

分岐特性 Cauchy 問題の解の真性特異点

HIDESHI YAMANE 山根 英司¹

§1. 結果

S と K を $\mathbb{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, x')$ の超曲面で, それぞれ $x_1 = x_2^q$ と $x_1 = 0$ で定義されるものとする。ここで q は 2 以上の整数。 $x = 0$ における多価関数のクラス $\mathcal{N}_{q,K}$ を導入する。その定義は

$$f(x) \in \mathcal{N}_{q,K} \iff f(x) = \sum_{j=0}^{q-1} f_j(x) x_1^{j/q}, \quad f_j \text{ は } x = 0 \text{ の近傍で正則。}$$

また,

$$\mathcal{N}_{q,K}^l = \{f(x) \in \mathcal{N}_{q,K}; \quad f \text{ は } S \text{ 上で } l \text{ 回消える} \} \quad (l \geq 0)$$

とおく。さらに次のようにおく:

$$\sum_{j=0}^{q-1} x_1^{j/q} \lim_{X \ni 0} \mathcal{O}(X \setminus K)。$$

$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}$ は多価関数や真性特異点を持つ関数を含む。Cauchy 問題を設定するために次のクラスを導入する:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^l = \{f \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}; \quad f \text{ は } S \text{ 上で } l \text{ 回消える} \} \quad (l \geq 0)。$$

次が主定理である。

定理 1. $P(x, D)$ を原点の近傍で定義された微分作用素で次の形のものとする:

$$P(x, D) = D_1^{A_1} D_2^{A_2} - \sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} D^\alpha a_\alpha(x), \quad A_1 \geq 0, A_2 \geq 0。$$

ここで $a_\alpha(x)$ は原点の近傍で正則で x_1 と x_2 について多項式とする。この時, 任意の $v(x) \in D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ に対し, $\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^{A_1+A_2}$ の元 $u(x)$ がただ一つ存在して

$$Pu = v$$

が成り立つ。

注意. もし $\sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} D^\alpha a_\alpha(x)$ が D_1 に関して高々 $A_1 - 1$ 階ならば, 解 u は $\mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}$ に属する。

¹Department of Mathematics, Chiba Institute of Technology, 2-1-1 Shibazono, Narashino, Chiba 275, Japan. e-mail address: BYY03467@niftyserve.or.jp (冒険小説&ハードボイルド・フォーラム)

定理 2. (岡田靖則-山根) $A_1 \geq 1$ と仮定する。この時

(A) $x_1^{-\frac{q-1}{q}} \mathcal{N}_{q,K} \subset D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$. さらに $A_1 = 1$ の時は等号が成り立つ。

(B) もし $l \geq q$ ならば $x_1^{-\frac{l}{q}} \notin D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ 。

§2. 浜田の例

浜田 ([H]) は次の例を与えた。

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = 0 \\ u|_S = \gamma_1 x_2^3, \quad D_1 u|_S = \gamma_2 x_2. \end{cases}$$

ただし

$$S = \{x_1 = x_2^2\}, \quad \gamma_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(m - \frac{3}{2})}{(2m)!}, \quad \gamma_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(m - \frac{1}{2})}{(2m)!}.$$

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(m - \frac{3}{2})}{(2m)!} x_1^{\frac{3}{2}-m} x_2^{2m}$$

で与えられる。これは分岐しており、さらに真性特異点を持っている。この現象を我々の観点から解釈しよう。まず問題を次の形のものに帰着する:

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = v(x), & v \in \mathcal{O}_{x=0} \text{ は既知} \\ u|_S = 0, \quad D_1 u|_S = 0. \end{cases}$$

マイクロ微分作用素

$$\begin{aligned} (D_2^2 - D_1)^{-1} &= (1 - D_1 D_2^{-2})^{-1} D_2^{-2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (D_1 D_2^{-2})^j D_2^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} \end{aligned}$$

を用いて、解を

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} v(x)$$

のように表示できる。

$z = x_1^{1/2}$ とおくと、次を得る:

$$u(z^2, x_2, x') = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z} D_z \right)^j D_2^{-2j-2} v(z^2, x_2, \dots, x_n).$$

分岐は D_2^{-2j-2} のために起きる (←次のセクション参照)。真性特異点が現れるのは $(\frac{1}{2z}D_z)^j$ という因子のせいである。

§3. マイクロ微分作用素と多価関数

D_2^{-1} の $\mathcal{O}_{x=0}$ への作用を定義しよう。 $f(x) \in \mathcal{O}_{x=0}$ に対して $D_2^{-1}f$ は次の式で定義される:

$$D_2^{-1}f(x) = \int_{x_1^{1/q}}^{x_2} f(x_1, y_2, x') dy_2 \circ$$

積分の始点がこのようであるから、 $f(x)$ が一価正則であっても、 $D_2^{-1}f(x)$ は一価とは限らない。なお $D_2^{-1}f(x)$ は $x_2 = x_1^{1/q}$ の上で 0 になることに注意しよう。こうして

$$D_2^{-1}: \mathcal{O}_{x=0} \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}^1$$

が定義された。多価関数が気持ち悪ければ $z = x_1^{1/q}$ と置いてやって

$$D_2^{-1}: \mathbb{C}\{z^q, x_2, x'\} \rightarrow \mathcal{O}_{(z, x_2, x')=0}^1 = \{g(z, x_2, x') \in \mathcal{O}_{(z, x_2, x')=0}; g|_{z=x_2=0} = 0\}$$

と書けば良い。積分表示は容易に判る。こう書くと評価がしやすいし、また、 D_2^{-2} , D_2^{-3} , ... の定義もしやすい。結局

$$D_2^{-1}: \mathcal{N}_{q,K}^l \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

が定義される。

定理 1 も §2 と同様に微分作用素の逆を用いて証明される。詳細は [Y2] をご覧下さい。

REFERENCES

- [Bou-Kr] Boutet de Monvel, L. and Kreé, P., *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier, **17-1** (1967), 295–323.
- [D] Dunau, J., *Un Problème de Cauchy Caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369–402.
- [G-K-L] Gårding, L., Kotake, T. and Leray, J., *Problème de Cauchy, I bis et VI*, Bull. Soc. Math. de France **92** (1964), 263–361.
- [H] Hamada, Y., *Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes*, Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), Longman, 1988, pp. 82–95.
- [K-K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. and Kimura, T., *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese) ; English translation from Princeton, 1986.

- [L] Leray, J., *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 389-429.
- [N-S] Nakamura, G. and Sasai, T., *The singularities of the solutions of the Cauchy problem for second order equations in case the initial manifold includes characteristic points*, Tôhoku Math. Journ. **28** (1976), 523-539.
- [O-Y] Okada, Y. and Yamane, H., *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, to appear in J. Math. pures et appl.
- [Y] Yamane, H., *Branching of singularities for some second or third order microhyperbolic operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (3) (1996).
- [Y2] Yamane, H., *The Essential Singularity of the Solution of a Characteristic Cauchy Problem*, Publ.RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 541-556.