

On certain sharp characters with rational values

千葉大学院自然科学研究科 波多野 順 (Jun Hatano)

Graduate School of Science and Technology

Chiba University

1. INTRODUCTION

χ を有限群 G の degree n の character とし L を代数的整数の集合とする. そのとき, $L = \{\chi(g) \mid 1 \neq g \in G\}$ ならば, L を (G, χ) の type と呼ぶ. 一般に $|G|$ は $\prod_{l \in L} (\chi(1) - l)$ を整除する (Blichfeldt [2]) ことから, type L の (G, χ) が $|G| = \prod_{l \in L} (\chi(1) - l)$ を満たすとき, (G, χ) は sharp (pair) と呼ばれる. Cameron-Kiyota [4] により, type L の sharp pair (G, χ) を分類する問題が提起された.

この問題は部分的には解決されており, 特に $L \not\subset \mathbb{Z}$ のときは Alvis-Nozawa [1] により完全に分類されている. ここでは $L \subset \mathbb{Z}$ の場合について得られている結果と研究結果をまとめた.

2. SHARP CHARACTER

(G, χ) を sharp pair とすると, 任意の有理整数 m に対し $(G, \chi + m1_G)$ もまた sharp となる. そこで $(\chi, 1_G) = 0$ であるとき, (G, χ) は normalized であるといい, sharp pair の分類について考察するときは, (G, χ) は normalized であると仮定してよい.

以後, $L \subset \mathbb{Z}$ とし, (G, χ) は type L の normalized sharp pair と仮定する. さらに, $|L| = 2$ のとき, $L = \{l_1, l_2\}$ かつ $l_1 < l_2$ と仮定する.

$|L| = 1$ ならば, $\chi = \rho_G - 1_G$ であることが容易にわかる. 以下, $|L| = 2$ の場合について考察する. このとき, 次の等式が成り立つ.

Proposition 1.

- (1) $(\chi, \chi)_G = 1 - l_1 l_2$.
- (2)

$$c_1 = |\{g \in G \mid \chi(g) = l_1\}|,$$

$$c_2 = |\{g \in G \mid \chi(g) = l_2\}|$$

とおく. このとき

$$c_1 = \frac{(n - l_2)(nl_2 - l_1 l_2 + 1)}{l_2 - l_1},$$

$$c_2 = \frac{(n - l_1)(nl_1 - l_1 l_2 + 1)}{l_1 - l_2}$$

が成り立つ.

Proposition 1(1) により, $(\chi, \chi) = 1$ であることは L が 0 を含むことと同値である.

(χ, χ) が十分に小さい場合には, いくつかの結果が知られている. まず初めに, $(\chi, \chi) = 1$ の場合として, 次の結果がある.

Theorem 2 (Cameron-Kiyota [4]). $L = \{0, l\}$ ならば, G は 2-transitive Frobenius group.

次に, $(\chi, \chi) = 2$ の場合であるが, これは $L = \{-1, 1\}$ と同値である. さらに, χ が可約で, $l_2 - l_1 = 2$ を満たすこととも同値である. この場合に関しては, 次の定理が得られている.

Theorem 3 (Cameron-Kataoka-Kiyota [3]). $L = \{-1, 1\}$ ならば, 以下のいずれかが成立する:

- (1) G : 位数 8 の *dihedral* または *quaternion group*, $n = 3$,
- (2) G : S_4 または $SL(2, 3)$, $n = 5$,
- (3) G : $GL(2, 3)$ または *binary octahedral*, $n = 7$,
- (4) G : S_5 または $SL(2, 5)$, $n = 11$,
- (5) G : $L_2(7)$, $n = 13$,
- (6) G : A_6 , $n = 19$,
- (7) G : A_7 の *double cover* $\hat{A}_7$, $n = 71$,
- (8) G : M_{11} , $n = 89$.

$(\chi, \chi) = 3$ の場合は, $L = \{-2, 1\}$ または $\{-1, 2\}$ であることと同値であり, また, χ が可約で $l_2 - l_1 = 3$ となる場合とも同値である. この場合には, 次の 2 つの定理が得られている.

Theorem 4 (Iiyori [6]). $L = \{-2, 1\}$ または $\{-1, 2\}$ とし, $|G|$ は 3 と素で, χ は *generalized* でもよいとする. このとき G は位数 10 の *dihedral group* と同型である.

