

Cousin-II 問題と正則領域 の関係について

福岡大 理 吉田 守

§ 1. 序

$\mathbb{C}^n$ の任意の領域 D は Cousin-I であり (Oka [11]), 逆に $\mathbb{C}^2$ の任意の Cousin-I 領域は正則領域である (Cartan [4]—Behnke-Stein [3]). 更に連続な境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域 D は, $\mathbb{C}^n$ の単連結な任意の柱状領域 K に対して $D \cap K$ が Cousin-I 開集合であるとき, 正則領域である (Kajiwaru [7]).

ところで Cousin-II 問題については事情がやや異なる。

$\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ は Cousin-II 領域であるが正則領域ではない例である (Thullen [12]).

$\mathcal{O}^*$ を値 0 をとらない正則関数の芽の乗法群の層とするとき, $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$ をみたす任意の複素解析空間 X は Cousin-II 空間である。Kajiwaru [8] は $H^1(D, \mathcal{O}^*) = 0$ をみたす $\mathbb{C}^2$ の任意の領域 D は正則領域であることを示し, 更に Kajiwaru [1] は連続な境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域 D は, $\mathbb{C}^n$ の単連結な任意の柱状領域

K に対して $H^1(D \cap K, \mathcal{O}^*) = 0$ をみたすとき, 正則領域であることを示した。端的に言えば, 多くの Cousin-II 問題が解ける領域は正則領域である。

Thullen [13] は $\mathbb{C}^2$ の任意の Cousin-II 領域 D の閉包 $\bar{D}$ は D の正則包 $H(D)$ を含む, 即ち $\bar{D} \supset H(D)$ を示した。その系として, 連続な境界をもつ $\mathbb{C}^2$ 内の任意の Cousin-II 領域は正則領域であることが示される。

本講演では, この Thullen の結果を述べ, その結果と Hitotumatu の結果 [5] の応用として, 上述の Kajiwara の結果が $H^1(D, \mathcal{O}^*) = 0$ の Cousin-II でおきかえたもの, 即ち「連続な境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域は, $\mathbb{C}^n$ の単連結な任意の柱状領域 K に対して $D \cap K$ が Cousin-II 開集合であるとき, 正則領域である」という我々の共著論文 Adachi-Suzuki-Yoshida の結果 [1] を紹介する。

§2. 定義と若干の準備.

D を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合とする。族 $\mathcal{L} = \{(m_i, V_i) ; i \in I\}$ は次の条件をみたすとき D の 'Cousin-II 分布' という:

- (1) $\mathcal{V} = \{V_i ; i \in I\}$ は D の開被覆である。
- (2) 任意の $i \in I$ に対して m_i は V_i での有理型関数。
- (3) 任意の $i, j \in I$ に対して m_i/m_j は, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ のとき, $V_i \cap V_j$ で値 0 をとらない正則関数。

D における有理型関数 m は, 任意の $i \in I$ に対して m/m_i が値 0 をとらない正則関数であるとき, Cousin-II 分布 C の '解' という。 $\{m_i, v_i\}$ を有理型関数の鎖とよぶ。同様に正則関数の鎖のなる Cousin-II 分布が考えられるが D で正則関数の鎖のなる Cousin-II 分布が常に解をもてば, 有理型関数の鎖のなる Cousin-II 分布も常に解をもつことがわかってゐる。また, $\mathbb{C}^n$ の開集合 D は, D の任意の Cousin-II 分布が解をもつとき, Cousin-II 開集合とよび, 更に D が連結であれば Cousin-II 領域とよぶ。

K_i を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とあるとき, K_i の直積 $K \equiv K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ を以後単に柱状領域とよぶ。 $\mathbb{C}^n$ の開集合 D は, 任意の柱状領域 K に対して $D \cap K$ が Cousin-II 開集合のとき 'II-regular' とよぶ。 K は任意であるので, $\mathbb{C}^n$ の II-regular 開集合は勿論 Cousin-II 開集合である。

