

## 連続関手と一般コホモロジー

### Continuous functors and generalized cohomology

岡山大学大学院自然科学研究科 島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)  
Department of Mathematics, Okayama University

#### 1 はじめに

前回の報告「連続関手と一般ホモロジー」(参考文献 [1]) では, 連続関手の概念に基づく一般ホモロジーの構成法について論じた。ここでは, 一般ホモロジーと対をなす概念である一般コホモロジーの同様な構成法について述べる。

ただし, 一般ホモロジーの場合と異なり, 一般コホモロジーを表現するには連続関手を拡張した概念である連続双変関手を用いる必要がある。したがって, 本報告で取り扱う一般コホモロジーの構成法は, 必然的に一般ホモロジーの構成を内包するものとなっている。

また, 我々の構成法の, スペクトラムを用いる従来の方法に対する優位性は, (コンパクトリー群の作用の下での) 同変理論の構成においてより鮮明になるので, これについても論じたい。

#### 2 双変関手

$A, B, C$  がカテゴリーであるとき,  $A$  および  $B$  の射の組  $(f, g)$  に対して,  $C$  の射  $F(f, g)$  を対応させる対応  $F: A \times B \rightarrow C$  を考える。

定義 1. 以下の性質を満たす  $F: A \times B \rightarrow C$  を双変関手とよぶ。

1.  $A$  の射  $f: a \rightarrow a'$  および  $B$  の射  $g: b \rightarrow b'$  に対して,  $F(f, g)$  は,  $F(a, b)$  から  $F(a', b')$  への射であり, 次が成り立つ。

$$(a) \quad F(1_a, 1_b) = 1_{F(a, b)}$$

$$(b) F(f, g) = F(1_{a'}, g) \circ F(f, 1_d) = F(f, 1_{d'}) \circ F(1_a, g)$$

2.  $\mathcal{A}$  の射  $f, f'$  が合成可能であれば,  $\mathcal{B}$  の任意の対象  $d$  に対して, 次が成り立つ。

$$F(f' \circ f, 1_b) = F(f', 1_b) \circ F(f, 1_b)$$

3.  $\mathcal{B}$  の射  $g, g'$  が合成可能であれば,  $\mathcal{A}$  の任意の対象  $a$  に対して, 次が成り立つ。

$$F(1_a, g' \circ g) = F(1_a, g') \circ F(1_a, g)$$

上の定義において,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  がすべて位相カテゴリーであり, 対応

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(a, a') \times \text{hom}_{\mathcal{B}}(b, b') \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(a, b), F(a', b')), \quad (f, g) \mapsto F(f, g)$$

がすべての  $a, a' \in \mathcal{A}, b, b' \in \mathcal{B}$  に対して連続であるとき,  $F$  は連続であるという。

### 3 双変関手と一般コホモロジー

基点付き空間を対象とし, 基点を保つ連続写像を射とするカテゴリーを  $\text{Top}_*$  とかく。ただし, 以後の構成においては  $\text{Top}_*$  がカルテシアン閉 (cartesian closed) であることが必要となるので,  $\text{Top}_*$  の対象をコンパクト生成位相をもつものに限ることにする。したがって, 直積  $X \times Y$  および写像空間  $Y^X = \text{Map}_0(X, Y)$  も, 通常の直積位相ないしコンパクト開位相ではなく, それらから構成されるコンパクト生成位相に取り替える必要が生じる。<sup>1</sup>

一般コホモロジーを定義するために我々が用いるのは, 条件

$$F(X, *) = F(*, Y) = * \quad (X, Y \in \text{Top}_*)$$

を満たすような連続双変関手  $F: \text{Top}_*^{\text{op}} \times \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  である。以後, 双変関手といえば, このような形の連続双変関手を指すものとする。

**命題 2.** 双変関手  $F: \text{Top}_*^{\text{op}} \times \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  に対して, 次が成り立つ。

(1) 連続写像  $W \wedge Y \rightarrow Y'$  に対して,

$$W \wedge F(X, Y) \rightarrow F(X, Y'), \quad F(X, W) \wedge Y \rightarrow F(X, Y')$$

