

P.T.MOCANU の補題の拡張

和歌山大学・教育 鈴木 徳彦 (Norihiko SUZUKI)

1 導入と準備

$p(z), q(z)$ を単位円板 U で解析的であるとする。 $w(0) = 0$ かつ $|w(z)| < 1 (z \in U)$ を満たし, $p(z) = q(w(z))$ となるような解析関数 $w(z)$ が存在すれば, 関数 $p(z)$ は U で $q(z)$ に subordinate であるという。このとき, $p(z) \prec q(z)$ または $p \prec q$ と書く。 $q(z)$ が U で単葉ならば subordination $p \prec q$ は $p(0) = q(0), p(U) \subset q(U)$ と同値である。

1986 年の Mocanu [1] の On starlikeness of libera transform の補題を 2 つ引用する。これについて拡張を試み, また 新たな証明をつけた。

補題 1.[1] 関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0) = 1$ で, かつ $\alpha > 0$

$$(1.1) \quad \operatorname{Re}[zp'(z) + \alpha p(z)] > 0, \quad z \in U$$

ならば, $\operatorname{Re} p(z) > 0, z \in U$ となる。

補題 2.[1] 関数 $P(z)$ が単位円板 U で解析的で $P(0) = 1$ で, かつ

$$(1.2) \quad \operatorname{Re}[zP'(z) + P(z)] > 0, \quad z \in U$$

ならば, $|\arg P(z)| < \frac{\pi}{3}, z \in U$ となる。

2 主な結果

定理の証明には, 次の Jack[2] (または, Miller and Mocanu [3]) が必要である。

補題 3. 関数 $w(z)$ を単位円板 U で解析的で $w(0) = 0$ とする。 $|w(z)|$ が円 $\{|z| = r\}$ ($0 \leq r < 1$) 上の点 z_0 で最大値をとるとき,

$$(2.1) \quad \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = k \geq 1$$

となる。

定理. 関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0) = 1$ で, かつ

$$(2.2) \quad \operatorname{Re}[zp'(z) + \alpha p(z)] > \beta, \quad z \in U$$

ならば,

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} p(z) > \gamma, \quad z \in U$$

となる。ただし, α, β, γ はすべて実数で, $\alpha > 0$,

$\alpha > \beta, \gamma < 1$ かつ

$$(2.4) \quad \beta > -\frac{1-\gamma}{2} + \alpha\gamma$$

を満たすものとする。

(証明) $p(0) = 1, \gamma < 1$ より, $z = 0$ の近傍では, $\operatorname{Re} p(z) > \gamma$ が成立している。
 $\sigma = 2\gamma - 1$ と置けば,

$$(2.5) \quad p(z) < \frac{1-\sigma z}{1-z}$$

が成立する。これは,

$$(2.6) \quad p(z) = \frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)} \quad (w(z) \neq 1)$$

と書いて, $w(z)$ は U で解析的で $w(0) = 0, |w(z)| < 1$ である。このとき,

$$\operatorname{Re} p(z) > \gamma, \quad z \in U \iff p(z) = \frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)}$$

が成立する。

ここで (2.6) より,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} zp'(z) &= z \cdot \frac{w'(z)}{w(z)} \cdot \frac{w(z)(1-\sigma)}{(1-w(z))(1-\sigma w(z))} \cdot \frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)} \\ &= \frac{zw'(z)}{w(z)} \cdot \frac{w(z)(1-\sigma)}{(1-w(z))^2} \end{aligned}$$

を得る。今仮に, ある $z_0 \in U$ に対して,

$$\operatorname{Re} p(z) > \gamma, \quad |z| < |z_0| \quad \text{かつ} \quad \operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$$

となったとすると, $|w(z_0)| = 1, w(z_0) = e^{i\theta} \quad (\theta \neq 0)$ と置き, 補題 3 を使う。(2.7) より,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} z_0 p'(z_0) &= \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \cdot \frac{w(z_0)(1-\sigma)}{(1-w(z_0))^2} \\ &= k \cdot \frac{(1-\sigma)e^{i\theta}}{1-2e^{i\theta}+e^{2i\theta}} \\ &= k \cdot \frac{1-\sigma}{2(\cos-1)} = k \cdot \frac{1-\gamma}{\cos-1} \\ &\leq -\frac{1-\gamma}{2}, \end{aligned}$$

よって,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}[z_0 p'(z_0) + \alpha p(z_0)] &= z_0 p'(z_0) + \alpha \operatorname{Re} p(z_0) \\ &\leq -\frac{1-\gamma}{2} + \alpha \gamma < \beta \end{aligned}$$

となって, $z_0 \in U$ に対して, $\operatorname{Re}[z_0 p'(z_0) + \alpha p(z_0)] < \beta$ が成立してこれは仮定に矛盾する。よって, $z_0 \in U$ は存在せず $|w(z)| < 1$ であり, すなわち, すべての $z \in U$ に対して, $\operatorname{Re} p(z) > \gamma$ が成立することが示された。□

