

代数曲面の3次被覆

高知大、理 徳永浩雄

§0. Introduction.

与えられた variety の上に double cover を構成して、新しい variety を作るという方法は、一般型代数曲面などを構成したりする場合には、非常に popular な方法である。このような場合に double cover が有用な理由には、

① covering が全て Galois

② 構成法が容易で、色々な不変量などの計算が楽に出来る
ということか考える。とこそが、triple cover を用いようとする
と、話は一気にややこしくなる。その大きな理由は、covering
が一般に non-Galois であるということである。さて、triple
covering を考える上で、方法は2通りある。それは、

① rank 2 vector bundle を用いる

② 3次方程式を解くという観点から考える

である。①は、double cover と line bundle の関係のアナロジー
を triple covering と rank 2 vector bundle の間に見出して

それらを用いて Triple coverの研究を行うもので、この方面では、R. Miranda, 藤田氏の結果がある. ([1], [2]) ここで、②の方向に沿って triple covering を考えてゆきたいと思う.

§1 Triple coverings と 3 次方程式

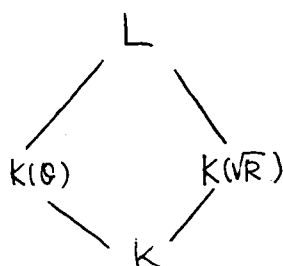
以下 variety は全て $\mathbb{C}$ 上とする.

体 K 上の 3 次方程式

$$x^3 + ax + b = 0, \quad a, b \in K, \quad \text{----- (1.1)}$$

K は 1 の n 乗根を数

に関する K 上の最小分解体 L の K 上の Galois 群が G_3 の時, L と K 上の二次根スベ体 $K(\sqrt{R})$ が存在して,



$$\theta : (1.1) \text{ の 1 つの解} \quad R = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}$$

をみえる.

さて, X, Y は normal algebraic variety, $p: X \rightarrow Y$ は Y 上の finite triple covering とする. X, Y の有理函数体をそれぞれ, $\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)$ とすると, これらの間には,

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(\theta)$$

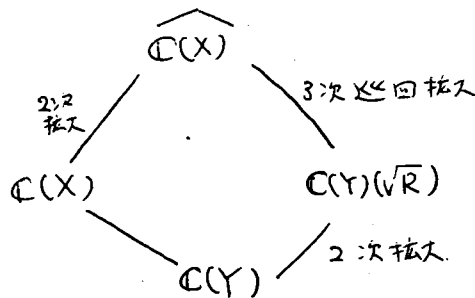
ただし, θ はある 3 次方程式

$$\zeta^3 + 3a\zeta + 2b = 0 \quad \text{-----} \quad (1.2)$$

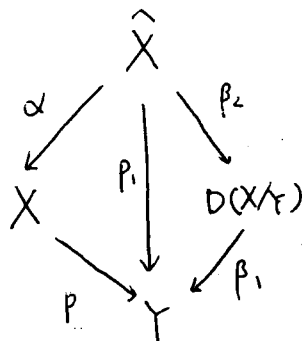
$$a, b \in \mathbb{C}(Y)$$

の根とする.

ρ が cyclic でないとき, (1.2) の $\mathbb{C}(Y)$ 上の最小分解体の Galois 群は $\mathfrak{S}_3$ であるから, 上述のように $\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)$ に対応して, unique に,



をみたす体が存在する. そこで, Y の $\widehat{\mathbb{C}(X)}$ -normalization を $\hat{X}$, $\mathbb{C}(Y)(\sqrt{R})$ -normalization を $D(X/Y)$ と表わすことにすると, $X, Y, \hat{X}, D(X/Y)$ の間には次のような関係が存在する.



$p_1: \hat{X} \longrightarrow Y$ finite Galois covering, Galois 群 $\cong \mathfrak{S}_3$

$\beta_1: D(X/Y) \longrightarrow Y$ finite double covering

$\beta_2: \hat{X} \longrightarrow D(X/Y)$ finite cyclic triple covering

$$\alpha: \hat{X} \longrightarrow X \quad \text{finite double covering.}$$

従って, p の構造を調べるには, β_1, β_2, α と $\hat{X}$ 上の G_3 の作用をみればよいことがわかる.

以下, Y : smooth と仮定する.

branch locus の purity により, p と p_1 の branch locus は共に, Y 上の divisor になるがこれらについて, 次の命題が成立する.

