psi'}{\psi} - \frac{1}{r}\right)|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2 \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\{(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k_\pm \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}u_\sigma\} + 2\operatorname{Re}\left\{\left(q_\pm + \sigma'' + \frac{n-1}{r}\sigma' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sigma'k_\pm\right)u_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}\right\} + \left\{2\sigma'\sigma'' + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\psi'}{\psi} - 2\operatorname{Re}k_\pm\right)\sigma'^2\right\}|u_\sigma|^2 \Big] dx \\ &\quad - \int_{B(R,t)} 2\psi \operatorname{Re}\{f_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\sigma\pm}\} dx. \end{aligned}$$

仮定 (A1) から次の補題が示される ([10], Proposition 8.2)。

補題 1 $R_0 > 0$ を十分大きくとると $\exists C_j > 0, j = 1 \sim 5$ で $\forall |x| > R_0, \forall \zeta \in K_{\pm}$ に対して

$$(3.1) \quad |q_{\pm}(x, \zeta)| \leq C_1 \mu(r),$$

$$(3.2) \quad |k_{\pm}(x, \zeta)| \leq C_2, \quad \mp \operatorname{Im} k_{\pm}(x, \zeta) \geq C_3,$$

$$(3.3) \quad |(\nabla - \tilde{x} \partial_r) k_{\pm}(x, \zeta)| \leq C_4 \mu(r), \quad \tilde{x} = x/r,$$

$$(3.4) \quad \left| 2 \operatorname{Re} k_{\pm}(x, \lambda) - \frac{n-1}{r} - \frac{-\eta V_1'(r)}{2(\lambda - \eta V_1(r))} \right| \leq C_5 \mu(r).$$

4. 定理 1 の証明

u を (2.4) の解とする。一般性を失うことなく u は実数値であると仮定してよい。このとき

$$|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2 = (\operatorname{Im} k_{\pm} u_{\sigma})^2 + (\partial_r u_{\sigma} + \operatorname{Re} k_{\pm} u_{\sigma})^2$$

となるので

$$(4.1) \quad |u_{\sigma}| \leq C |\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|$$

が成り立つ。

以下では命題 1 の等式を用いて定理 1 の証明をするが、二つの等式のうち k_+ が関わっている方を用いる。簡単のために $k = k_+, q = q_+, \theta_{\sigma} = \theta_{\sigma+}$ と書く。

次の 2 つの functional を考える。

$$F(r) = \int_{S(r)} (2|\tilde{x} \cdot \theta|^2 - |\theta|^2) dS, \quad \theta = \theta_0 = \nabla u + \tilde{x} k u,$$

$$F_{\sigma, \tau}(r) = \int_{S(r)} \{2|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma}|^2 - |\theta_{\sigma}|^2 + (\sigma'^2 - \tau)|u_{\sigma}|^2\} dS.$$

ここに正値関数 $\sigma = \sigma(r), \tau = \tau(r)$ は後で定める。

[付加条件のもとでの定理 1 の証明] ここでは付加条件

$$(4.2) \quad \exists r_k \rightarrow \infty \text{ such that } F(r_k) > 0$$

のもとで定理 1 を証明する。

命題 1 で $\zeta = \lambda, f = 0, \sigma \equiv 0, \psi \equiv 1$ とおき、両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_{S(t)} \left[\left(2 \operatorname{Re} k - \frac{n-3}{r} \right) |\theta|^2 - \frac{2}{r} |\tilde{x} \cdot \theta|^2 \right]$$

$$+2\operatorname{Re}\{(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k \cdot \bar{\theta}u\} + 2\operatorname{Re}\{qu\tilde{x} \cdot \bar{\theta}\}dS.$$

(3.4) および (3.1), (3.3), (4.1) を用いれば $t > \exists R_1 \geq R_0$ で

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &\geq \int_{S(t)} \left\{ \left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} - C_6\mu \right) (2|\tilde{x} \cdot \theta|^2 - |\theta|^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} + \frac{1}{r} - C_6\mu \right) (|\theta|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta|^2) \right\} dS. \end{aligned}$$

