

## Fourier 解析における Martingales

山形大 工 渡利千波  
(Chinami Watari)

§ 1. 序. Martingales の理論の歴史は, Fourier 解析の歴史に比べてはるかに浅く, Fourier 解析をモデルとしながら発展してきた一面をもっている。他方, 出発点においては完全に Fourier 解析に所属する結果と見られつつあるものが, 実は Martingale 論に所属すると見ると別格な着たものがある。ここには, この種の結果の例として, 古典的な 2 つの定理

I. Paley による Walsh-Fourier 級数の分解定理

II.  $L^1$ -関数の Calderon-Zygmund 分解

について述べる。この両者の関係は, いかゆき「Fourier 解析における実関数級数法」の整備される過程で明らかになり, また, Martingale 理論の立場から「明示的に」論じられる文献はあまり見当たらないようにある。あるのは, すでに空論のような存在に感じられるものがある。筆者にはまだよくないと思われた。

§ 2. Paley の分解定理. R. E. A. C. Paley は, J. E. Littlewood と共同で, いかゆき Littlewood-Paley 理論を建設するのだから, Walsh 関数系に関する Fourier 級数論

(以下 WFS の理論とす) の  $L^p$ -theory ( $p > 1$ ) を作る。  
 これを紹介するには、技術的には必要だが、Walsh 関数の定義から始めなければならぬ。

Rademacher 関数系  $\{\phi_n(x)\}$   $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \quad \phi_0(x+1) = \phi_0(x)$$

$$\phi_n(x) = \phi_0(2^n x) \quad [0, 1) \text{ 上の}$$

に定義される関数系を"。これは、正規直交系であるが完備ではない。この直交性が、確率論に" 独立性に起因していることは注目に値する。

Paley の定義によれば Walsh 関数系  $\{\psi_n(x)\}$   $n = 0, 1, 2, \dots$  は次のようになる。

$$\psi_0(x) \equiv 1$$

$n \geq 1$  に対しては、その 2 進法展開を考慮して

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_r} \quad n_1 > n_2 > \dots > n_r \geq 0$$

と表すとき

$$\psi_n(x) = \phi_{n_1}(x) \phi_{n_2}(x) \dots \phi_{n_r}(x).$$

$\{\psi_n(x)\}$  の  $\pm 1$  と" 値のみをとり正規直交系であることは容易に見られる。  $f \in L^1(0, 1)$  を

$$c_n = \int_0^1 f(t) \psi_n(t) dt \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

と Fourier 展開すると, その部分和  $S_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu(x)$  は

$$S_n(x) = \int_0^1 f(t) D_n(x, t) dt \quad D_n(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(x) \psi_\nu(t)$$

と与えられる. とくに  $n = 2^m$  に対しては

$$D_{2^m}(x, t) = \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \phi_j(x) \phi_j(t)) = \begin{cases} 2^m & [0, 2^{-m}) \\ 0 & [2^{-m}, 1) \end{cases}$$

が成立するから,  $S_{2^m}(x) \rightarrow f(x)$  a.e. であり,  $\{\psi_n\}$  は完備な正規直交系である.

† から  $S_{2^m}$  を作る操作は, 条件付き期待値を作ることに他ならず,  $\{S_{2^m}\}$  は Martingale をなしている. 今回の目に見れば, Martingale 論との関係が, 出発点におくことに認められることになる.

さて, Paley の分解定理は次のように述べられる.

定理 1. ある  $p > 1$  に対して  $f \in L^p(0, 1)$  とする.

$$S_{2^{m+1}}(x) - S_{2^m}(x) = \delta_m(x) \quad \text{とおくとき}$$

$$\Delta(x) = \left( |c_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |\delta_m(x)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\Delta^*(x) = c_0 \phi_0(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\theta) \delta_m(x)$$

は, いろいろ  $f(x)$  と「ほぼ大なり小なり等しい」つまり

$$(1) \quad \int_0^1 \Delta(x)^p dx \leq A_p \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq A_p \int_0^1 \Delta(x)^p dx$$

$$(2) \quad \int_0^1 |\Delta^*(x)|^p dx \leq A_p \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq A_p \int_0^1 |\Delta^*(x)|^p dx$$