Theorem 5 (Nozawa-Uno [8]). $Z(G) \neq \{1\}$ とする. もし $L = \{-2, 1\}$ または $\{-1, 2\}$ ならば, 次のいずれかが成り立つ:

- (1) G : $Z_3 \times S_3$, $n = 4, 5$,
- (2) G : $Z_3 \times A_5$, $n = 13, 14$
- (3) G : $Z_3 \times L_2(7)$, $n = 22, 24$
- (4) $|G| = 2 \cdot 3^3$, $|G'| = 3^3$, $n = 7, 8$
- (5) $|G| = 2^2 \cdot 3^3$, $|G'| = 3^3$, $n = 10$

上記の 3 つの定理は, いずれも $l_2 - l_1$ の値が (χ, χ) を決定している. そこで, ある素数 p に対して, $(\chi, \chi) = p$ かつ $l_2 - l_1 = p$ を満たしている場合を考察し, 次の結果を得た.

Theorem 6. $L = \{1-p, 1\}$ または $\{-1, p-1\}$ とする. このとき, $|G|$ が p と素な *type L* の *sharp pair* (G, χ) は存在しない.

3. PRIME GRAPH

この節では, Theorem 6 の証明において大切な概念となる prime graph について定義と定理を述べる. 群 G の prime graph とは, 素因数集合 $\pi(G)$ を点集合とし, 異なる 2 点 p, q が隣接しているということを G が位数 pq の元を持つということで定めた graph と定義する. また, $\text{Com}(G)$ で G の prime graph の connected component 全体を表すものとし, π_1 は $|G|$ の最小素因数を含む connected component とする.

一般に, 次のことが示せる.

Proposition 7. 有限群 G に対して、次が成り立つ.

- (1) H を G の subgroup とし, ρ を H の prime graph の connected component とすると, G の prime graph の connected component で ρ を含むものが存在する.
- (2) N を G normal subgroup とし, ρ を G/N の prime graph の connented component とすると, G の prime graph の connected component で ρ を含むものが存在する.

次の結果は, Theorem 6 の証明において重要な役割を果たす定理である.

Theorem 8 (K. W. Gruenberg and O. Kegel). 有限群 G が $|\text{Com}(G)| \geq 2$ を満たすならば, G は次のいずれかと同型である:

- (1) Frobenius または 2-Frobenius,
- (2) simple,
- (3) simple による π_1 -group の拡大,
- (4) π_1 による simple の拡大,
- (5) π_1 の simple による拡大の π_1 による拡大.

4. THE CASE $L = \{1 - p, 1\}$ OR $\{-1, p - 1\}$

ここからは, ある奇素数 p に対して, $L = \{1 - p, 1\}$ または $\{-1, p - 1\}$ が成り立つものと仮定する.

このとき, 明らかに, $(n - l_1, n - l_2) = 1$ または $(n - l_1, n - l_2) = p$ が成り立つ.

r_1 と r_2 を p と異なる素数とし, r_1 は $n - l_1$ を r_2 は $n - l_2$ をそれぞれ割り切るとする.

もし G が位数 $r_1 r_2$ の元 x を持つならば, y と z をそれぞれ x の r_1 -part, r_2 -part とおく. χ は有理数値しかとらないので, $\chi(y) \equiv n \pmod{r_1}$ が成り立つ. したがって, $r_1 \neq p$ より, $\chi(y) = l_1$ がわかる. よって, $\chi(x) \equiv l_1 \pmod{r_2}$ となり, $\chi(x) = l_1$ が得られる. 同様にして, $\chi(x) = l_2$ も得られる. これは矛盾である. よって, G は位数 $r_1 r_2$ の元を持たない.

もし x が G の p' -element ならば, (G, χ) は sharp なので, x の位数は $n - l_1$ または $n - l_2$ の約数である. r を x の位数の素因数とし, x' を x の r' -part とする. すると $\chi(x) \equiv \chi(x') \pmod{r}$ が成り立つ. よって, x の位数の素因数の個数に関する帰納法から, $\chi(x) \equiv n \pmod{r}$ が得られる.

以上のことをまとめると, 次の proposition が得られる.

Proposition 9. ある素数 p に対して $l_2 - l_1 = p$ となるとき, (G, χ) は次の性質を満たす:

- (1) r_1 と r_2 を p と異なる素数とし, r_1 は $n - l_1$ を r_2 は $n - l_2$ をそれぞれ割り切るとする. このとき G は位数 $r_1 r_2$ の元を持たない.
- (2) G の p' -element x の位数が $n - l_1$ を割り切るならば, $\chi(x) = l_1$.
- (3) G の p' -element x の位数が $n - l_2$ を割り切るならば, $\chi(x) = l_2$.

特に, $|G|$ が p と素ならば, $|\text{Com}(G)| \geq 2$ である.

