

Knots の Enumeration の話題から

神戸大 理学部 中西 康剛

結び目の不変量として、Alexander 不変量は良く知られているが、この稿では Alexander 多項式に反映しない部分から少し述べたい。

3次元球面 S^3 に埋められた結び目 K の補空間を X . X の無限巡回被覆空間を $\tilde{X}_\infty$ で示すことにする. $\tilde{X}_\infty$ の被覆変換群の生成元を t として、自然に $H_1(\tilde{X}_\infty)$ に、 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群の構造がはいる。

この時、 $H_1(\tilde{X}_\infty)$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群としての表現行列を Alexander 行列と呼ぶ。

定義 . 結び目 K の正方 Alexander 行列のなかで、その次数が最小のものを、 K の 極小 Alexander 行列 と呼ぶことにする。そのひとつを $M_K(t)$ で、また、その次数を $m(K)$ で示すことにする。

但し、 $M_K(t) \sim (1)$ の時は、 $m(K) = 1$ とする。

ここで、 $\sim$ は 表現行列の間の同値関係を示している。

§1. まず、 $m(K)$ について、bridge index $b(K)$,
unknotting number $u(K)$ 、minimal genus $g(K)$ との間に、
次の不等式が成り立つ。

命題 1.1 (1) $b(K) - 1 \geq m(K)$

(2) $u(K) \geq m(K)$

(3) $2 \cdot g(K) \geq m(K)$

証. (1) Foxの free derivative [3] により、 $\pi_1(X)$ の生成元の数より 1 小さい次数の Alexander 行列が得られる。

故に、 $b(K)$ でなくとも、生成元の最小数でも成立する。

(2) surgical method [4, 15] により 次数 $u(K)$ の Alexander 行列が得られる。

(3) 次数 $2 \cdot g(K)$ の Seifert 行列 V が存在し、 $V - t \cdot V^T$ は、Alexander 行列である。

例. pretzel knot K of type $(a_1, \dots, a_{2n+1})$ ここで、
 $\exists p; \text{odd}, \frac{a_i-1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ である時、 $m(K) = 2n$ となる。
($\neq \pm 1$)

命題 1.1 より $b(K) \geq 2n+1$ であり、逆に、投影図より明らかに、 $b(K) \leq 2n+1$ 。故に $b(K) = 2n+1$ 。ここで、 $\{a_i\}$ のうち、 n 個が $+3$ ($n+1$ 個が -3 (又はその逆) の時、投影図より、 $u(K) \leq 2n$ であり、また命題 1.1 より $u(K) \geq 2n$ 。故に、

$u(K) = 2n$ 。これは、次の問題の特殊な場合の答えである。

問題. pretzel link L of type $(a_1, \dots, a_n)$ に対して、 $b(L) = \#\{a_i \mid |a_i| \neq 1\}$ が成り立つか。

なお、 $\exists i \neq j$ に対して $a_i, a_j; \text{even}$ の時は、次の理由で成り立つ。 L は、 $\#\{a_i \mid a_i; \text{even}\}$ の components を有し、各 component は、その component に属する strands のうち、 odd なもの (奇数) の個数と同数個の 2-bridged knots の composite になっていることから、 $b(L) \geq \#\{a_i \mid |a_i| \neq 1\}$ が言え、また、投影図より、 $b(L) \leq \#\{a_i \mid |a_i| \neq 1\}$ は明らかである。

(なお、例にあげた knot は prime である。金信[5])

ところで、リボン結び目 R に対して、これを単純な絡み輪にするのに必要な fissions の最小数を $r(R)$ で示すことにすると、 R の標準的な投影図で、 $r(R)$ の帯を有するのがある。

問題. リボン結び目 R の標準的な投影図において、帯の交叉の上下の入れ替えは、Alexander 不変量 (経 $m(R)$) を変えないか。

これが、肯定的に解決されるなら、次の不等式が成り立つ。

問題. $2 \cdot r(R) \geq m(R)$?