また, $\mathbb{C}^n$ の領域 G が 'II-regular 領域達の単調増加列の極限' とは, $G_p \subset\subset G_{p+1}$ ($p=1, 2, \dots$), $G = \bigcup_{p=1}^{\infty} G_p$ であるような II-regular 領域達の列 $\{G_p, p=1, 2, \dots\}$ が存在するときをいう。

実 m 次元ユークリッド空間 R^m の部分集合 S が S の点 x で連続とは, x の近傍 V で, ある j に対して変数 $x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n$ の連続関数 g が存在して,

$$S \cap V = \{x \in V \mid x_j = g(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_m)\}$$

とかけることをいう。ここに記号 $\wedge$ はその成分が除かれることを示す。また R^m の開集合 G の境界点 x は、境界 ∂G が x で連続のとき、連続な境界点という。各境界点で連続であるような $\mathbb{C}^n$ の領域 D は連続な境界をもつという。

$\mathbb{C}^n$ の領域 D が D の境界点 x で擬凸とは、適当な x の開近傍 V が存在して、 $D \cap V$ が正則凸となる場合をいう。 D の各境界点で擬凸のとき、 D は、単に、擬凸という。

Oka [11] による Levi の問題への肯定的解決により次を得る。

定理 1. $\mathbb{C}^n$ の領域 D は、 D が擬凸のときに限って正則領域である。

Hitotsumatsu [5] は次の定理 2 が Levi の問題に同値であることを示したが、Levi の問題は肯定的に解かれたので次の定理 2 を得る。

定理 2. $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 3$) の領域 D は、 $\mathbb{C}^n$ の任意の (複素) 2 次元の解析的平面 E に対して $D \cap E$ が E で正則開集合のとき、正則領域である。

(注) 以後 断りなく 単に ‘2次元’ というときは複素 2 次元を表わすものとする。

次の定理は Kajiwara [6] の特別な場合である。

定理3. $\mathbb{C}^n$ の単連結領域 D は, 単連結な Cousin-II 領域連の単調増加列の極限であるとき, Cousin-II 領域である。

§3. Cousin-II 問題に関する Thullen の結果

P. Thullen [13] は $\mathbb{R}^2$ の定理を示した。

定理4. G は $\mathbb{C}^2$ 内の Cousin-II 領域とし, $H(G)$ とその正則包, $\overline{G}$ とその閉包とするとき, $H(G) \subset \overline{G}$

(証明) 証明は $\mathbb{C}^2$ 内の二重円板 $\bar{U}$ の外では解析的で, $\bar{U}$ では真性特異点をもつ解析的平面が存在することからでてくる。簡単のため, $\mathbb{C}^2$ の2つの独立変数を w, z で表わす。

$U^{(2)}$ は z -平面上の円板 $|z| < \delta$ 内にある単連結領域でその連続な境界はいたるところ実解析的でないようにえらんでおく。

$w = f(z)$ は $U^{(2)}$ の外部を円板 $|w| < \delta$ に正則に写し, $U^{(2)}$ の境界 $\partial U^{(2)}$ は円 $|w| = \delta$ に写るようになり f の写像関数である。

多様体 $A = \{(w, z); w = f(z) = 0\}$ が求まる解析的平面である。 A は $\{(w, z); |w| = \delta, |z| < \delta\}$ の上でそのすべての点が A の特異点であるような閉いた実1次元の境界曲線をもっている。また A はそれ以外には特異点をもたず, 平面 $\{(w, z); z = z', |z'| \geq \delta\}$ は円板 $|w| < \delta$ の内部では A と唯一度しか交わらない。

$H(G) - G$ が内点 P_0 をもつと仮定して矛盾を導こう。

今 p_0 のある近傍 $U(p_0)$ が $H(G) - G$ に含まれていたとする。

$$p_0 = (0, 0), \quad U(p_0) = \{ (w, z) ; |w| < \delta, |z| < \delta \} \text{ と } |z|$$