$(n - l_1, n - l_2) = 1$ の場合には, Proposition 9 から $|\text{Com}(G)| \geq 2$ が成り立つので, Theorem 8 を用いて, 2つの場合に分けて考察する.

case 1a: G が Frobenius または 2-Frobenius group.

case 1b: G は noncyclic composition factor S を持つ.

また, $(n - l_1, n - l_2) = p$ の場合には, 次の 2 つの場合に分ける.

case 2a: $n - l_1$ と $n - l_2$ のいずれかは p の冪である.

case 2b: $n - l_1$ と $n - l_2$ のいずれも p の冪でない.

Case 1a

K を G の subgroup, N を G の normal subgroup で K を含むものとする. さらに, H を K の G における complement で, HN が N を Frobenius kernel, H をその Frobenius complement にもつような Frobenius group になるようにとる. このとき, $K = N$ あるいは G/N は Frobenius kernel HN/N とその Frobenius complement K/N を持つような Frobenius group としてよい.

Frobenius kernel は nilpotent で, Frobenius complement は 単位群でない center を持つ. したがって, Proposition 7 から, $\pi(N)$ と $\pi(H)$, $\pi(K/N)$ はそれぞれ connected である. さらに, H は G で isolated となり, $\pi(H)$ は G の prime graph の connected component となる.

もし $\pi(K)$ が connected でないと仮定すると, N は G の normal isolated subgroup である. これは N が G の Frobenius kernel であることを示している. M を G の Frobenius complement とおく. M は G/N と同型であるから, $Z(M) = \{1\}$ となり, M が Frobenius complement であることに反する. したがって, $\text{Com}(G) = \{\pi(K), \pi(H)\}$ を得る.

$|G| = |H||K| = (n - l_1)(n - l_2)$ かつ $|H| < |N| \leq |K|$ であるから, Proposition 9 より, $|H| = n - l_2$, $|K| = n - l_1$ を得る.

χ の irreducible constituent への分解を

$$\chi = \sum_{\eta \in \text{Irr}(G)} a_{\eta} \eta,$$

と表し, $\chi_{HN} = \chi_1 + \chi_2$ を

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sum_{N \subseteq \ker \eta} a_{\eta} \eta_{HN}, \\ \chi_2 &= \sum_{N \not\subseteq \ker \eta} a_{\eta} \eta_{HN}. \end{aligned}$$

とおく.

HN は Frobenius group であるから, 次の表が得られる;

	1	$N \setminus \{1\}$	$HN \setminus N$
χ_{HN}	n	l_1	l_2
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(1)$	l_2
χ_2	$n - \chi_1(1)$	$l_1 - \chi_1(1)$	0

χ_2 の irreducible constituent の degree は全て $|H|$ で整除されるから, $|H|$ は $n - \chi_1(1)$ をも整除する. さらに, $|H| = n - l_2$ であり, $0 < n - \chi_1(1)$ であるから, $\chi_1(1) - l_2$ は $|H|$ で整除され, かつ $\chi_1(1) - l_2 < |H|$ を満たす. χ_1 は非負整数値 l_2 をとるので, $\chi_1(1) = l_2$ を得る. したがって, $\chi_{HN} = l_2 1_{HN} + \chi_2$. 特に, $\chi_2(1) = |H|$ である. これは χ_2 が HN

の irreducible character であることを示している. (HN, χ_2) は type $\{-p, 0\}$ となるから,

$$\begin{aligned} |K/N| &= (|K/N|_{\rho_{HN}}, 1_{HN})_{HN} \\ &= ((\chi_2 + p1_{HN}) \cdot \chi_2, 1_{HN})_{HN} \\ &= (\chi_2^2, 1_{HN})_{HN} = 1. \end{aligned}$$

これは χ が normalized であることに反する. よって Case 1a は起きない.

Case 1b

S を G の唯一の π'_1 -regular composition factor とする. p は奇素数であるから, 明らかに $\min(\pi(G)) = 2$ である. χ によって involution と同じ値をとる位数 r の元が存在するような $|G|$ の素因数 r 全体の集合を Γ とおく. また, $a = |G|_{\Gamma'}$, $b = |G|_{\Gamma}$ とする.