更に t を十分大きくとると条件 (2.5) のもとで右辺第 2 項は非負になり、 $t > \exists R_2 \geq R_1$ で次の不等式が成り立つ。

$$(4.3) \quad \frac{d}{dt}F(t) \geq \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log |\lambda - \eta V_1| - C_6\mu \right) F(t).$$

仮定 (4.2) より $r_k \geq R_2$ ととれるから両辺を (r_k, t) で積分すれば

$$\frac{F(t)}{F(r_k)} \geq \left\{ \frac{\lambda - \eta V_1(t)}{\lambda - \eta V_1(r_k)} \right\}^{1/2} \exp \left\{ -2C_6 \int_{r_k}^{\infty} \mu(r) dr \right\}.$$

これより $F(t)$ が遠方で一様に正となることがわかるが、

$$F(t) \leq \int_{S(t)} |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dS \leq C \int_{S(t)} \{ |\partial_r u|^2 + |u|^2 \} dS$$

なので、定理 1 が証明される。 $\square$

[(4.2) が成り立たない場合の定理 1 の証明] この場合は $F(t)$ が次の条件を満たす。

$$(4.4) \quad F(t) \leq 0 \text{ for } r > \exists R_3 \geq R_2, \quad \operatorname{supp} F \neq \text{compact}.$$

命題 1 で $\psi = r^2$ ととると $\psi'/\psi = 2/r$ であるから

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{S(t)} - \int_{S(R)} \right\} r^2 \left\{ 2|\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - |\theta_\sigma|^2 + \sigma'^2 u_\sigma^2 \right\} dS &= \int_{B(R,t)} r^2 \left[\right. \\ &\quad \left(2\operatorname{Re} k - \frac{n-1}{r} \right) |\theta_\sigma|^2 + \left(4\sigma' + \frac{2}{r} \right) |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\{(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k \cdot \bar{\theta}_\sigma u_\sigma\} + 2\operatorname{Re}\left\{ \left(q + \sigma'' + \frac{n-1}{r}\sigma' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sigma'k \right) u_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_\sigma \right\} + \left\{ 2\sigma'\sigma'' + \left(\frac{n+1}{r} - 2\operatorname{Re} k \right) \sigma'^2 \right\} u_\sigma^2 \Big] dx. \end{aligned}$$

これと恒等式

$$\left\{ \int_{S(t)} - \int_{S(R)} \right\} r^2 \tau u_\sigma^2 dS = \int_{B(R,t)} r^2 \left[2\operatorname{Re}\{ \tau u_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_\sigma \} + \left(\frac{2}{r}\tau + \tau' \right) u_\sigma^2 \right] dx$$

の差をとり、両辺を t で微分する。

$$\begin{aligned} 4\sigma' \{ |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - \operatorname{Re}(ku_\sigma \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_\sigma) \} &= 4\sigma' \{ |\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma + i \operatorname{Im} k u_\sigma|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re} k u_\sigma (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma) - (\operatorname{Im} k)^2 u_\sigma^2 \} \\ &= 4\sigma' \{ (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma)^2 - \operatorname{Re} k u_\sigma (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma) \} \end{aligned}$$

に注意すると、前と同様に、 $t > \exists R_4 \geq R_3$ で

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [t^2 F_{\sigma, \tau}(t)] &\geq \int_{S(t)} r^2 \left[\left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} - C_6 \mu \right) |\theta_\sigma|^2 - \frac{2}{r} |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 \right. \\ &\quad + 4\sigma' (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma)^2 + 2 \left(\sigma'' + \frac{n-1}{r} \sigma' - 2\sigma' \operatorname{Re} k - \tau \right) u_\sigma (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma) \\ &\quad \left. + \left\{ 2\sigma' \sigma'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} - C_5 \mu \right) \sigma'^2 - \frac{2}{r} \tau - \tau' \right\} u_\sigma^2 \right] dS. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} &2 \left(\sigma'' + \frac{n-1}{r} \sigma' - 2\sigma' \operatorname{Re} k \right) u_\sigma (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma) \\ &\leq 2\sigma' (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma)^2 + \frac{1}{2} \sigma' \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} + \frac{n-1}{r} - 2\operatorname{Re} k \right)^2 u_\sigma^2, \\ &-2\tau u_\sigma (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma) \leq 2\sigma' (\partial_r u_\sigma + \operatorname{Re} k u_\sigma)^2 + \frac{1}{2} \sigma'^{-1} \tau^2 u_\sigma^2 \end{aligned}$$