が自然に定まる。

(2) 連続写像  $V \wedge X \rightarrow X'$  に対して,

$$V \wedge F(X', Y) \rightarrow F(X, Y), \quad F(V, Y) \wedge X' \rightarrow F(X, Y)$$

が自然に定まる。

<sup>1</sup>  $X$  が局所コンパクト・ハウスドルフ空間 (例えば,  $S^1$ ) であれば,  $X \times Y$  あるいは  $\text{Map}_0(X, Y)$  の位相は通常の位相に一致するので, これは実用上は大きな障害ではない。

証明. 例えば,  $V \wedge F(X', Y) \rightarrow F(X, Y)$  は, 合成写像

$$V \rightarrow \text{Map}_0(X, X') \rightarrow \text{Map}_0(F(X', Y), F(X, Y))$$

の随伴として得られる。その他についても同様。 □

これから直ちに次が従う。

系 3 (ホモトピー不変性). (1)  $f \simeq g: X \rightarrow X'$  であれば, 任意の  $Y$  に対して

$$F(f, 1_Y) \simeq F(g, 1_Y): F(X', Y) \rightarrow F(X, Y)$$

が成り立つ。

(2)  $h \simeq k: Y \rightarrow Y'$  であれば, 任意の  $X$  に対して

$$F(1_X, h) \simeq F(1_X, k): F(X, Y) \rightarrow F(X, Y')$$

が成り立つ。

系 4.  $X, Y$  を固定するとき, 基点付き空間の族  $\{F(X, \Sigma^n Y) \mid n \geq 0\}$  は, 恒等写像  $S^1 \wedge Y \rightarrow \Sigma Y$  によって誘導されるペアリング

$$S^1 \wedge F(X, \Sigma^n Y) \rightarrow F(X, \Sigma \Sigma^n Y) = F(X, \Sigma^{n+1} Y)$$

を構造写像にもつ (プリ) スペクトラムである。

定義 5. 以下の性質を満たす双変関手  $F$  を双変完全関手とよぶ。

(1) 任意の  $X$  および任意の基点付き空間対  $(Y, B)$  に対して, 包含写像によって誘導される系列

$$F(X, B) \rightarrow F(X, Y) \rightarrow F(X, Y \cup CB)$$

は, ホモトピーファイバー系列である。

(2) 任意の基点付き空間対  $(X, A)$  と任意の  $Y$  に対して, 包含写像によって誘導される系列

$$F(X \cup CA, Y) \rightarrow F(X, Y) \rightarrow F(A, Y)$$

は, ホモトピーファイバー系列である。

とくに,  $X$  を固定するとき, 共変関手  $Y \mapsto F(X, Y)$  は, [1] の意味での完全関手であり, これから,  $F(X, Y)$  がホモトピー可換な Hopf 空間であることがしたがう。<sup>2</sup>

したがって, 任意の  $X, Y$  に対して, 各  $\pi_n F(X, Y)$  は可換モノイドであり, さらに  $n > 0$  ならば可換群である。

---

<sup>2</sup>より正確にいうならば, 対応  $P \mapsto F(X, P \wedge Y)$  ( $P$  は基点付き有限集合) が特殊  $\Gamma$  空間である。

定義 6. すべての  $X, Y$  に対して,  $F(X, Y)$  が群状 (すなわち,  $\pi_0 F(X, Y)$  が可換群) であるとき, 双変関手  $F$  は安定であるという。

命題 7.  $F$  が安定であれば, 任意の  $X, Y$  に対して,

$$\sigma: F(X, Y) \rightarrow \Omega F(X, \Sigma Y), \quad \sigma': F(\Sigma X, Y) \rightarrow \Omega F(X, Y)$$

はどちらも弱ホモトピー同値写像である。

$F$  が安定双変関手であるとき, 基点付き空間  $X$  および整数  $n$  に対して, 可換群

$$h^n(X, F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_0 F(\Sigma^k X, S^{n+k})$$