Proposition 1.3. $\Delta(X/Y)$: p の branch locus, $\Delta(\hat{X}/Y)$: p_1 の branch locus とすると,

$$\Delta(X/Y) = \Delta(\hat{X}/Y)$$

(= は set theoretic に という意味)

証). $\Delta(X/Y) \subset \Delta(\hat{X}/Y)$ は明らか. $\Delta(X/Y) \subsetneq \Delta(\hat{X}/Y)$ とする. $x \in \Delta(\hat{X}/Y) \setminus \Delta(X/Y)$ とすると, p は x の近傍では étale. 従って, $p^{-1}(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ である. 一方, $x \in \Delta(\hat{X}/Y)$ と, p_1 が finite Galois covering であることを考えると $\alpha^{-1}(x_i) = y_i$ (一点) である. $p_1: \hat{X} \rightarrow Y$ の Galois 群は G_3 であり, 3点 $\{y_1, y_2, y_3\}$ に G_3 が作用するが, 上記の事実は, 各点 y_i を fix する; 位数 2 の元が存在することを示す. これより G_3 に order 2 の normal subgroup が存在することになるが, これは矛盾である.

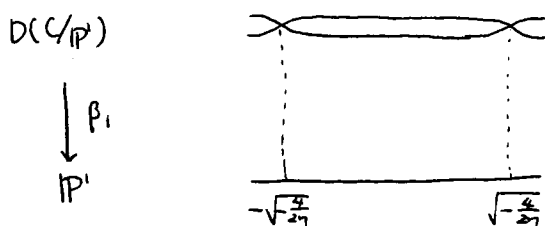
Q. E. D.

ここで簡単な例を挙げる

Example 1.4. $p: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ $\mathbb{P}^1$ 上の triple covering, C は $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{C}(P)(\theta)$ -normalization とする. (但し, θ は 3 次方程式, $X^3 + X + t = 0$ の解. (t は $\mathbb{P}^1$ の inhomogeneous coordinate) この場合,

$$R = \frac{1}{27} + \frac{t^2}{4}$$

であり, $\mathbb{C}(D(C/P)) = \mathbb{C}(P^1)(\sqrt{R})$ であるから, $\beta_1: D(C/P) \rightarrow P^1$ は以下のようになる:



従って, $D(C/P) \cong P^1$ であり, $D(C/P)$ の適当な inhomogeneous coordinate を Z とすれば, β_1 は,

$$\begin{array}{ccc} \beta_1: D(C/P) & \xrightarrow{\quad} & P^1 \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ Z & \longmapsto & -\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z^3+1}{Z^2-1} (=t) \end{array}$$

と表わせる. さらに, 上記の座標を用いて, $\sqrt{\beta_1^* R}$ を表わせば,

$$\begin{cases} \sqrt{\beta_1^* R} = \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z}{Z^2-1} \\ \beta_1^* t = -\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z^3+1}{Z^2-1} \end{cases}$$

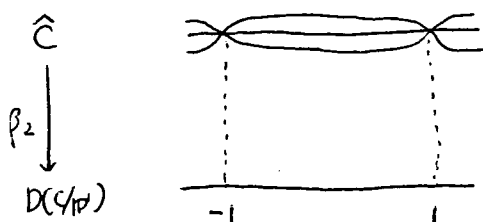
となる. 従って

$$-\frac{1}{2}\beta_1^*t + \sqrt{\beta_1^*R} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[3]{3}} \frac{z+1}{z-1}$$

を得る。ゆえに,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}}) &= \mathbb{C}(D(Y/P)) \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\beta_1^*t + \sqrt{\beta_1^*R}} \right) \\ &= \mathbb{C}(D(Y/P)) \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[3]{3}} \frac{z+1}{z-1}} \right) \end{aligned}$$

これから, $\beta_2: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は以下のようなになる。



ゆえに, $\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1$ であって, $\hat{\mathbb{C}}$ の適当な inhomogeneous coordinate を w とすれば,

$$\begin{array}{ccc} \beta_2: & \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow D(Y/P) \\ & \downarrow \psi & \\ & W & \longrightarrow -\frac{w^3+1}{w^3-1} (=z) \end{array}$$