に注意れば、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \frac{d}{dr} [t^2 F_{\sigma, \tau}(t)] &\geq - \left\{ \frac{-\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} - C_6 \mu \right\} t^2 F_{\sigma, \tau}(t) + \int_{S(t)} r^2 \left[\right. \\ &\quad 2 \left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda - \eta V_1)} + \frac{1}{r} - C_6 \mu \right) |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - \left(\frac{1}{2} \sigma'^{-1} \tau^2 + \tau' + \frac{2}{r} \tau \right) u_\sigma^2 \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sigma' \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} + \frac{n-1}{r} - 2\operatorname{Re} k \right)^2 u_\sigma^2 + 2 \left\{ \sigma' \sigma'' + \left(\frac{1}{r} - C_7 \mu \right) \sigma'^2 \right\} u_\sigma^2 \right] dS. \end{aligned}$$

ここに $C_7 = C_5 + C_6$.

さて、定数 $m \geq 1$, $1/3 < \epsilon < 1$ に対して σ, τ を

$$(4.6) \quad \sigma(r) = \frac{m}{1-\epsilon} r^{1-\epsilon}, \quad \tau(r) = r^{-2\epsilon} \log r$$

とおく。 $r \rightarrow \infty$ で

$$\frac{1}{2} \sigma'^{-1} \tau^2 + \tau' + \frac{2}{r} \tau \leq \frac{1}{2m} r^{-3\epsilon} (\log r)^2 + 2r^{-1-2\epsilon} (\log r + 1) = o(r^{-1}),$$

$$\frac{1}{2} \sigma' \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} + \frac{n-1}{r} - 2\operatorname{Re} k \right)^2 = mO(r^{-2-\epsilon}),$$

$$\sigma' \sigma'' + \left(\frac{1}{r} - C_7 \mu \right) \sigma'^2 = \{1 - \epsilon - o(1)\} m^2 r^{-1-2\epsilon}$$

となることに注意する。(4.5) の積分で第 1、3 項は十分大きな t に対して非負であり、第 2、4 項はそれぞれ第 1、3 項に吸収されるから、 $m \geq 1, t > \exists R_5 \geq R_4$ で (4.3) と同様の次の不等式が得られる。

$$\frac{d}{dt} [t^2 F_{\sigma, \tau}(t)] \geq - \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log |\lambda - \eta V_1| - C_8 \mu \right\} t^2 F_{\sigma, \tau}(t).$$

仮定 (4.4) より $\int_{S(R)} u_\sigma^2 dx > 0, \exists R > R_5$. よって $F_{\sigma, \tau}(R) \rightarrow \infty$ as $m \rightarrow \infty$. そこで m を $F_{\sigma, \tau}(R) > 0$ が成り立つようにとって fix し、前の場合と同様な手順をふめば、 $t^2 F_{\sigma, \tau}(t)$ が $t > R$ で一様に正になることがわかる。

さて、 $F_{\sigma, \tau}(t) > 0$ は

$$F_{\sigma, \tau}(t) = e^{2\sigma} \left\{ F(t) + \sigma' \frac{d}{dt} \int_{S(t)} u^2 dS + (2\sigma'^2 - \tau + 2\sigma' \operatorname{Re} \rho') \int_{S(t)} u^2 dS \right\}$$

のように表されるが、仮定 (4.4) より $F(t) \leq 0$. また (4.6) から十分大きな t に対しては右辺の第 3 項も非正となる。よって

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} |u|^2 dS > 0$$

が十分大きな t について成り立ち、定理が証明される。 $\square$

5. 定理 2 の証明

$f \in L^2, \zeta \in K_\pm$ に対して (2.7) の解は $u = R(\zeta)f$ で与えられる。この解について極限吸収の原理 (定理 2) が定理 1 と次の 3 つの補題を用いて証明される。