を, 弱ホモトピー同値

$$F(\Sigma^k X, S^{n+k}) \xrightarrow{\cong} \Omega F(\Sigma^k X, S^{n+k+1}) \xleftarrow{\cong} F(\Sigma^{k+1} X, S^{n+k+1})$$

から誘導される同型射の系列

$$\cdots \rightarrow \pi_0 F(\Sigma^k X, S^{n+k}) \rightarrow \pi_0 F(\Sigma^{k+1} X, S^{n+k+1}) \rightarrow \cdots$$

の極限として定める。定義から直ちに次が成り立つことがわかる。

$$h^n(X, F) \cong \begin{cases} \pi_0 F(X, S^n), & n \geq 0 \\ \pi_{-n} F(X, S^0), & n < 0 \end{cases}$$

定理 8. 対応  $X \mapsto \{h^n(X, F) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  は一般コホモロジーである。

実際, ホモトピー性質は系 3 の帰結であり, 一方, 系列

$$h^n(X \cup CA, F) \rightarrow h^n(X, F) \rightarrow h^n(A, F)$$

の完全性は安定連続関手の定義そのものである。また, これら二つの性質と Puppe 系列から直ちに懸垂同型  $h_n(X, F) \cong h_{n+1}(\Sigma X, F)$  が得られる。

注意 9.  $F$  が安定双変関手であれば,  $\{F(S^0, S^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  は  $\Omega$  スペクトラムであり, これから定義される一般コホモロジーが  $X \mapsto \{h^n(X, F) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  に他ならない。

## 4 基本的な例

連続関手  $T: \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  が与えられれば,

$$F(X, Y) = TY^X \quad (X, Y \in \text{Top}_*)$$

とおくことにより, 双変関手  $F$  が得られる。

命題 10.  $T$  が安定連続関手であれば、それから定義される  $F$  は安定双変関手であり、したがって、一般コホモロジーを定める。

逆に、Brown の表現定理により、任意の一般コホモロジーは、上のような形の（すなわち、安定連続関手から定まる）双変関手によって表現されることがわかる。

しかしながら、これは  $(X, Y) \mapsto TY^X$  以外の形の双変関手を考察することの重要性を否定するものではない。実際、 $C^*$  環の対  $(A, B)$  に対するカスパロフ  $KK$  理論が、 $A$  から  $B \otimes \mathcal{K}$  への  $C^*$  準同型のなす空間  $F(A, B)$  で表現されることが知られているが、このとき、 $A$  および  $B$  として、 $Y$  および  $X$  上の関数環にとることにより特別な形の連続双変関手が得られ、それから周期的  $K$  理論を再構成することができる。

## 5 種々の考察

### 5.1 ホモロジーとの関連

$F$  が安定双変関手であれば、その共変部分  $T: X \mapsto F(S^0, X)$  は安定連続関手であり、対応

$$X \mapsto h_n(X, T) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_{n+k} T(\Sigma^k X) \cong \begin{cases} \pi_n TX, & n \geq 0 \\ \pi_0 T(\Sigma^{-n} X), & n < 0 \end{cases}$$

は、スペクトラム  $\{TS^n \mid n \geq 0\}$  で表現される一般ホモロジーである。

一方、 $\{TS^n\} = \{F(S^0, S^n)\}$  で表現される一般コホモロジーが、本稿で構成した  $X \mapsto h^*(X, F)$  であった。結局、一般コホモロジーを表現する安定双変関手  $F$  が与えられれば、対応する一般ホモロジーは、 $F$  の共変部分で表現され、逆に、一般ホモロジーを表現する安定関手  $T$  が与えられれば、それから構成される双変関手  $(X, Y) \mapsto TY^X$  は自動的に安定であり、対応する一般コホモロジーを表現する。

### 5.2 認識原理

与えられた双変関手  $F: \text{Top}_*^{\text{op}} \times \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  が安定であるか否かを判定する条件を見つけること、および非安定な双変関手から安定な双変関手を構成する方法を確立することは実用上も重要である。