こゝで  $A_p$  は  $p$  に対して定まり  $f$  は無関係な定数であるが、場所によらず異なると外である。

この定理を証明するに当り、Paley は  $p = 2k$  の場合には  $\Delta(x)^{2k}$  の積分を直接計算して (1) の左半分を出し、Khintchine の不等式 (2) に移り、M. Riesz の補間定理を用いて一般の  $p \geq 2$  の場合の左半分を出し、双対性 (2) の右半分を出し、Khintchine の不等式 (1) の右半分を出し、という手順をとる。こゝでは、Marcinkiewicz の補間定理を利用する。

第1段  $p = 2$  のとき。Fourier 解析の立場では Bessel の不等式なると Parseval の等式であり、Martingale の立場では Martingale difference の収束の直交性による。

第2段  $p = 1$  のとき。この場合には、定理の結論自体は成立しないが、その代用品とせよ「弱評価」を得る。この評価のために、 $\Pi$  の Calderon-Zygmund 分解が有効であるが、後述するところから、結果は

$$(3) \quad \text{meas} \{ x : \Delta(x) > \lambda \} \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|_1 \quad (\Delta^* \text{ も同様})$$

となる。

第3段 (Marcinkiewicz の補間定理の特殊な形)

「 $T$  が、可積分関数をも可測関数にうつす作用素で、

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

$$|T(cf)(x)| = |c| |Tf(x)|$$

$$\|Tf\|_2 \leq A \|f\|_2 \quad \text{meas}\{x: |(Tf)(x)| > y\} \leq \frac{A}{y} \|f\|_1$$

をまたいふことは、 $1 < p \leq 2$  に対して 定数  $A_p$  が定まり

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

とくに、(1), (2) の左半分は、 $1 < p \leq 2$  に対して成立する。

第4段 (Khinchine の不等式)  $0 < p < \infty$  に対して

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2\right)^{p/2} \leq A_p \int_0^1 \left|\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(\theta)\right|^p d\theta \leq A_p \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2\right)^{p/2}$$

通常は  $p$  を偶数として中央項を展開して証明されるが、

第2段を仮定すれば、次のような証明も可能である。収束性

に関する煩雑さを避けるため、有限和と考える論ずる。

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^N c_m \phi_m(\theta) \quad \text{とすると} \quad \Delta(\theta) = \left(\sum_{m=0}^N |c_m|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$$

である。これは定数(正と考える)だから  $y < \|f\|_2$

に対して (たとえば  $y = \frac{3}{4} \|f\|_2$  とせよ)

$$1 = \text{meas}\{\theta: \Delta(\theta) > y\} \leq 4 \|f\|_1 / \|f\|_2$$

つまり  $\|f\|_2 \leq 4 \|f\|_1$  である。  $p < 2$  を2に近

くと、  $\alpha = \frac{2}{p} - 1$ ,  $\beta = 2 - \frac{2}{p}$  とすると  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$

$\alpha + \beta = 1$  であり  $(\beta p' = \beta \cdot \frac{p}{p-1} = 2 \text{ に対して})$

$$\int_0^1 |f(\theta)| d\theta \leq \left(\int_0^1 |f(\theta)|^{\alpha p} d\theta\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f(\theta)|^{\beta p'} d\theta\right)^{1/p'}$$

から  $\left(\sum_{m=0}^N |c_m|^2\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \leq 4 \left(\int_0^1 |f(\theta)|^{2-p} d\theta\right)^{1/p}$  である。

これが左半分である。右半分は Walsh 多項式が  $L^p$  に稠密なことを用いて, duality を得られる。

第5段 Paley の定理の (1), (2) は同じである。

$\delta_m(x)$  を  $\phi_m(0)$  の係数と見て, Khintchine の不等式による。

第6段 (2) の左半分は,  $1 < p < \infty$  に対し成立する。

第3段と, duality による。

第7段 (2) の右半分が  $1 < p < \infty$  に対し成立する。

有限和の場合を考慮すれば十分である。 $\Delta^*(x)$  に,  $\phi$  一度  $\phi$  から  $\Delta^*$  を作り, 操作を繰り返して  $\phi(x)$  に戻ることから左半に帰着する。