定理で $\beta = 0$ とおくと,

$$(2.10) \quad \gamma < \frac{1}{1+2\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

を得, よって

系 1. 関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0) = 1$ で

$$(2.11) \quad \operatorname{Re}[z p'(z) + \alpha p(z)] > 0, \quad z \in U$$

ならば,

$$(2.12) \quad \operatorname{Re} p(z) > \gamma, \quad z \in U$$

となる。ただし,

$$(2.13) \quad \gamma < \frac{1}{1+2\alpha}$$

を満たすものとする。

特に, $\gamma = 0$ についても成立するから

系 2. 補題 1 が成立する。

次に, 補題 2 の別証明を与える。

(補題 2 の証明) 先ず, 補題 1 より $z \in U$ に対して, $\operatorname{Re}[z P'(z) + P(z)] > 0$ なら, $\operatorname{Re} P(z) > 0$ である。すなわち, $|\arg P(z)| < \frac{\pi}{2}$ である。今, $|\arg P(z)| < \gamma$ に対して, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ であることを示す。

$|\arg P(z)| < \frac{\pi}{2}$ だから,

$$(2.14) \quad P(z) \prec \frac{1-z}{1+z}$$

と書けるが一般的には,

$$(2.15) \quad P(z) \prec \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^\sigma$$

と置くと,

$$(2.16) \quad P(z) = \left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right)^\sigma$$

と書けて, $w(z)$ は $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ が成立している。この時,

$$(2.17) \quad \begin{aligned} |\arg P(z)| &\leq \left| \sigma \cdot \arg \left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right) \right| \\ &\leq |\sigma| \cdot \frac{\pi}{2} = \gamma \end{aligned}$$

より, $|\sigma| \cdot \frac{\pi}{2} = \gamma$ ($\sigma > 0$ としてよい) を満たしている。ここで, (2.12) より,

$$(2.18) \quad \frac{P'(z)}{P(z)} = \sigma \left(\frac{-w'(z)}{1-w(z)} - \frac{w'(z)}{1+w(z)} \right)$$

となり, 今ある $z_0 \in U$ に対し, $|z| < |z_0|$ のとき $|\arg P(z)| < \gamma$ かつ $|\arg P(z_0)| = \gamma$ となったとすると, $|w(z_0)| = 1$ ($w(z_0) = e^{i\theta}$, $\theta \neq \pi$) とできて, 再び補題 3 が使える。よって (2.12) より,

$$(2.19) \quad P(z_0) = \left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \right)^\sigma$$

ゆえに,

$$(2.20) \quad \begin{aligned} P(z_0) + z_0 P'(z_0) &= P(z_0) \left(1 + \frac{z_0 P'(z_0)}{P(z_0)} \right) \\ &= P(z_0) \left\{ 1 + z_0 \sigma \left(\frac{-w'(z_0)}{1-w(z_0)} - \frac{w'(z_0)}{1+w(z_0)} \right) \right\} \\ &= P(z_0) \left(1 - k\sigma \frac{2w(z_0)}{1-w^2(z_0)} \right) \\ &= P(z_0) \left(1 - \frac{k\sigma}{\sin \theta} i \right) \end{aligned}$$

となる。 $1 - \frac{k\sigma}{\sin \theta} i$ の偏角を β と置くと, $\beta = \tan^{-1} \left(-\frac{k\sigma}{\sin \theta} \right)$, $|\arg[P(z_0) + z_0 P'(z_0)]| = |\gamma + \beta| < \frac{\pi}{2}$ ($\sigma > 0$, $\frac{\pi}{2}\sigma = \gamma$) でなければならない。ゆえに,

$$(2.21) \quad |\gamma + \tan^{-1} \sigma| < \frac{\pi}{2},$$

となりこれは, $0 < \gamma + \tan^{-1} \sigma < \frac{\pi}{2}$ であり, (2.17) より,

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2}\sigma + \tan^{-1} \sigma &< \frac{\pi}{2} \\ \iff \sigma + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \sigma &< 1. \end{aligned}$$

(2.16) より, $0 < \sigma < 1$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ で, $\gamma < \frac{\pi}{3}$ であることがわかり, $\pi = 3.14$, $\frac{2}{\pi} = 0.6$, $\frac{\pi}{2} = 1.57$ として近似値を計算すると, (2.22) を満たす σ は, $\sigma = 0.65$ であり, これより

$\gamma = 1.02$ を得る。ゆえに、 $\gamma = 1.02 < \frac{\pi}{3} = 1.047$ となり、これは補題 2 の結果を得ている。ただし、この結果は sharp ではない。sharp な結果を得ることは、今後の課題である。これで証明を終了する。□

参考文献

- [1] P.T.Mocanu, *On starlikeness of Libera transform*, Mathematica, Tome 28(51), N°2, (1986), 153-155.
- [2] I.S.Jack, *Functions starlike and convex of order α* , J. London Math. Soc. 3(1971), 469-474.
- [3] S.S.Miller and P.T.Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. math. Anal. appl. 65(1978), 289-305.