

最短点と最遠点の問題について

東工大情理研 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

「Hilbert空間 H において, C を H の空でない閉凸集合とし, $x \in H$ とする. このとき, $\|x - y_0\| = d(x, C)$ となる C の点 y_0 が存在する. しかもこのような y_0 はただ 1 つである。」や「 C を Hilbert空間の凸集合とし, $x \in H$ とする. このとき, C の点 y が $\|x - y\| = d(x, C)$ となる必要十分条件は

$$(x - y, y - z) \geq 0, \quad \forall z \in C$$

が成り立つことである。」等の定理はよく知られている最短点に関する定理である. 一方, K. S. Lau [1] はつぎの最遠点に関する定理を証明した. それを述べる前に 2, 3 の定義が必要である. E を Banach空間とし, C を E の有界閉集合とする. いま実数値関数 $f_C: E \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_C(x) = \sup \{ \|x - z\| : z \in C \}$$

と定義し, 集合 $D(C)$ を

$$D(C) = \{ x \in E : \inf_{z \in C} (z - x, x^*) = -f_C(x), \quad \forall x^* \in \partial f_C(x) \}$$

と定義する. このとき Lau の定理はつぎのようである. 「 C

を Banach 空間 E の弱コンパクト集合とする。このとき、任意の $x \in D(C)$ は C 内に最遠点をもつ。また $D(C)$ は E で稠密な G_δ -集合である。最遠点の一意性に関する命題も最近宮島-和田 [3] によって、狭義凸で回帰的な Banach 空間という条件の下で証明された。

ここでは最短点定理に関するいろいろな拡張や、それを用いて得られるいくつかの命題について議論する。また最遠点問題に関しては、Lau の定理も有限個の点の場合まで拡張する。すなわち、有限個の点 $\{x_i\}_{i=1}^m$ を与えたとき

$$g(z) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_i - z\|, \quad \forall z \in C$$

が最大値をとるかという問題について議論する。

§1. 準備

最短点定理や最遠点定理の拡張を議論するにあたって、いくつかの定義や基本的性質の知識が必要であるので以下に記述しておく。

E を Banach 空間とし、 E^* をその dual space とするとき

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \|x^*\|^2 = \|x\|^2 = x^*(x)\}, \quad \forall x \in E$$

で定義される J は E 上の双対写像と呼ばれ、 $J(x)$ は空でない有界な閉凸集合である。また $S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき、 $x, y \in S(E)$ に対して、極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \dots\dots (*)$$

が考えられるが、この極限が、任意の $x, y \in S(E)$ について存在するとき、 E は smooth であるといわれる。 E が smooth であるとき、双対写像 J は一価写像である。

S を与えられた集合とし、 $m(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体からなる sup-norm をもつ Banach 空間とする。 X を $m(S)$ の部分空間で、1 を含むものとする。 このとき、 X 上の実数値関数 μ がつぎの条件 (1) ~ (4) を満たすならば μ は X 上の sub-mean と呼ばれる。

$$(1) \quad \mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g), \quad \forall f, g \in X;$$

$$(2) \quad \mu(\alpha f) = \alpha \mu(f), \quad \forall f \in X, \alpha \geq 0;$$

$$(3) \quad f \leq g \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g);$$

$$(4) \quad \mu(c) = c, \quad c \text{ は constant.}$$

(1) で等号が成立するとき、 μ は mean と呼ばれる。 μ が X 上で mean であるなら

$$\inf_{s \in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s \in S} f(s), \quad \forall f \in X$$

がつねに成り立つ。 またその逆も成立する。 X 上の submean は mean や $\limsup$ (上極限) などをも一般化した概念である。 詳しいことは [7], [4] を参照するとよい。

§2. 最短点定理

最初によく知られてゐる最短点定理を述べておこう。

定理1 E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とし, C を E の閉で凸な部分集合とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して

$$\|x - y_0\| = d(x, C)$$

となる y_0 が一意に存在する.

定理2 E を Banach 空間とし, C を E の凸な部分集合とする. このとき, $x \in E$ と $x_0 \in C$ に対して, $\|x - x_0\| = d(x, C)$ となる必要十分条件は

$$(x_0 - j, j) \geq 0, \forall j \in J$$

となる $j \in J(x - x_0)$ が存在することである. ただし, J は E 上の双対写像である.

つぎの補助定理は複数個の点に対しての最短問題を議論するのに有効である.

補助定理3 E を回帰的な Banach 空間とし, C を E の閉で凸な部分集合とする. また f を C から $(-\infty, \infty]$ への proper で凸な下半連続関数とし, f は $\|x_n\| \rightarrow \infty$ のとき, $f(x_n) \rightarrow \infty$ を満たすものとする. このとき

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$

となる $x_0 \in C$ が存在する.

この補助定理を用いるとつぎの定理が得られる.

定理4 H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. H の有界な点列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して, C 上の実数値関数 g を

$$g(z) = \overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \|x_i - z\|, \quad \forall z \in C$$

で定義する. このとき

$$g(x_0) = \min \{g(z) : z \in C\}$$

となるような $x_0 \in C$ が一意に存在する.

同様に, Banach limit μ に対してつぎの定理が成り立つ

定理5 H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. H の有界な点列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して, C 上の実数値関数 g を

$$g(z) = \mu \|x_i - z\|, \quad \forall z \in C$$

で定義する. このとき

$$g(x_0) = \min \{g(z) : z \in C\}$$

となるような $x_0 \in C$ が一意に存在する. ただし, $\mu \|x_i - z\|$ は $\{\|x_i - z\|\}$ に対する μ の値を表す.