これで, 第2段を仮定しただけで, Paley の定理の証明が一段落した。

### §3. Calderon-Zygmund 分解

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間とし,  $\mathcal{F}$  は atomic  $\sigma$ -field の増加列  $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,2,\dots}$  によつて与えられる。  $\{\mathcal{F}_n\}$  は, 次の条件を意味する "regular" であるを仮定する。 ( $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ )

$$\exists C > 0: A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{F}_{n-1} \text{ atomic } A \subset B$$

$$\Rightarrow P(B) \leq C P(A)$$

典型的な例として,  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\mathcal{F}$  は Borel sets 全体,  $\mathcal{F}_n$  は  $\Omega$  を逐次二分して得られる分割から生成される。

$\sigma$ -field を考えよう。  $\Omega$  と  $\mathbb{R}^d$  の単位直方体と  
と、2つの同型である。  $C = 2^d$  とおこう。

定理2 (Calderon - Zygmund 分解)

$f \in L^1$  と  $\gamma > \|f\|_1$  を与えよとき、  $f$  は次のように分  
解できる。

$$(i) \quad f = g + b \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} b_{ij}$$

(ii)  $b_{ij}$  は  $\mathcal{F}_i$ -atom  $A_{ij}$  の外では 0 である。

$$\gamma \sum_{i,j} P(A_{ij}) \leq \|f\|_1$$

$$(iii) \quad \sum_{i,j} \|b_{ij}\|_1 \leq 2\|f\|_1$$

$$(iv) \quad E(b_{ij}) = \int_{A_{ij}} b_{ij} dP = 0$$

$$(v) \quad \|g\|_1 \leq \|f\|_1$$

$$(vi) \quad \|g\|_{\infty} \leq C\gamma \quad (C \text{ は "regularity constant"})$$

証明 Calderon - Zygmund の原証明は、次のように読み通  
すことが出来る。

$h_n = E[|f| | \mathcal{F}_n]$  とおくと、Martingale  $\{h_n\}$  を  
作る。

$\tau = \inf\{n : h_n > \gamma\}$  とおくと  $\tau$  は 1, 2 の  
stopping time である (すなわち、 $(\tau=n)$  と"j 事象は  $\mathcal{F}_n$  可測  
である" と"j 事象の、すべての  $n$  に対して成り立つ)。

$$\mathcal{F}_{\tau} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau=n) \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}$$

は  $\mathcal{F}$  の sub- $\sigma$ -field である。  $\tau < \infty$  は  $(\tau=n)$

この事実 (もちろん  $\mathcal{F}_\infty$  可測である)  $\mathcal{F}_\tau$  可測である。

補題  $A \in \mathcal{F}_\tau \cup \mathcal{F}_\infty$  ならば  $A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\infty$

実際、示すべきことは 2, a), b)

a)  $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_\tau$  ( $\mathcal{F}_\tau$  の定義の一部)

b)  $A \in \mathcal{F}_\infty \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_\infty$

b) の結論は  $\{A \cap (\tau = n)\} \cap (\tau = k) \in \mathcal{F}_k$  ( $\forall k$ ) により成り立つ。  $n = k$  の場合は自明で、  $n \neq k$  の場合は空集合  $\phi \in \mathcal{F}_k$  から成り立つ。

系 1. 集合族  $\mathcal{G}$  と集合  $B$  に対して次の記法を用いる。

$$\mathcal{G} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathcal{G}\}$$

$$\text{すなわち } \mathcal{F}_\tau \cap (\tau = n) = \mathcal{F}_n \cap (\tau = n)$$

$$\text{系 2. } E[f | \mathcal{F}_\tau] 1_{(\tau=n)} = E[f | \mathcal{F}_n] 1_{(\tau=n)}$$

実際、条件付き期待値の性質から、左辺は

$$E[f 1_{(\tau=n)} | \mathcal{F}_\tau] = E[f 1_{(\tau=n)} | \mathcal{F}_\tau \cap (\tau=n)]$$

に等しいから、これは系 1 を適用すればよい。

定理 2 の証明に戻る。  $g = E[f | \mathcal{F}_\tau] 1_{(\tau < \infty)} + f 1_{(\tau = \infty)}$

と置き、  $b = f - g = \{f - E[f | \mathcal{F}_\tau]\} 1_{(\tau < \infty)}$  とおく。

$$(\tau < \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\tau = i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n(i)} A_{ij}$$

( $\tau = 0$ ) =  $\phi$  ( $y > \|f\|_1$  だから) に注意、  $A_{ij}$  は  $\mathcal{F}_i$ -atom