補題 2 (i) $\forall R > 0$ に対して

$$\frac{\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)} = \mu_1(r) \varphi_1(r) \notin L^1([R, \infty)).$$

(ii) $\exists R_6 \geq R_5, 0 < \exists d < 1$ で $\forall \zeta = \lambda \pm i\epsilon \in K_\pm, \forall r > R_5$ に対して

$$2\operatorname{Re} k_\pm + \frac{(1-d)\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)} - \frac{n-1}{r} \geq 0.$$

証明 (i) $\varphi_1(r) \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$ に注意すると

$$\int_R^r \frac{\varphi_1'(s)}{\varphi_1(s)} ds = \log \left\{ \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(R)} \right\} \rightarrow \infty \text{ as } r \rightarrow \infty$$

より、(i) が示される。

(ii) $\text{Im}\sqrt{\zeta - \eta V_1 - V_2} > 0$ だから $k_{\pm}$ の定義より

$$\begin{aligned} 2\text{Re}k_{\pm} + \frac{(1-d)\varphi'_1}{\varphi_1} - \frac{n-1}{r} &\geq \text{Re}\frac{-\eta V'_1}{2(\zeta - \eta V_1)} + \frac{(1-d)\varphi'_1}{\varphi_1} - C\mu \\ &= \left[\frac{(\lambda - a/4 - V_1)\{\lambda - a/4 - (2\varphi'_1)^{-1}\varphi_1 V'_1 - V_1\} + \epsilon^2}{(\lambda - a/4 - V_1)^2 + \epsilon^2} - d \right] \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - C\mu. \end{aligned}$$

よって (2.6) と補題 2 (i) より d を小さく、 R_5 を大きくとれば (ii) が示される。 $\square$

補題 3 $\zeta \in K_{\pm}$, $f \in L^2_{\mu_1^{-1}}$ とし、 $u = R(\zeta)f$ とする。このとき $\forall R \geq \exists R_6 \geq R_5$ に対して

$$\|\theta_{\pm}\|_{\varphi'_1, B^c(R)}^2 \leq C \left\{ \|u\|_{\mu_2}^2 + \|f\|_{\mu_1^{-1}}^2 \right\}.$$

証明 命題 1 で $\sigma = 0$, $\psi = \chi\varphi_1$, $R > R_5$ とおく。ここに $\chi = \chi(r)$ は $\chi(r) = 0$ ($r < R$), $= 1$ ($r > R+1$) なる滑らかな関数である。

$$\begin{aligned} (5.1) \quad \int_{S(t)} \varphi_1(2|\tilde{x} \cdot \theta_{\pm}|^2 - |\theta_{\pm}|^2) dS &= \int_{B(R,t)} \chi\varphi_1 \left\{ \left(2\text{Re}k_{\pm} + \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - \frac{n-1}{r} \right) \right. \\ &\quad \times |\theta_{\pm}|^2 + 2\left(\frac{1}{r} - \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} \right) (|\theta_{\pm}|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta_{\pm}|^2) + \text{Re}[(q_{\pm}u - f)\tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\pm}] \Big\} dx \\ &\quad + \int_{B(R,R+1)} \chi'\varphi_1(2|\tilde{x} \cdot \theta_{\pm}|^2 - |\theta_{\pm}|^2) dx \end{aligned}$$

が言えるので、補題 2 (ii) と (2.2) から

$$\varphi_1 \left(2\text{Re}k_{\pm} + \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - \frac{n-1}{r} \right) \geq C\varphi'_1, \quad \varphi_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} \right) \geq 0$$

が $r > \exists R_6 \geq R_5$ で成り立つ。 $\varphi_1 = \varphi_1'^{1/2} \mu_1^{-1/2}$ なので (2.1) の初めの不等式から

$$\varphi_1 |q_{\pm}u \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\pm}| \leq C\varphi_1 \mu |u \tilde{x} \cdot \bar{\theta}_{\pm}| \leq C\varphi_1'^{1/2} |\tilde{x} \cdot \theta| \mu_2^{1/2} |u|.$$