次に、 $M_K(t)$ の次数以外の性質を考える。

定義. $M_K(t)$ が splittable とは、ある

正方行列 A, B 及び単純行列 O に対し、 $M_K(t) \sim \begin{pmatrix} A & O^T \\ O & B \end{pmatrix}$ が

成り立つことである。但し、 $\begin{pmatrix} A & O \\ 0 & B \end{pmatrix}^T$ の次数は $m(K)$ とする。

§2. enumerationの話題のひとつに、primeか否かの判定法があるが、以下、 $M_K(t)$ を用いて示そう。

定義 絡み輪 (又は結び目) L が composite とは、次の条件を満足する 2次元球面 S^2 が S^3 にとれることである。 $S^3 - S^2$ の components を B_1, B_2 で、 $L \cap B_i$ を L_i で示す時、 (B_i, L_i) が $(B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ と同相でない。

L が prime とは、compositeでない時をいう。

注意 橋爪[4]では、prime の条件では、non-separableをつけているが、ここでは仮定しない。すなわち 2-components の trivial link も prime と取扱う。

この節では、次の記号を用いる。

$K(p, q)$: normal form (p, q) の 2-bridge 結び目

$\Delta_K(t)$: K の Alexander 多項式

D_p : p 次の 2面体群

Fox の free derivativeより、次の命題を得る。

命題 2.1 $b(K) = 2$ ならば $m(K) = 1$, $M_K(t) \sim (\Delta_K(t))$

また、自然数 c_i 、整数 L, N が存在して、 $\Delta_K(t) = \sum_{i=L}^N (-1)^i c_i t^i$ 。

($m(K) = 1$ は $\Delta_K(t) \neq 1$ を示している。)

composite $K = K_1 \# K_2$ に対して同様に計算して次を得る。

命題 2.2 (1) $M_K(t) \sim \begin{pmatrix} M_{K_1}(t) & 0 \\ 0 & M_{K_2}(t) \end{pmatrix}.$

(2) $m(K) \leq m(K_1) + m(K_2).$

注意. $m(K(3,1)) = m(K(7,2)) = 1$ だが、

$m(K(3,1) \# K(7,2)) = 1$ であり、(2)の等号は必ずしも成立しない。

Schubert[16]により次の事実が良く知られている。

命題 2.3 $b(K_1 \# K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1.$

故に、

命題 2.4 $b(K) = 3$ かつ K が composite ならば、

$K(p,q)$ と $K(r,s)$ が存在して、 $K = K(p,q) \# K(r,s)$ である。

一般に 2-bridge結び目の composite に対して、次の命題が成立する。

命題 2.5 $K = \# K(p_i, q_i)$, m : ある meridian の class,
 $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X) / \langle m; m^2=1 \rangle (= \bigast_{Z_2} D_{p_i}) \xrightarrow{h^*} D_p.$

$h: i \mapsto \begin{cases} p_i & (h^*(D_{p_i}) = Z_2 \text{ の時}) \\ 0 & (h^*(D_{p_i}) = D_p \text{ の時}) \end{cases}$ と定め、

$D_p M(K)$ を $\text{Ker } \varphi$ に対応する $X (= S^3 - K)$ の被覆空間とすると、

$H_1(D_p M(K)) \cong Z \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (\oplus Z_{h(i)}) \right).$ 但し、 $Z_p = Z/pZ$ 。

以上の議論より、次の命題を得る。

命題 2.6 結び目 K は、次の条件のいずれかを満たせば prime である。

(1) $b(K) = 1, 3, 4$ かつ $m(K) = 0$.

(2) $b(K) - m(K) = 1$ かつ $M_K(t)$ が non-splittable .

(3) $b(K) = 3$ かつ $m(K) \leq 2$ かつ $M_K(t) \sim \begin{pmatrix} 4_{K_1}(t) & 0 \\ 0 & 4_{K_2}(t) \end{pmatrix}$

となるような $K_i = K(p_i, q_i)$ ($i=1, 2$) が存在しない。」

(4) $b(K) = 3$ かつ $m(K) \leq 2$ かつ $M_K(t) \sim \begin{pmatrix} 4_{K_1}(t) & 0 \\ 0 & 4_{K_2}(t) \end{pmatrix}$

となるような $K_i = K(p_i, q_i)$ ($i=1, 2$) の対に対して、

$\{H_1(D_p M(K))\} \neq \{H_1(D_p M(K_1 \# K_2))\}$ である。」

ここで、 $D_p M(K)$ は、 $X (=S^3 - K)$ の D_p -被覆空間を示す。

ところで、次の事実は、容易に確かめられる。

命題 2.7 結び目の表において、交叉数が10以下のものは、高々 3-bridge である。

このことから、交叉数が10以下の結び目に対し、命題 2.6 を次のように適用する。

(2) $0_1 \sim 7_7, 8_1 \sim 4, 6 \sim 9, 11 \sim 14, 9_1 \sim 15, 17 \sim 21, 23, 26, 27, 31, 10_{1-45}$