と分解し、  $b_{ij} = b 1_{A_{ij}}$  とおくと (i) は成り立つ。



(ii) は  $y \ P(\tau=n) \leq \int_{(\tau=n)} h_n dP = \int_{(\tau=n)} |f| dP$  を  $n$  に  
 ついて加え合わせると  $y \ P(\tau<\infty) \leq \|f\|_1$  から得られる。

(iii) は  $\sum_{i,j} |b_{ij}| \leq \|f\|_1 + E[|f| | \mathcal{F}_c]$  から出る。

(iv) : 補題の系2から

$$E[h | \mathcal{F}_c] 1_{(\tau=c)} = E[h | \mathcal{F}_c] 1_{(\tau=c)} \quad \text{が成り立ち、}$$

$$E[b_{ij} | \mathcal{F}_c] = E[f | \mathcal{F}_c] 1_{A_{ij}} - E[E[f | \mathcal{F}_c] 1_{A_{ij}} | \mathcal{F}_c] \\ = 0 \quad \text{であるから}$$

$$E[b_{ij}] = E[E[b_{ij} | \mathcal{F}_c]] = 0$$

(v) は  $g$  の作り方から直接に得られる。

(vi) を示すために  $\{\mathcal{F}_n\}$  の "regularity" が必要になる、という。

$(\tau=\infty)$  上では  $|f| \leq \lambda$  であるから、 $(\tau<\infty)$  上でも考えればよい。  
 $(\tau=c)$  上では

$$g = g 1_{(\tau=c)} = E[f | \mathcal{F}_c] 1_{(\tau=c)} = E[f | \mathcal{F}_c] 1_{(\tau=c)}$$

であり、 $\mathcal{F}_c$ -atom  $A_{ij} = A$  の上では  $(B : \mathcal{F}_{c-1}\text{-atom}, \cap A)$

$$|g| \leq \frac{1}{P(A)} \int_A |f| dP \leq \frac{1}{P(A)} \int_B |f| dP \leq \frac{C}{P(B)} \int_B |f| dP$$

$$= C h_{c-1} \leq C \lambda$$

これで証明が完了する。

定理1 の第2段に戻る。  $\Omega = [0,1)$  とし、 $\mathcal{F}_n$  は  $\Omega$  を

逐次に2等分して得られる sub  $\sigma$ -field とする。  $\mathcal{F} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

は Borel sets 全体である。  $f \in L^1$ ,  $y > \|f\|_1$  を与えたとす

$\{h_n\}$ ,  $\tau$  を定理2の証明のよりに定める。

$f = g + b$  に対応して,  $g, b$  から  $\Delta, \Delta^*$  に相当する 4 つの関数を作ると, これらに  $\Delta_g, \Delta_g^*; \Delta_b, \Delta_b^*$  と書くことにする. Minkowski の不等式があることは直接評価より

$$\Delta \leq \Delta_g + \Delta_b \quad |\Delta^*| \leq |\Delta_g^*| + |\Delta_b^*|$$

が得られる.  $\Delta, |\Delta^*|$  については同様の評価が成立するから, 以下  $\Delta$  について議論する.

$$\begin{aligned} \{x: \Delta(x; f) > y\} &\supseteq (\Delta > y) \subset (\Delta_g + \Delta_b > y) \\ &= ((\Delta_g + \Delta_b > y) \cap (\tau < \infty)) \cup ((\Delta_g + \Delta_b > y) \cap (\tau = \infty)) \\ &\subset (\tau < \infty) \cup (\Delta_g > y) \end{aligned}$$

が成立する.  $\tau = \infty$

$$(*) \quad (\tau = \infty) \text{ 上では } \Delta_b = 0$$

を一時仮定しておく. Chebyshev の不等式と, 第 1 段と,

(vi), (v) を用いて評価すると,  $y > \|f\|_1$  かつ

$$\begin{aligned} \text{meas}(\Delta_g > y) &\leq \frac{1}{y^2} \int_0^1 \Delta_g^2 dx \leq \frac{1}{y^2} \int_0^1 |g|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{y} \int_0^1 |g| dx \leq \frac{2}{y} \|f\|_1 \end{aligned}$$

が得られるから,  $\text{meas}(\tau < \infty) \leq \frac{1}{y} \|f\|_1$  とあるから

$$\text{meas}(\{x: \Delta(x; f) > y\}) \leq \frac{3}{y} \|f\|_1 \quad (y > \|f\|_1)$$

が得られる.  $y \leq \|f\|_1$  に対応しては, 右辺は 1 以下, 右辺は 3 以上となり trivial に成立する.