Proposition 9 により, π_1 は Γ に含まれるので $a = |S|_{\Gamma'}$ がいえる. (G, χ) は sharp であるから, $ab = (n - l_1)(n - l_2)$ となる. さらに, Proposition 9 から, $b - a = \varepsilon(l_2 - l_1) = \varepsilon p$ となる. ここで, $\varepsilon = \pm 1$ とする. したがって,

$$\begin{aligned} a(a + \varepsilon p) &= n^2 - (l_1 + l_2)n + l_1 l_2 \\ &= n^2 + (2a + \varepsilon p - 2n)n + 1 - p. \end{aligned}$$

より, $n = a + \varepsilon$ または $a + \varepsilon(p - 1)$ を得る. また, $(\chi, \chi)_G = p$ と Proposition 1 より, n は p で割り切れる. したがって, $n = kp$ とおくと,

$$(1) \quad kp = a + \varepsilon \text{ で,}$$

$$b = a + \varepsilon \frac{a + \varepsilon}{k} \leq (1 + \varepsilon)a + 1,$$

または

$$(2) \quad kp = a + \varepsilon(p - 1) \text{ で,}$$

$$b = a + \varepsilon \frac{a - \varepsilon}{k - \varepsilon} \leq \frac{2a - 1}{2 - \varepsilon}.$$

特に, (1) の場合で $\varepsilon = -1$ のときは, $b \leq 1$ となり, $\min(\pi(G)) = 2$ であることに反する. このことと, $p = \varepsilon(b - a)$ に注意すると, 次のいずれかが成り立つことがわかる.

- i) $\varepsilon = 1$, $n = a + 1$, $a < b$ のとき,
 $b < 2a + 1$ であり, $b - a$ は p と等しく, $a + 1$ を整除する.
- ii) $\varepsilon = 1$, $n = a + p - 1$, $a < b$ のとき,
 $b < 2a - 1$ であり, $b - a$ は p と等しく, $a - 1$ を整除する.
- iii) $\varepsilon = -1$, $n = a - p + 1$, $a > b$ のとき,
 $a - b$ は p と等しく, $a + 1$ を整除する.

いずれの場合も, $b < 2a + 1$ が成り立っている. したがって, proposition 7 より, $|S|_{\Gamma} < 2a + 1$ を得る. しかし, ほとんどの simple group は $|S|_{\Gamma} > 2a + 1$ となっている.

[5], [7], [9] から, 具体的に $|S|_{\Gamma} < 2a + 1$ を満たす可能性のある finite simple group を確認すると, S は次のいずれかを満たすことが分かる:

- (1) sporadic simple group J_1 , $|S|_{\Gamma} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
- (2) alternating group A_5 , $|S|_{\Gamma} = 2^2$,

- (3) alternating group A_6 , $|S|_{\Gamma} = 2^3$,
- (4) Lie type の simple group $L_2(q)$ (q : even), $|S|_{\Gamma} = q$,
- (5) Lie type の simple group $L_2(q)$ ($q \equiv 1 \pmod{4}$), $|S|_{\Gamma} = q - 1$,
- (6) Lie type の simple group $L_2(q)$ ($q \equiv -1 \pmod{4}$), $|S|_{\Gamma} = q + 1$,
- (7) Lie type の simple group $L_3(2)$, $|S|_{\Gamma} = 2^3$,
- (8) Lie type の simple group $L_3(4)$, $|S|_{\Gamma} = 2^6$,
- (9) Lie type の simple group ${}^2B_2(2^{2m+1})$, $|S|_{\Gamma} = q^2$.

$b-a$ は素数であることから, $J_1, A_5, A_6, L_3(2), L_3(4)$ は不適となることがわかる.

Proposition 7, Proposition 9 そして Theorem 8 から, G の Γ' -element の個数は S の Γ' -element の個数の倍数である. そのことから Proposition 1 (2) が適用でき, S は $L_2(11)$ と同型で, G は Theorem 8 の (4) の場合で, $|G| = 4|S|$ と $p = 7$ が成り立つことが得られる. しかし, $L_2(11)$ は位数 5 の元を含む共役類を 2 個しか持たないので, $|G| = 4|S|$ に反する. よって, case 1b も起きない. これで Theorem 6 は証明された.

Case 2

この場合は, まだ部分的な結果しか得られていない. 前述したように 2 つの場合に分けた理由は, case 2b のときには, $\pi(n-l_1) \setminus \{p\}, \pi(n-l_2) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ と $(\frac{n-l_1}{p}, \frac{n-l_2}{p}) = 1$ を満たすので, G は $\text{Com}(G/N) \geq 2$ となるような normal subgroup N を持っている可能性があり, 再び Theorem 8 が適用できると考えられることによる. case 2b で, $Z(G) \neq \{1\}$ の仮定をすると, 次の結果が得られる.