(4) $10_{67, 98, 114, 123, 159}$

(3) その他

定理 2.8 結び目の表において、交叉数が10以下のものは、すべて prime である。

付記 結び目が prime か否かの判定法について、筆者の知る所は次の通りである。

- (1) 2-bridgeであること (Schubert [16])
- (2) 非自明な中心化群を結び目の群が有すること(?)
- (3) 交叉数が9以下のものについて (岡村 [9])
- (4) pretzel 結び目について (金信 [5])
- (5) $H_1(D_p M(K))$ の比較から (Perko [10, 11, 12])

なお、Perko は、交叉数が11以下の表中の結び目が prime であること、Conway [2] の表に、重複や脱落のあることに、言及している。

§3. 結び目の primality の判定法を知ることにより、次のようにして、絡み輪の primality が判定できる。

μ -components の絡み輪 L の各 component を $K_i (1 \leq i \leq \mu)$ で示すことにする。

命題 3.1 各 K_i が単純な結び目で、かつ、各 $L - K_i$ が non-separable の時、 L は prime である。

命題 3.2 $\mu = 2$ であり、 K_1 が単純な結び目、 K_2 が非単純な結び目である時、 (S^3, K_2) に対して、 K_1 に沿って Dehn surgery を施した結果を (S^3, K^*) で書くとする。

K^* が composite summand として、 K_2 の composite summand

を含まないならば、 L は prime である。

命題 3.3 $\mu = 3$ であり、 L が non-separable、各 K_i が単純な結び目である時、少なくとも 2μ の i に対して、 $L - K_i$ が、単純な絡み輪であれば、 L は prime である。

以上、定義より、自明なので、証明は略すが、これを適用して、次を得る。

定理 3.4 絡み輪の表において、交叉数が 9 以下のものは、すべて、prime である。

付記. 表は、主として、[2],[15]を用いたが、他にも、[1],[6,7,8],[13],[17,18,19]が良く知られている。

参考文献

- [1] J. W. Alexander & G. B. Briggs: 'On types of knotted curves'
Ann. of Math. 28 (1926-27) 562-586
- [2] J. H. Conway: 'An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties' 'Computational Problems in abstract algebra' Proc. Conf. Oxford 1967
- [3] R. H. Crowell & R. H. Fox: 'An Introduction to Knot Theory'
Ginn and Co., Boston 1962

- [4] Y. Hashizume: 'On the uniqueness of the decomposition of a link' *Osaka Math. J.* 10 & 11 (1958, 59)
- [5] T. Kanenobu: 'On pretzel links' 本講究録
- [6] C.N. Little: 'On knots, with a census to order 10' *Trans. Conn. Acad. Sci.* 18 (1885) 374-378
- [7] C.N. Little: 'Alternate $\pm$ knots of order 11' *Trans. Roy. Soc. Edin.* 36 (1890) 253-255
- [8] C.N. Little: 'Non-alternate $\pm$ knots' *Trans. Roy. Soc. Edin.* 39 (1900) 771-778
- [9] M. Okamura: 'On a group theoretical approach to a 2-bridge knot' *Kwansai Gakuin Master Thesis*
- [10] K.A. Perko, Jr: 'A weak 2-bridged knots with at most three bridges is prime' *Notices A.M.S.* 26 (1978) A-648
- [11] K.A. Perko, Jr: 'On 10-crossing knots' *to appear*
- [12] K.A. Perko, Jr: 'Invariants of 11-crossing knots' *to appear*
- [13] K. Reidemeister: 'Knotentheorie' (reprint) Chelsea, New York 1948
- [14] D. Rolfsen: 'A surgical view of Alexander's polynomial' 'Geometric Topology' Lecture Notes in Math. #438, Springer-Verlag 1974 415-423

- [15] D. Rolfsen: "Knots and Links" Publish or Perish Inc. 1976
- [16] H. Schubert: 'Über eine numerische Knoteninvariante'
Math. Z. 61 (1954) 245-288
- [17] P. G. Tait: 'On knots I' Tait's Scientific Papers I.
 C.U.P., London 1898 273-343
- [18] P. G. Tait: 'On knots II' 同上
- [19] P. G. Tait: 'On knots III' 同上