双変関手  $F$  が完全であれば、

$$F'(X, Y) = \Omega F(X, \Sigma Y)$$

とにおいて得られる  $F'$  は安定であり、自然変換  $F(X, Y) \rightarrow F'(X, Y)$  は群完備化である。したがって、完全性の判定が主要な問題となる。

共変部分の完全性に関しては、次の十分条件が得られている。

**命題 11.** 連続関手（例えば、双変関手の共変部分） $T: \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  が以下の二つの条件を満たすならばそれは完全である。

(C1) 任意の  $X, Y \in \text{Top}_*$  に対して、自然な写像  $X \vee Y \rightarrow X$  および  $X \vee Y \rightarrow Y$  によって誘導される写像  $T(X \vee Y) \rightarrow TX \times TY$  は弱ホモトピー同値である。

(C2) 任意の（基点付き）単体空間  $X_\bullet$  に対して、写像の族

$$\Delta_+^n \wedge T(X_n) \rightarrow T(|X_\bullet|), \quad n \geq 0$$

から誘導される写像  $|T(X_\bullet)| \rightarrow T(|X_\bullet|)$  はホモトピー同値写像である。

とくに、 $F(X, Y) = TY^X$  で与えられる双変関手  $F$  の反変部分は、自動的に完全性を満たすので、 $T$  が上の命題の条件を満たせば—すなわち、 $T$  が完全なら— $F$  は完全である。残念ながら、一般的な  $F$  に関しては、反変部分の完全性が成り立つための十分条件は未だ得られていない。

### 5.3 同変理論

ここまで述べてきた構成は極めて自然な形でコンパクトリー群  $G$  が作用する状況へ拡張することができる。ただし、そのためには  $\text{Top}_*$  を、基点付き  $G$  空間を対象とし、全ての基点を保つ（必ずしも  $G$  同変とは限らない）連続写像を射とする  $G$  カテゴリー  $\text{Top}_*(G)$  に取り替え、双変関手  $F: \text{Top}_*(G)^{\text{op}} \times \text{Top}_*(G) \rightarrow \text{Top}_*(G)$  に対して、 $G$  同変であるという条件を課す必要がある。

このとき、 $F$  が  $G$  同変一般コホモロジーを定義するための条件は次のように定式化される。

**定義 12.** 以下の性質が成り立つとき、 $F$  は  $G$  安定であるという。

(1) 任意の基点付き  $G$  空間対  $(Y, B)$  に対して、包含写像によって誘導される系列

$$F(X, B) \rightarrow F(X, Y) \rightarrow F(X, Y \cup CB)$$

は、 $G$  ホモトピーファイバー系列である。

(2) 任意の基点付き  $G$  空間対  $(X, A)$  に対して、包含写像によって誘導される系列

$$F(X \cup CA, Y) \rightarrow F(X, Y) \rightarrow F(A, Y)$$

は、 $G$  ホモトピーファイバー系列である。

(3)  $V$  が有限次元直交  $G$  加群であるとき,  $V$  の単位球面内の任意の推移的  $G$  不変部分集合  $P \cong G/H$  に対して, 双対性写像

$$\Phi: F(X, \nu P^c \wedge Y) \rightarrow \text{Map}_0(P_+, F(X, \Sigma^V Y))$$

は弱ホモトピー同値である。ここに,  $\nu P^c$  は  $P$  の  $\varepsilon$  近傍 ( $\varepsilon \ll 1$ ) の一点コンパクト化を表し,  $\Phi$  は平行移動  $P \times O_\varepsilon \rightarrow P_\varepsilon$  に Pontrjagin-Thom 構成を施し, さらに  $Y$  とのスマッシュ積をとることによって得られるペアリング

$$P_+ \wedge \nu P^c \wedge Y \rightarrow O_\varepsilon^c \wedge Y = \Sigma^V Y$$

から誘導される連続写像である。

## 参考文献

- [1] 島川和久. 連続関手と一般ホモロジー. 角俊夫 (編), 変換群論の手法. 数理解析研究所講究録, 第 1517 巻, pp. 353–364. 数理解析研究所, 2006.