更に、方程式 (2.7) の楕円性から

$$\int_{B(R,R+1)} |\theta_{\pm}|^2 dx \leq C \left\{ \|u\|_{\mu_2}^2 + \|f\|_{\mu_1^{-1}}^2 \right\}$$

が従う。

よって (5.1) に Schwarz の不等式を用い、 $t \rightarrow \infty$ とすれば補題が示される。 $\square$

補題 4 $\zeta \in K_{\pm}$, $f \in L^2_{\mu_1^{-1}}$ とすると $\forall R > \exists R_7 \geq R_6$ に対して

$$\|u\|_{\mu_2, B^c(R)}^2 \leq \varphi_2(R)^{-1} \left\{ \|\tilde{x} \cdot \theta_{\pm}\|_{\varphi'_2, B^c(R)}^2 + \|u\|_{\mu_2}^2 + \|f\|_{\mu_2^{-1}}^2 \right\}.$$

証明 Green formula より

$$\operatorname{Im} \int_{B(r)} f \bar{u} dx = -\operatorname{Im} \int_{S(r)} (\partial_r u) \bar{u} dS - \operatorname{Im} \zeta \int_{B(r)} |u|^2 dx.$$

これを变形して

$$\operatorname{Im} \zeta \int_{B(r)} |u|^2 dx - \int_{S(r)} \operatorname{Im} k_{\pm} |u|^2 dS = -\operatorname{Im} \left[\int_{S(r)} \tilde{x} \cdot \theta_{\pm} \bar{u} dS + \int_{B(r)} f \bar{u} dx \right].$$

(3.2) から $\operatorname{Im} \zeta \in K_{\pm}$ と $-\operatorname{Im} k_{\pm}$ は r が大きいとき 同符号で

$$\mp \operatorname{Im} k_{\pm}(x, \zeta) \geq C_3 > 0$$

が成り立つ。そこで $\mu_2(r)$ を乗じ、半直線 (R, ∞) 上で積分することによって次が得られる。

$$C_3 \|u\|_{\mu_2, B^c(R)}^2 \leq \int_{B^c(R)} \mu_2 |\tilde{x} \cdot \theta_{\pm}| |u| dx + \varphi_2(R)^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} |f| |u| dx.$$

$\mu_2^{1/2} = \varphi_2^{-1} \varphi_2'^{1/2}$ に注意して Schwarz の不等式を用いれば補題が示される。 $\square$

[定理 2 の証明] $\{\zeta_k, f_k\} \subset K_{\pm} \times L_{\mu_1}^2$ が $k \rightarrow \infty$ とともに $\{\zeta_0, f_0\}$ に収束するとする。他の場合はやさしいので $\zeta_0 = \lambda \pm i0 \in J$ とする。 $u_k = R(\zeta_k) f_k$ とおく。

$$\varphi_1'(r) \geq \varphi_2'(r), \quad \mu_1(r)^{-1} \geq \mu_2(r)^{-1}$$

が十分大きな r に対して成り立つので、 $\varphi_2(R)^{-1} \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$ に注意すれば Rellich の compactness criterion, 補題 3, 4 より次のことが言える。「 $\{u_k\}$ は、 $L_{\mu_2}^2$ で有界なら、同じ空間で compact になる。」更に補題 3 によって $\{u_k\}$ の全ての集積点 $u_0 \in L_{\mu_2}^2$ は

$$\|\partial_r u_0 + k_{\pm} u_0\|_{\varphi_1', B^c(R)} < \infty.$$

を満たす。

$\{u_k\}$ の有界性 (2.8) を矛盾によって証明することができる。実際、部分列、それをまた $\{u_k\}$ とかく、が存在して $\|u_k\|_{\mu_2} \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$ とする。 $v_k = u_k / \|u_k\|_{\mu_2}$ とおけば $\{v_k\}$ は $L_{\mu_2}^2$ で有界だから compact になる。各集積点 $\{\zeta_0, v_0\}$ は斉次方程式 (2.4) を満たし、更に

$$(5.2) \quad \|v_0\|_{\mu_2} = 1, \quad \|\partial_r v_0 + k_{\pm} v_0\|_{\varphi_1', B^c(R)} < \infty.$$