と表わせる。

次に, $\text{Gal}(\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}})/\mathbb{C}(P^1))$ の action を w を用いて表す $\text{Gal}(\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}})/\mathbb{C}(P^1)) \simeq G_3$ であるから, G_3 の order 2 の元と 3 元について記述する。

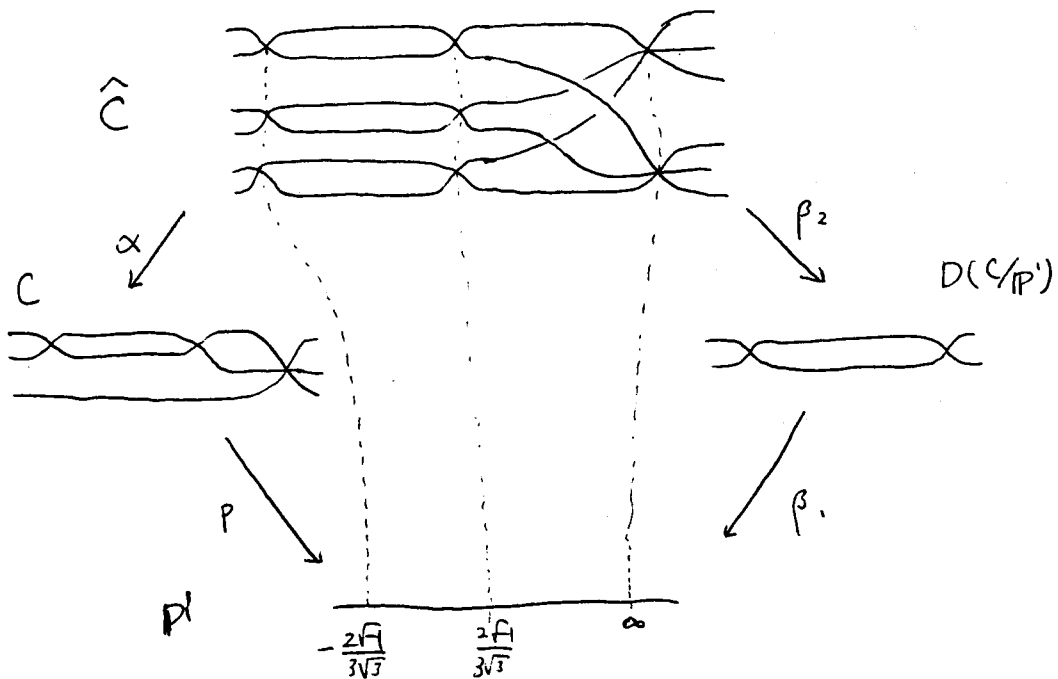
(i) order 2 の元:

$$\sigma: w \longmapsto \frac{1}{w}$$

(ii) order 3 の元

$$\tau: w \longmapsto \varepsilon w \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$$

となる。以上のことを図で表わすと次のようになる。



§2. totally ramified triple covering.

$p: X \longrightarrow Y$ は smooth variety Y 上の finite triple covering とある.

Definition 2.1. p が totally ramified とは, $\forall x \in \Delta(X/Y)$ に対し, $p^{-1}(x) = \{\text{one point}\}$ となっている Triple covering のことである.

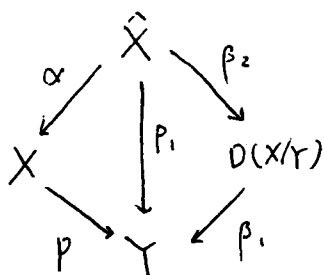
Proposition 2.2. $p: X \longrightarrow Y$ は smooth variety Y 上の totally ramified triple covering とする. 次の (i), (ii) が成立している と仮定する.

(i) X は smooth

(ii) Y は simply connected.

このとき, p は cyclic triple covering であり, p の branch locus $\Delta(X/Y)$ は smooth となる.

証) p : not cyclic とある. このとき, §1 で定義した $\hat{X}$, $D(X/Y)$ が存在して,



は可換となる. $\text{Gal}(\mathbb{C}(\hat{X})/\mathbb{C}(Y)) \cong \mathbb{S}_3$ であるとき,

Proposition 1.3. より, α は étale となる. これから, β_1 が étale になることが示されるが, これは仮定に反する. 又

$\Delta(X/Y)$ が smooth であることは, cyclic cover の一般論より従う

Q.E.D.