一般性を失わない。

G の内点 (w_1, z_1) を点 $p_1 = (0, z_1)$ に写し, G の像は (柱状領域 $\{ |w| < \delta, |z| > \delta \}$ に含まれる) 近傍

$$U(p_1) = \{ (w, z) ; |w| < \varepsilon, |z - z_1| < \varepsilon \}$$

を含むような 1 次変換がある。

$A = \{ (w, z) ; w - f(z) = 0 \}$ が上述の方法で作られたものであれば, A は縮小された柱状領域 $\{ |w| < \varepsilon, |z| > \delta \}$ で解析的であるが, $\overline{U(p_0)}$ では特異点をもつ。 A は $U(p_1)$ を通り G 全体で解析的で Cousin-II 分布を与える。

Cousin-II 問題が G で解ければ A を零点面とする G における正則解 $F(z, w)$ が存在する。 $F(z, w)$ は $H(G)$ でも正則で

$$U(p_0) \subset H(G).$$

$F(z, w)$ は $U(p_0)$ の近傍へも解析的に接続されることになるが, A は $\overline{U(p_0)}$ で真性特異点をもっていたことに反する。

(証了)

この定理の系として次を得る。

定理 5. $\mathbb{C}^2$ の連続な境界をもつ Cousin-II 領域 G は正則領域である。

(証明) G は連続な境界をもっているので G の閉包 $\overline{G}$ の

開核 $\overset{\circ}{G}$ は G 自身, 即ち $\overset{\circ}{G} = G$ である。

前定理より $\overline{G} \supset H(G)$. 故に $G = \overset{\circ}{G} \supset H(G)$

逆に $G \subset H(G)$ は明らか. 故に $G = H(G)$

これは G が正則領域であることを意味する。(証了)

§4. Thullen の結果の応用

定理 6. $\mathbb{H}$ -regular 領域達の単調増加列 $\{D_\nu; \nu=1, 2, \dots\}$ の極限で, 連続な境界をもつような $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 3$) の領域 D は, $\mathbb{C}^n$ の任意の 2 次元解析的平面 H に対して, $D \cap H$ 及び $D_\nu \cap H$ ($\nu=1, 2, \dots$) が単連結であるとき, 正則領域である。

(証明) $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu$, $D_\nu \subset\subset D_{\nu+1} \subset\subset D$. ($\nu=1, 2, \dots$)

ここに各 D_ν は $\mathbb{C}^n$ の連続な境界をもつ $\mathbb{H}$ -regular 領域達。

$\mathbb{C}^n$ の 2 次元解析的平面を $H = \{(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n); z_3 = \dots = z_n = 0\}$ としておかない。 $\mathcal{C} = \{(m_i, V_i); i \in I\}$ を $D \cap H$ における Cousin-II 分布とする。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$E_\nu \equiv D_\nu \cap \{(z_1, \dots, z_n); |z_3| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon\}$$

$$\subset \{(z_1, \dots, z_n); |z_3| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon, (z_1, z_2, 0, \dots, 0) \in D \cap H\}$$

D_ν は $\mathbb{H}$ -regular であるから E_ν は $\mathbb{C}^n$ の Cousin-II 領域である。

$$V_i'' \equiv D_\nu \cap \{|z_3| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon, (z_1, z_2, 0, \dots, 0) \in V_i\}$$

$$V_i'' \text{ 上 } M_i''(z) = m_i(z_1, z_2) \text{ とおくとき, } \mathcal{C}_\nu \equiv \{(M_i'', V_i''); i \in I\}$$

は E_ν の Cousin-II であり, E_ν は Cousin-II であるので $\mathcal{C}_\nu$ は解 $M''(z)$ をもつ。 $M''(z)$ の $D_\nu \cap H$ への制限 $m''(z)$ は, 制限分布

$\{(m_i | D_v \cap H, V_i \cap D_v \cap H) ; i \in I\}$ の解である。

このとき定理3により ϕ は $D \cap H$ で 解をもつ。

従って $D \cap H$ は $\mathbb{C}^2$ の連続な境界をもつ Cousin-II 領域となり定理5から $D \cap H$ は $\mathbb{C}^2$ の正則領域である。 H は任意の2次元解析的平面であったことに注意すれば定理2より D は正則領域となる。(証了)

定理7. $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 3$) の連続な境界をもつ II-regular 領域 D は正則領域である。