ここに $k_{\pm} = k_{\pm}(x, \lambda)$ である。補題 2 (i) より $\varphi_1'(r) \notin L^1([R, \infty))$ 。よって第 2 の不等式から

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} |\partial_r v_0 + k_{\pm} v_0|^2 dS = 0$$

が従う。これと定理 1 とから $\operatorname{supp} v_0 = \text{compact}$ となるが、解にたいする unique continuation property (A3) より、 $v_0 \equiv 0$ でなければならない。しかしこれは (5.2) の第 1 式に矛盾する。

このように $\{u_k\}$ は $L^2_{\mu_2}$ で precompact になるが、定理 1 をもう一度用いれば、集積点は唯ひとつ、即ち $\{u_k\}$ それ自体が収束列になっていることがわかり、定理の証明が完結する。□

6. 定理 1, 2 の応用

nonoscillating potential について次の結果が成り立つ。これは良く知られている結果の一般化になっている。

系 1 $V(x) = V_2(x) + V_3(x)$ が (A1) ~ (A3) を $\mu_j(r) = \mu(r)$ として満たしているとする。このとき定理 1 が $\forall \lambda > 0$ に対して成り立ち、定理 2 が $\mu_j = \mu$ として $\forall J \subset \mathbf{R}_+$ に対して成り立つ。

証明 $E_2^\pm = 0$ は明らかである。

$$\varphi(r) = \left\{ \int_r^\infty \mu(s) ds \right\}^{-1}$$

とおけば $(2\varphi')^{-1}\varphi V_2 = (\varphi\mu)^{-1}V_2 \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ より $E^\pm(\varphi) = 0$ も示される。□

以下では oscillating long-range potential についての応用例を述べる。

系 2 V を

$$(6.1) \quad V(x) = \frac{c \sin br}{r} + V_3(x)$$

とする。ただし $V_3(x) = O(r^{-1-\delta})$ as $|x| \rightarrow \infty$ 。このとき定理 1 が (1.4) を満たす $\forall \lambda > 0$ に対して成り立ち、定理 2 が

$$(6.2) \quad \text{dist} \left\{ J, \frac{b^2}{4} \right\} > \frac{1}{\min\{2, 4\delta\}} |bc|$$

を満たす区間 J に対して成り立つ。

証明 $V(x) = c \sin(br)/r + V_3(x)$ が $a = b^2$, $\mu = (1+r)^{-1-\min\{1, \delta\}}$ として (A1) を満たすのは明らかである。また $E_2^\pm = E_2 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \{(1/2)rV_1'(r) + V_1(r)\} = |bc|/2$ だから定理 1 は (1.4) を満たす λ について成り立っている。

次に J を (6.2) を満たすようにとる。このとき正数の組み (α, β) で

$$0 < \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \leq 2 \min\{1, \delta\},$$

$$\text{dist} \left\{ J, \frac{b^2}{4} \right\} > E_{2\beta} = \frac{1}{2\beta} |bc|.$$

を満たすものがとれる。 $\mu_1 = (1+r)^{-1-\beta}$, $\mu_2 = (1+r)^{-1-\alpha}$ とおくと $\varphi_1 = \beta(1+r)^\beta$, $\varphi_2 = \alpha(1+r)^\alpha$, $\varphi_1'/\varphi_1 = \beta/(1+r)$ だから、すぐわかるように (A2) がこれ等の関数について満たされ、 $E^\pm(\varphi_1) = E_{2\beta}$ となる。条件 $\beta \leq 1$ は (2.2) を言うのに使われる。

このように J が (2.6) を満たすことがわかり、定理 2 がこの J に対して成り立つ。□

系 3 $V(x)$ を

$$(6.3) \quad V(x) = \frac{c \sin(\log |x|)}{\log |x|} + V_3(x),$$

$V_3(x) = O(r^{-1}\{\log r\}^{-1-\delta})$ ($\delta > 0$), また

$$(6.4) \quad V(x) = \frac{c \sin(\log \log |x|)}{\log \log |x|} + V_3(x),$$

$V_3(x) = O(|x|^{-1}\{\log |x|\}^{-1}\{\log \log |x|\}^{-1-\delta})$ as $|x| \rightarrow \infty$ のような関数とする。このとき定理 1 が $\forall \lambda > 0$ に対して成り立ち、定理 2 が

$$(6.5) \quad \inf J > \frac{1}{4\delta}|c|.$$

なる J に対して成り立つ。

証明 $V(x) = c \sin(\log r)/\log r + V_3(x)$ を考える。これは $a = 0$, $\mu = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\delta}$ として (A1) を満たす。更に $E_2^\pm = 0$ だから定理 1 は $\forall \lambda > 0$ に対して成り立つ。