Corollary 2.3. $p : C \longrightarrow P'$ は triple covering. p の branch point を $g_1, \dots, g_r$ と表す. $p^{-1}(g_i) = \text{one point}$ ($i=1, \dots, r$) が成立していれば, p は cyclic である.

§3 代数曲面の Triple covering の構成.

この§では、代数曲面の triple covering の具体的な構成法について述べる.

Σ は non-singular な algebraic surface とする. Σ 上の smooth divisor $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ で以下の条件を満たすものを考える.

(i) $A_0 \sim A_\infty, B_0 \sim B_\infty$ (linear equivalent)

(ii) divisor $A_0 + A_\infty + B_0 + B_\infty$ は normal crossing divisor.

(iii) $a_0, a_\infty, b_0, b_\infty$ はそれぞれ $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ の defining equation とする. このとき

$$a_0^3 b_\infty^2 + a_\infty^3 b_0^2 = 0$$

で定義される divisor は reduced. かつ,

$$a_\infty(a_0^3 b_\infty^2 + a_\infty^3 b_0^2) = 0$$

で定義される divisor は、高々 $A_0 \cap A_\infty, B_0 \cap B_\infty, A_0 \cap B_0, A_\infty \cap B_\infty$ でしか特異点をもたない.

上記 (i) ~ (iii) を満たす divisor $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ に対し、 $\mathbb{C}(I)$ 上の 3 次方程式

$$\xi^3 + 3a\xi + 2b = 0, \quad \text{--- (3.1)}$$

$$a, b \in \mathbb{C}(I), \quad (a) = A_0 - A_\infty, \quad (b) = B_0 - B_\infty$$

を考える. (3.1) が $\mathbb{C}(I)$ 上既約のとき, (3.1) の解の 1 つを θ

とし, Σ の $\mathbb{C}(\Sigma)(t)$ -normalization を S' とすれば, S' は Σ 上の triple covering である. この S' の singularities は以下の通り.

Theorem 3.1. S' の singularities は以下の通り.

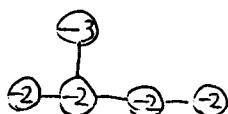
(1) $A_0 \cap A_\infty$ 及び $B_0 \cap B_\infty$ 上の点.

rational triple point で, その minimal resolution の dual graph は,



(2) $A_\infty \cap B_\infty$ 上の点.

rational triple point で, その minimal resolution の dual graph は



証明はパラメーター付の3次方程式を Cardano の公式に沿って解いてみることにより得られる.

上記の定理を用いて, non-Galois triple covering の smooth model の C_1 , C_2 等がある程度計算可能となる. その例として, 次の Proposition が成立する.

Proposition 3.2. Z_n は degree n の Hirzebruch 曲面とし
 S_∞ は Z_n の positive section とする. b は $\mathbb{C}(Z_n)$ の元で,
 $(b) = B_0 - B_\infty$ としたとき, $B_0, B_\infty \in |2S_\infty|$ かつ, 先の条件 (i)
 (ii) (iii) をみたすとする. θ は 3 次方程式

$$\xi^3 + 3\xi + 2b = 0$$

の解の 1 つとし, S' は Z_n の $\mathbb{C}(Z_n)(\theta)$ -normalization
 とする. この時 S' の smooth model S の numerical invariants
 は,

$$c_1^2(S) = 4n - 8$$

$$c_2(S) = 20n - 4$$

$$p_g(S) = 2n - 2$$

となる. さらに S は minimal となる.

証明は 3 つの部分に分かれる.

① c_1^2, c_2 の計算.

② $q(S) = 0$ の証明

③ S は minimal surface

である. 詳しくは 徳永 [4] を参照されたい.

[追記] Theorem 3.1. の (ii) の場合が rational triple point
 であることは, 講演の後 泊 昌孝氏の指摘によるものです.
 この場をかりて感謝の意を表します.

References:

- [1] T. Fujita: Triple covers by smooth manifolds, J. Fac. Sci. of The Univ. of Tokyo, Vol. 35, 169-175. (1988)

- [2] R. Miranda: Triple covers in algebraic geometry, Amer. J. Math. 107 (1985), 1123-1158

- [3] H. Tokunaga: Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula, to appear in J. Math. of Kyoto Univ.

- [4] H. Tokunaga: On the construction of triple coverings of certain type of algebraic surfaces and its applications, preprint.