残りの 2 つについては (\*) の検証がある.

$\Delta_b$  は,  $E[b|\mathcal{F}_n]$  の階差の平方和の平方根だから,  $(\tau=\infty)$  上  $E[b|\mathcal{F}_n]$  がすべて 0 になることを見ればよい。  $i$  が  $n$  以下には

$$b = (f - E[f|\mathcal{F}_\tau]) 1_{(\tau<\infty)} = \sum_{i=1}^{\infty} (f - E[f|\mathcal{F}_\tau]) 1_{(\tau=i)}$$

が右端の各項  $(b^{(i)})$  と書くことにし,  $E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n] 1_{(\tau=\infty)}$  が 0 になることを見ればよい。まず,  $i \leq n$  であるときは

$$\begin{aligned} E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n] 1_{(\tau=\infty)} &= E[f 1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n] 1_{(\tau=\infty)} - E[E[f|\mathcal{F}_\tau] 1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n] 1_{(\tau=\infty)} \end{aligned}$$

右辺の 2 項は補題系 2 を用いて  $E[E[f|\mathcal{F}_\tau] 1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n] 1_{(\tau=\infty)}$  と書けるから, 第 1 項, 第 2 項とも  $1_{(\tau=i)} \cdot 1_{(\tau=\infty)}$  という関数になることになり,  $0 - 0 = 0$  である。  $i > n$  であるときは

第 1 項は 0 であり, 第 2 項は  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_i$  から第 1 項と等しいから, やはり 0 である。これで (\*) が示された。

定理 1 の証明もこれで完了している。

§ 4. 他の若干の場面について。 Carleson による,  $L^2$

関数の Fourier 級数の概収束の証明の途中にも, 条件付き期待値が利用されている。この点に着目して, 乗法的な適次関数系に対して, Martingale 論を用いて収束問題を解決したとした Schipp の研究があり, ある程度の成功は示している。この 4 の 7, 2 の対象の太さを代換する, という操作が

本質的に重要な段階がある。2, 有名な Martingale 論の枠内には封じ込められぬ。劣調和性を利用することにより、 $\mathbb{R}^d$  における  $H^p$  の理論を構成し、とある一連の試みの中には、ある種の Martingale の効果的に利用される。現状ではまだ相当に不備であるが、Fourier 解析の新たな部分で、Martingale 論の立場から見通しよく再編される可能性は、かなり大いである。

文献、Calderon-Zygmund 分解は [1] で与えられた。Paley [2] の後半部にはあまり証明が無く、「Fourier 級数の場合と同様である」という記述が見られるが、いわゆる Littlewood-Paley 理論といふことを述べたものは、複素関数論を用いる関係上、WFS に適用できなかった部分がある。ただ、「real method」が整備されて、証明はされる。

$\Delta$  の  $L^1$ -評価を与えたのは Yano [7] である。本稿の証明はほぼ [5] に述べられているが、「regular」Martingale を全範囲にわたる点については [6] というべきかもしれない。この条件は強すぎる嫌々があるが、本質的に必要であることが Uchiyama [3] で指摘されている。[4] はよく似た報告書である。F. Schipp の研究は Analysis Math. の初期の巻に出ている。Marcinkiewicz の補間定理の完全な形は [2]。

## References

- [1] A. P. Calderon - A. Zygmund, On existence of certain singular integrals,  
Acta Mathematica 88(1952), 85 - 139.
- [2] R. E. A. C. Paley, A remarkable system of orthogonal functions,  
Proc. London Math. Soc. (II), 34(1932), 241 - 279.
- [3] A. Uchiyama, Weight functions on probability spaces,  
Tôhoku Math. J., 30(1978), 463 - 470.
- [4] 内山 明人, BMO について, 数学 34(1982), 317 - 330.
- [5] C. Watari, Mean convergence of Walsh-Fourier series,  
Tôhoku Math. J., 16(1964), 183 - 188.
- [6] 渡利 千波, Martingales a Calderon-Zygmund 分解とその応用.  
実解析 11(1976)
- [7] S. Yano, On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier  
series, Tôhoku Math. J. 11(1959), 191 - 215.
- [Z] A. Zygmund, Trigonometric series, vol. II, pp. 112 et seq.