Proposition 10. $(n-l_1, n-l_2) = p$ かつ $\pi(n-l_1) \setminus \{p\}, \pi(n-l_2) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ を満たし, $Z(G) \neq \{1\}$ とする. このとき, ζ を原始 p -乗根とし, $\mathcal{G}_p = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ とおくと, 以下のことが成り立つ:

- (1) $\chi = \chi_0 + \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \eta^{\sigma}$. ここで, χ_0, η は G の irreducible character で, かつ χ_0 は real.
- (2) $|Z(G)| = p$.

proof.

case 2b の仮定と Proposition 9 により, $Z(G)$ は p -group である. x を位数 p の $Z(G)$ の元とする. χ は faithful であるから, $\langle x \rangle$ を kernel に含まない irreducible constituent η が存在する. 特に, $\eta(x) = \zeta \eta(1)$ としてよい. χ は real であるから, 任意の $\sigma \in \mathcal{G}_p$ に対して, $(\chi, \eta) = (\chi, \eta^{\sigma})$ と $\eta \neq \eta^{\sigma}$ が成り立つ. したがって, χ は同じ multiplicity の $p-1$ 個の異なる irreducible constituent を持つ. さらに, $(\chi, \chi) = p$ より, $(\chi, \eta) = 1$ が得られる. よって, χ はちょうど p 個の irreducible constituent を持つ.

n は p で整除されないから, χ は 1 つだけ degree の異なる irreducible constituent χ_0 を持つ. したがって, $\chi = \chi_0 + \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \eta^{\sigma}$ となる. 特に, $\text{Ker } \chi \leq Z(G)$ であるから, 任意の $Z(G)$ の位数 p の元 x, y に対して, $\eta(x) = \eta(y^i) = \zeta^i \eta(1)$ とおける. したがって, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ となり, $|\Omega_1(Z(G))| = p$ が示された.

また, 任意の $Z(G)$ の元 z に対して, ある原始 p^m -乗根 ζ_{p^m} を用いて $\eta(z) = \zeta_{p^m} \eta(1)$ と表すことができる. したがって,

$$p = |\text{Irr}(\chi)| \geq p^{m-1}(p-1)$$

より, $m = 1$ が得られる. これは $z^p \in \text{Ker } \eta$ を示している. よって, χ の分解から $z^p = 1$ を得る.

χ_0 が real であることは, χ_0 の degree から明らかである. $\square$

case 2a のときは, l_1, l_2 のいずれかが p -element 上にしか現れないことになり, 他の場合に比べて p -subgroup の構造以外に G の構造に影響を及ぼす条件が少ないと考えられる. したがって, 予想外の群が出てくる可能性が一番高い場合であると思われる. 特別な場合として, 最小位数のときを決定した.

Proposition 11. $|G| = 2p^2 = p(p+p)$ ならば, G は $Z_p \times D_{2p}$ または $(Z_p \times Z_p) \cdot 2$ と同型になる.

proof.

G は abelian でないとしてよい. $P \in \text{Syl}_p(G)$ とし, t を G の involution とする.

P が isolated のとき, G は Frobenius group である. $\chi(t)$ と同じ値をとる G の元の個数に Proposition 1 (2) を適用すると, P は cyclic でないことがわかる. よって, $G \simeq (Z_p \times Z_p) \cdot 2$ となる.

P が $C_G(x) \not\subseteq P$ を満たす元 x を持つとき, P は abelian であるから, cyclic でない. よって, $G \simeq Z_p \times D_{2p}$ となる.

どちらの場合も, $\chi(1) = 2p - 1$ となる type $\{-1, p-1\}$ の sharp pair (G, χ) が存在する. $\square$

Proposition 11 から, center が単位群になる sharp pair (G, χ) も実際に存在することがわかる. Theorem 5 の center に関する仮定はできれば取り除き, 一般の素数 p の場合に拡張できることが望ましい.

REFERENCES

- [1] D. Alvis and S. Nozawa: *Sharp characters with irrational values*, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 567-591.
- [2] H. F. Blichfeldt: *A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups with some applications to substitution groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **5**(1984), 461-466.
- [3] P. J. Cameron, T. Kataoka and M. Kiyota: *Sharp characters of finite groups of type $\{-1, 1\}$* , J. Algebra, **152**(1967), 248-258.
- [4] P. J. Cameron and M. Kiyota: *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra **115** (1988), 125-143.
- [5] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson: *ATLAS of finite groups*, Clarendon Press, Oxford (1985).
- [6] N. Iiyori: *Sharp characters and Prime Graphs of Finite Groups*, J. Algebra, **163**(1976), 1-8.
- [7] N. Iiyori and H. Yamaki: *Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type over the Field of Even Characteristic*, J. Algebra, **155**(1993), 335-343.
- [8] S. Nozawa and M. Uno: *On sharp characters of rank 2 with rational values*, preprint.
- [9] J. S. Williams: *Prime Graph Components of Finite Groups*, J. Algebra, **69**(1981), 487-513.