Banach 空間ではこの種の定理が成り立たないのだろうか. それに対する答えがつぎの定理である. その証明にあたっては X_n [] の結果が有効に使われる.

補助定理6 (X_n) $p > 1$, $b > 0$ とする. このとき, E が一様凸な Banach 空間であるならば, $g(0) = 0$ であり, か

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p &\leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda) \|y\|^p \\ &\quad - W_p(\lambda) g(\|x-y\|), \\ &\quad \forall x, y \in B_b, 0 \leq \lambda \leq 1\end{aligned}$$

E 満たす continuous, strictly increasing, convex であるような関数 $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する. ただし, $B_b = \{x \in E: \|x\| \leq b\}$ で, $W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$ である.

定理 7 E を一様凸な Banach 空間, S を index set, $\{x_t: t \in S\}$ を有界な集合とする. X は 1 を含むような $m(S)$ の部分空間とし, $x \in C$ に対し

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される関数 f を X は含むものとする. このとき, X 上の submean μ によって定義される関数

$$g(z) = \mu_t \|x_t - z\|, \quad \forall z \in C$$

は C の中に最小となる点 x_0 を一意にもつ.

Banach 空間上で, かつ複数個の点に対して最短点となるものの特徴づけ定理を述べよう. その前に定義を一つ与えておこう. Banach 空間 E が (uG) であるとは, 任意の $y \in S(E)$ に対し, $(*)$ が x で一様収束することである.

定理 8 E を (uG) であるような Banach 空間とし, C を E の凸部分集合とする. $S, \{x_t\}, X$ を定理 7 のようなものとし, μ を X 上の mean, $z_0 \in C$ とする. このとき

$$\mu_t \|x_t - z_0\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|x_t - y\|^2$$

となる必要十分条件は

$$\mu_t (z - z_0, J(x_t - z_0)) \leq 0, \quad \forall z \in C$$

となることである。

§3. 最遠点定理

最後に最遠点定理について述べることにする。その前に定義も2, 3述べておく。E を Banach 空間とし, $C \subseteq E$ の閉で有界な集合とする。このとき

$$f_C(x) = \sup \{ \|x - z\| : z \in C \}, \quad \forall x \in E,$$

$$\partial f_C(x) = \{ x^* \in E^* : (y - x, x^*) + f_C(y) \leq f_C(x), \quad \forall y \in E \},$$

$$D(C) = \{ x \in E : \inf_{z \in C} (z - x, x^*) = -f_C(x), \quad \forall x^* \in \partial f_C(x) \}$$

とする。Lau の定理 [1] はつぎのようなものである。

定理 9 (Lau) E を Banach 空間とし, $C \subseteq E$ の weakly compact な集合とする。このとき任意の $x \in D(C)$ に対して

$$\|x - x_0\| = f_C(x)$$

となる $x_0 \in C$ が存在する。さらに $D(C)$ は G_δ -set であり, E で稠密である。

我々はこの定理を有限個の点の場合まで拡張する。ただしここでは2点の場合で命題を述べることにする。まず, $x_1, x_2 \in E$ に対して

$$f_C(x_1, x_2) = \sup_{z \in C} \frac{1}{2} (\|x_1 - z\| + \|x_2 - z\|),$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_C(x_1, x_2) &= \{x_1^* \in E^* : (y - x_1, x_1^*) + f_C(x_1, x_2) \\ &\leq f_C(y, x_2), \forall y \in E\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 f_C(x_1, x_2) &= \{x_2^* \in E^* : (y - x_2, x_2^*) + f_C(x_1, x_2) \\ &\leq f_C(x_1, y), \forall y \in E\} \end{aligned}$$

を定義する. これらに対し $D_2(C)$ は

$$D_2(C) = \{(x_1, x_2) \in E \times E :$$

$$\begin{aligned} \inf_{z \in C} ((z - x_1, x_1^*) + (z - x_2, x_2^*)) &= -f_C(x_1, x_2), \\ \forall (x_1^*, x_2^*) &\in \partial_1 f_C(x_1, x_2) \times \partial_2 f_C(x_1, x_2) \} \end{aligned}$$

で定義される. このときつぎの定理が成り立つ [5].

定理 10 (坂下-高橋) E を Banach 空間とし, C は E の weakly compact な集合とする. このとき, 任意の $(x_1, x_2) \in D_2(C)$ に対し

$$f_C(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (\|x_1 - z_0\| + \|x_2 - z_0\|)$$

となる $z_0 \in C$ が存在する. さらに $D_2(C)$ は G_δ -set であり, $E \times E$ で dense となる.

References

- [1] K.S. Lau, Farthest points in weakly compact sets, Israel J. Math. 22 (1975), 168-174.
- [2] A.T. Lau and W. Takahashi, Invariant means and semigroups of

- nonexpansive mappings on uniformly convex Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 152(1990), 497-505.
- [3] S. Miyajima and F. Wada, Uniqueness of a farthest point in a Banach spaces, to appear.
- [4] N. Mizoguchi and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis*, 14(1990), 69-80.
- [5] J. Sakashita and W. Takahashi, Farthest points in Banach spaces, to appear.
- [6] N. Shioji and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, *J. Math. Anal. Appl.* 135(1988), 383-398.
- [7] 高橋 涉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.
- [8] W. Takahashi and D. H. Teung, Fixed point theorem for nonexpansive map groups on Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 122(1994), 1175-1179.
- [9] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, *Nonlinear Analysis*, 16(1991), 1127-1138.