付録 交叉数が10以下の表中の結び目について、 $m(K) \geq 2$

のものに対して、 $M_K(t)$ を以下述べる。

但し、記号 '?' の付いたものは、 $m(K) = 1$ かも知れない。

また、記号 'N' は non-splittable を示している。

$$8_{18} \quad \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & 0 \\ 0 & t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \end{pmatrix}$$

$$9_{35} \quad \begin{pmatrix} 3t - 3 & -2t + 1 \\ -t + 2 & 3t - 3 \end{pmatrix} \quad N$$

$$9_{37} \quad \begin{pmatrix} 2t - 1 & 0 \\ 0 & t^3 - 5t^2 + 7t - 2 \end{pmatrix}$$

$$9_{38} \quad \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & t + 1 \\ 0 & 5t^2 - 9t + 5 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$9_{40} \quad \begin{pmatrix} t^2 - 3t + 1 & 0 \\ 0 & t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll}
q_{41} & \begin{pmatrix} 3t^2 - 3t + 1 & t^2 - 1 \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^2 - 3t + 3 \end{pmatrix} & N \\
q_{46} & \begin{pmatrix} & t - 2 \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} & \\
q_{47} & \begin{pmatrix} t^2 - 1 & \\ t^2 - 2t & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5t - 4 \\ t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix} & N \\
q_{48} & \begin{pmatrix} 3t^2 - 4t + 2 & \\ t^2 - 1 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} & N \\
q_{49} & \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 2 & \\ t^2 - 1 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ -2t^2 + 2t - 1 \end{pmatrix} & N \\
10_{61} & \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 2t^4 - 3t^3 + t^2 - 3t + 2 \end{pmatrix} & N \\
10_{63} & \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 5t^2 - 9t + 5 \end{pmatrix} & N \\
10_{69} & \begin{pmatrix} t^2 + t - 1 & \\ 2t^2 - 2t + 1 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3t^3 - 9t^2 + 5t - 1 \\ t^4 - 2t^3 \end{pmatrix} & ? \\
10_{74} & \begin{pmatrix} & t - 2 \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 4t^3 - 8t^2 + 7t - 2 \end{pmatrix} & \\
10_{75} & \begin{pmatrix} t^3 - 3t^2 + 4t - 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ t^3 - 4t^2 + 3t - 1 \end{pmatrix} & N \\
10_{98} & \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2t^4 - 7t^3 + 9t^2 - 7t + 2 \end{pmatrix} & \\
10_{99} & \begin{pmatrix} t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1 \end{pmatrix} & \\
10_{101} & \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & \\ & -2t + 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t - 3 \\ 7t^2 - 14t + 20 \end{pmatrix} & ?
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
10_{103} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - 2t + 2 & 0 \\ 0 & 2t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 3t + 1 \end{array} \right) \\
10_{115} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - t + 1 & 2t \\ 2t - 2 & t^4 - 8t^3 + 17t^2 - 12t + 1 \end{array} \right) \quad N \\
10_{122} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - 3t + 1 & 3 \\ 0 & 2t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 2 \end{array} \right) \quad N \\
10_{123} & \left(\begin{array}{cc} t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & 0 \\ 0 & t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \end{array} \right) \\
10_{140} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - t + 1 & 2 \\ 0 & t^2 - t + 1 \end{array} \right) \quad N \\
10_{142} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - t + 1 & 2 \\ 0 & 2t^4 - t^3 - t^2 - t + 2 \end{array} \right) \quad N \\
10_{144} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - t + 1 & 2 \\ 0 & 3t^2 - 7t + 3 \end{array} \right) \quad N \\
10_{155} & \left(\begin{array}{cc} t^3 - 2t^2 + t - 1 & 0 \\ 0 & t^3 - t^2 + 2t - 1 \end{array} \right) \\
10_{157} & \left(\begin{array}{cc} t^3 - 2t^2 + 3t - 1 & t^4 - 3t^3 + 3t^2 \\ t^2 - 1 & 3t^2 - 3t + 1 \end{array} \right) \quad N \\
10_{160} & \left(\begin{array}{cc} t^3 + t^2 - 1 & t^3 + t \\ 3t^2 - 3t + 1 & t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \end{array} \right) \quad N \\
10_{164} & \left(\begin{array}{cc} t^2 - t + 1 & 0 \\ 0 & t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 4t + 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

π