

泥堂氏の方程式 $y'' = (x-A)y$ をめぐって

— 松 信 (京大, 数理研)

0. 由來

平野菅保氏より, 標題の方程式の境界条件 $y(0)=y(+\infty)=0$ に対する固有値問題をきき, その解析を少しく試みたので, 概要を報告する.

問題の方程式は Bessel 函数に歸着され, $x \rightarrow +\infty$ のとき $y \rightarrow 0$ とする解は不安定な解であって, 普通の数値計算では求めにくい. そのための二三の工夫が中心である.

1. 方程式の厳密解

座標をずらして

$$(1) \quad y'' = x y$$

の $y(+\infty)=0$ である解の右側から見た最初の 0 点が $-A$ である. (1) は $x=0$ において整数数による解 (収束半径 ∞) をもち, それはつぎのように表現できる:

$x > 0$ においては, $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$ とおくと, 変形 Bessel 函数により

$$(2) \quad y = x^{\frac{1}{3}} \left(a I_{\frac{1}{3}}(x) + b K_{\frac{1}{3}}(x) \right)$$

$x < 0$ において, $z = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ とおくと

$$(3) \quad y = z^{\frac{1}{3}} \left(\alpha J_{\frac{1}{3}}(z) + \beta J_{-\frac{1}{3}}(z) \right)$$

係数は $a = \alpha + \beta$, $b = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \alpha$; $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{3}} b$, $\beta = -\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{3}} b$

で結ばれる. $y(+\infty) = 0$ である解は, $\alpha = 0$ で特長づけられ, $\alpha = \beta$ (3)の

に対する最初の 0 点は, x にもとじて

$$-A_0, \quad A_0 = 2.3381074104 \dots$$

である. — 泥堂氏のもとの値は $A = 2.33810769 \dots$ で, 2.8×10^{-7} のずれがある. なおこれに対する z の値を B とおく. $B = \frac{2}{3} A_0^{3/2}$.

$A = \delta$ の誤差があると, たとえ途中の計算が完全に誤差なしで実行できても, (2) の a が完全に 0 になるないので,

$x \rightarrow +\infty$ となると, $I_{\frac{1}{3}}$ の項が $K_{\frac{1}{3}}$ の項にうちかち, $y \rightarrow \pm\infty$ となる. もし途中の計算が完全に誤差なしで実行できても,

$|a I_{\frac{1}{3}}| = |b K_{\frac{1}{3}}|$ となる x の値は, δ^2 以上を無視すると

$$\frac{4}{3} x^{3/2} = 2z = -\log \left| \frac{\delta}{C} \right|; \quad C = \frac{2\pi}{3} A_0 (J_{\frac{1}{3}}(B))^2 \doteq 0.32 \dots$$

であって, 意外に小さい x で「破局」となる. この種の不安定性は, もとの方程式に固有の性格である. ($\delta = 2.8 \times 10^{-7}$ の

とき, $x \doteq 4.8$; $x + A_0 \doteq 7$ くらい.)

2. 対策

(i) 宇野教授の実験によると、このような場合、刻みを粗くし、桁数も短くし、つまり111加減にとくと、係数 α がいっても切り捨てられて完全に0となり、かえって‘期待される’解に近いものがえられることもある由である。

(ii) 古部教授の御注意によるが、もし A を定めるだけなら、不安定性を逆に使い、なるべく精密にといって、 $y \rightarrow +\infty$ にゆくか $y \rightarrow -\infty$ にゆくかの傾向を見定め、 A の範囲をせばめてゆくこともできそうである。

(iii) 右から逆にとく手続は、ためしてみた上では有効であった。初期値は $y(x_0)=0$, $y'(x_0)<0$ と $y(x_0)>0$, $y'(x_0)=0$ から始める。 α の僅かの値は、左へ進めば、まったくきいてこない。実験では $x_0=7.0$, 初期値 $= \pm e^{-\frac{2}{3}x_0^{3/2}}$, 刻み幅 $h=0.25$, 平野氏による8次までの Taylor 展開の方法で、

$$A = 2.33810740 \dots$$

が求められた。漸近形にあわせるため、前者を $\sqrt{2\pi}$ 倍しておけば、 y の値そのものも双方でかなり近い。

この方法で解の値を求めるには、 $x=-A$ での初期値にあるよう、あとで定数倍する必要がある。

(iv) (iii) をさらにすすめれば、 $x \rightarrow +\infty$ のとき $y \rightarrow 0$ となる漸近展開を理論的に求めて、初期値のよい近似値からはい

めることが考えられる。この種の本質的に不安定な解を計算するには、理論解を援用しなければ、無理であろう。

(v) 平野氏の Taylor 展開による方法は、(1) のような線型で $y^{(p)}$ が漸化式で求められる方程式については、きわめて有利である。p 次までとったとき、全体の打ち切り誤差は h^p 程度に比例し、手間は p/h に比例するから、精度にもよるが p は大きいほど有利である。^{*} 実用上には、p を一定とせず、誤差評価をして必要な項数までとってゆく可変 Taylor 展開の方法が有用であろう。またこの際 y' も計算するので、0 点を求めるには、Newton 法が有効に活用できるのも長所である。

3. 感想

昔やったことのある Bessel 関数の漸化式

$$(4) \quad J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0$$

を n の大きい方から下げてゆく計算は、(1) の差分近似と解釈でき、本質的に同じ問題であった。逆向きに解く手法はまったく同一である。

初期値を漸近展開で精密に求める案も試みる価値がある。しかし実用的には「いい加減」な値から始めて、あとで補正するほうが、かえって楽なように思われる。

付記 2節 (v) * p の最適値について.

もし理想化して $h^p = c$ (一定) の下で p/h を最小にするとすれば, つぎのようになる. h は小さく, たぶん < 1 だから, c は 1 より小, したがって $\log c$ は負なので, これを $-a$ とおき, $1/h = x$ とおくと,

$$p/h = px = ax / \log x$$

がある. $f(x) = \log x / x$ に対して $f'(x) = (1 - \log x) / x^2$ で, $f(x)$ の最小は $x = e$, したがって $h = 1/e$ でおこる. だから刻み幅は $1/2$ か $1/4$ にして, p を必要の精度がでるまでとるのが賢明である. 比例定数が問題であるが, $h = 1/e$ なら $h^p = c$ とするとき, $p = a$ ($= -\log c$) である. c が 10^{-7} くらいなら, p を 20 くらいまで上げるのがよい.

— 〇 —

Taylor 展開による常微分方程式の解法は, 新しく見直す価値がありそうである. ただし多項式を係数とする線型方程式なら, $y^{(p)}$ は漸化式で容易に求められるが, 一般の場合には数式処理によるのと, 漸化式によって数値的に求めるのと, どちらが有利であるのか, 疑問である. 手間の点ではたぶん後者が早いだろうが, 数値的不安定性などの吟味は, まだ完全ではないように思われる.