次に J が (6.5) を満たすとする。このときは正数の組 (α, β) で

$$0 < \alpha \leq \beta, \quad \alpha + \beta \leq 2\delta,$$

$$\inf J > E_{2\beta} = \frac{1}{2\beta}|c|$$

を満たすものがとれる。 $\mu_1 = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\beta}$, $\mu_2 = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\alpha}$ とおく。 $\varphi_1 = \beta\{\log(1+r)\}^\beta$, $\varphi_2 = \alpha\{\log(1+r)\}^\alpha$, $\varphi'_1/\varphi_1 = \beta/(1+r)\log(1+r)$ なので、(A2) がこれ等の関数について満たされ、 $E^\pm(\varphi_1) = (1/2\beta)|c|$ となる。ここでは $\varphi'_1(r)/\varphi(r) = o(r^{-1})$ なので $\beta \leq 1$ という制限は必要としない。

このように J が (2.6) を満たすことがわかり、定理 2 がこの J について成り立つ。□

注意 系 3 では関数 $q = q(x, \zeta)$ が系 2 十分な減衰度 $O(r^{-1-\delta})$ を持っていないので $\mu = (1+r)^{-1-\delta}$ とすることは出来ない。

注意 (6.3) で $V_3(x) = O(r^{-1-\delta})$, (6.4) で $V_3(x) = O(r^{-1}\{\log r\}^{-1-\delta})$ なら条件 (6.5) は $\forall J \subset \mathbf{R}_+$ で置き換えることができる ([10], Example I-2)。

REFERENCES

- [1] S. Agmon, *Lower bounds of solutions of Schrödinger operators*, J. d'Anal. Math. **23** (1970), 1-25.
- [2] M. S. Eastham and H. Kalf, *Schrödinger type operators with continuous spectra*, Note in Mathematics **65**, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1982.
- [3] D. M. Eidus, *The principle of limiting amplitude*, Uspekhi Math. Nauk **24** (1969), 91-156 (Russian Math. Surveys, **24** (1969), 97-167).
- [4] T. Ikebe and J. Uchiyama, *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 425-448.
- [5] W. Jäger and P. Rejto, *Limiting absorption principle for some Schrödinger operators with exploding potentials ii*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 169-194.
- [6] W. Jäger and P. Rejto, *On a theorem of Mochizuki and Uchiyama about oscillating long range potentials*, preprint 1999.
- [7] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 403-425.
- [8] K. Mochizuki, *Growth properties of solutions of second order elliptic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 351-373.
- [9] K. Mochizuki, *Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain*, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring 1972.
- [10] K. Mochizuki and J. Uchiyama, *Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrödinger operators with "oscillating" long range potentials I*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 377-408.
- [11] K. Mochizuki and J. Uchiyama, *On eigenvalues in continuum of 2-body or many-body Schrödinger operators*, Nagoya Math. J. **70** (1978), 125-141.
- [12] A. Ya. Povzner, *On the expansions of arbitrary functions in terms of the eigenfunctions of the operator $-\Delta u + cu$* , Math. USSR Sb. **32** (1953), 109-156.
- [13] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **53** (1943), 57-65.
- [14] S. N. Roze, *On the spectrum of an elliptic operator of second order*, Math. USSR Sb. **9** (1969), 183-197.
- [15] B. Simon, *On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1967), 531-538.
- [16] A. Sommerfeld, *Die Greensche Funktion der Schwingungs gleichung*, Jahresber. Deutch. Math.-Verein. **21** (1912), 308-358.
- [17] J. Uchiyama, *Lower boundes of growth order of solutions of Schrödinger equations with homogeneous potentials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 425-444.