(証明) 定理1から, D の任意の境界点 z^0 に対して $D \cap V$ が正則開集合であるような z^0 の近傍 V が存在することはいはよい。一般性を失うことなく, z^0 は D の連続な境界点であるので, z^0 のある多重円板 V で ある連続関数 g に対して,

$$\partial D \cap V = \{z \in V ; x_n = g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$$

としよう。ここに $z_n = x_n + \sqrt{-1} y_n$ 。

十分小さい V に対して次の3つの場合(1), (2), (3)が起る。

$$(1) D \cap V = \{z \in V ; x_n < g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$$

$$(2) D \cap V = \{z \in V ; x_n > g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$$

$$(3) D \cap V = \{z \in V ; x_n \neq g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$$

(1)の場合: V を多重円板にとりその半径を r とし, V_t は中心 z^0 , 半径 $r-t$ の多重円板とする。 $(0 \leq t \leq r)$

$E_t \equiv \{z \in V_t ; x_n < g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n) - t\}$ は II-regular な開集合

である。実際、 P を柱状領域とし、双正則写像

$\varphi: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (w_1, \dots, w_n)$ を次で定義する：

$$w_j = z_j \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad w_n = z_n + t$$

このとき、 $E_* \cap P$ は φ により

$$\varphi(w) : u_n < g(w_1, \dots, w_{n-1}, u_n), \quad (w_1, \dots, w_{n-1}, w_n - t) \in V_* \cap P \} \\ = D \cap \varphi(V_t) \cap \varphi(P) \quad \text{の} \text{上} \text{に} \text{写} \text{さ} \text{れ} \text{る} \text{。}$$

ここに $\varphi(V_t)$ は中心 $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + t)$ 、半径 $r-t$ の多重円板で、 $\varphi(P)$ は P の像であるところの柱状領域である。

D は $\mathbb{H}$ -regular であるので $D \cap \varphi(V_t) \cap \varphi(P)$ は Cousin-II 領域、従って $E_* \cap P$ も Cousin-II 領域である。故に E_* は $\mathbb{H}$ -regular 開集合である。

任意の 2 次元解析的平面 H に対して、 $E_* \cap H$ は V を適当にえらべば単連結にとれる。 $D \cap V$ は $\mathbb{H}$ -regular 領域 E_* の単調増加列の極限であるから、定理 6 により $D \cap V$ は正則領域である。

(2) の場合は (1) の場合と同様である。

(3) の場合： $D_1 \equiv \{z \in V ; x_n < g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$

$$D_2 \equiv \{z \in V ; x_n > g(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)\}$$

とおくとき、 D_1, D_2 は $\mathbb{H}$ -regular 開集合達であり、(1), (2) の場合と同様にして z^0 で後述凸、従って $D \cap V = D_1 \cup D_2$ は正則開集合である。(証)

参考文献

- [1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, Cousin-II domains and domain of holomorphy, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 2 (1970) p.242-248
- [2] H. Behnke, Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des plus. var. Bruxelles (1953)
- [3] H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47 (1937) p.177-192
- [4] H. Cartan, Sur les premières problèmes de Cousin. C.R.Paris 207 (1938) p.558-560
- [5] S. Hitotumatu, On some conjectures concerning pseudoconvex domains, J. Math. Soc. Japan 6 (1954) p.177-195
- [6] J. Kajiwara, On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domains. J. Math. Soc. Japan 17 (1965) p.36-46
- [7] _____, Some characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kodai. Math. Sem. Rep. 16 (1964) p.191-198
- [8] _____, Note on a Cousin-II domain over $\mathbb{C}^2$, Ibid. 17 (1965) p.44-47

- [9] J. Kajiwarara, Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid. p.261-272
- [10] _____, Some extentions of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Math. Sci. Kyoto Univ. 1 (1966) p.133-156
- [11] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: II Domains d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. 7 (1937) p.115-130
- [12] P. Thullen, Sur les deusième probleme de Cousin. C.R.Paris
- [13] _____, Bemerkungen über analytische Flächen im Räume von n komplexen Veränderlichen im Zusammenhang mit dem zweiten Cousinischen Problem. Math. Ann. 183 (1969) p.1-5