

digit の block によって定義されるベキ級数の代数的独立性

慶應義塾大学理工 内田佳久 (Yoshihisa Uchida)

1 準備

q を 2 以上の整数とする, W を $0, 1, \dots$, または $q-1$ からなる長さ有限の block の全体とする. 即ち

$$W := \{ b_1 \cdots b_l \mid b_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}, l \geq 1 \}.$$

$w = b_1 \cdots b_l \in W$ ($b_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$) に対して $|w| := l$,

$$v(w) := \begin{cases} \sum_{i=1}^l b_i q^{l-i} & (w \neq 0^l) \\ q^l & (w = 0^l) \end{cases}$$

とおく. ここで $0^l = \overbrace{0 \cdots 0}^l$ とする. $w \in W$ と正整数 n に対し, $e(w; n)$ を n の q 進展開

$$n = a_k a_{k-1} \cdots a_0 = \sum_{i=0}^k a_i q^i \quad (a_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}, a_k \neq 0)$$

に現れる w の個数とする. 但し $w \neq 0^l$ ($l \geq 1$) のときは, a_k の前に 0 がいくつか並んでいるものとし, $w = 0^l$ のときはこの様な修正は行わない (Allouche and Shallit [1] 参照). 即ち $|w| = l$ のとき

$$e(w; n) := \#\{ i \leq k \mid a_{i+l-1} \cdots a_i = w \}.$$

但し $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$. また任意の $w \in W$ に対して $e(w; 0) = 0$ と定める.

定義より次の等式が成り立つ. $w \in W$, $|w| = l$ とすると, 任意の $n \geq 0$ に対

して

$$e(w; n) = \sum_{b=0}^{q-1} e(bw; n), \quad (1)$$

$$e(w; n) = \sum_{b=0}^{q-1} e(bw; n) + \begin{cases} 1 & (n \equiv v(w) \pmod{q^l}) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (2)$$

また少なくとも一方が 0 でない整数 $m, n \geq 0$ ($m < q^l$) に対して

$$e(w; q^l n + m) = e(w; q^{l-1} n + [m/q]) + \begin{cases} 1 & (m \equiv v(w) \pmod{q^l}) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (3)$$

本論文において数列 $\{e(w; n)\}_{n \geq 0}$ で生成された巾級数

$$f(w; z) := \sum_{n \geq 0} e(w; n) z^n$$

及びその代数的数における値の代数的独立性を論ずる. なお数列 $\{e(w; n)\}_{n \geq 0}$ は, いわゆる q -regular 数列 (Allouche and Shallit [2] 参照) である. q -regular 数列の生成するべき級数の値については Becker [3] が一般的な結果を得ているので参照されたい.

2 関数 $f(w; z)$ の超越性

定理 1 任意の $w \in W$ に対して, $f(w; z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的で次の関数方程式を満たす.

$$f(w; z) = \frac{1 - z^q}{1 - z} f(w; z^q) + \frac{z^{v(w)}}{1 - z^{q^l w}}. \quad (4)$$

証明 簡単のため $l = |w|$,

$$m_0 = \begin{cases} v(w) & (w \neq 0^l), \\ 0 & (w = 0^l), \end{cases} \quad \delta = \begin{cases} 1 & (m_0 \neq 0), \\ 0 & (m_0 = 0), \end{cases}$$

とおき, (3) を用いると

$$\begin{aligned}
 f(w; z) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{q^{l-1}-1} \sum_{r=0}^{q-1} e(w; q^l n + qm + r) z^{q^l n + qm + r} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{q^{l-1}-1} \sum_{r=0}^{q-1} e(w; q^{l-1} n + m) z^{q^l n + qm + r} + \delta z^{m_0} + \sum_{n \geq 1} z^{q^l n + m_0} \\
 &= \frac{1-z^q}{1-z} \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{q^{l-1}-1} e(w; q^{l-1} n + m) (z^q)^{q^{l-1} n + m} + \delta z^{m_0} + \frac{z^{q^l + m_0}}{1-z^{q^l}} \\
 &= \frac{1-z^q}{1-z} f(w; z^q) + \frac{z^{v(w)}}{1-z^{q^l}}.
 \end{aligned}$$

以上で関数方程式 (4) が証明された.

さて, $f(w; z)$ を $\mathbb{C}(z)$ 上代数的と仮定する. $f(z) = (1-z)f(w; z)$ とおくと関数方程式 (4) は

$$f(z) = f(z^q) + r(z) \quad (r(z) \in \mathbb{C}(z))$$

となる. 従って Kubota [4, Corollary 9] 又は Loxton and van der Poorten [5, Theorem 2] により $f(z)$, 従って $f(w; z)$, は有理関数となる. そこで $f(w; z) = a(z)/b(z)$ とおく. 但し $a(z)$, $b(z)$ は, $\mathbb{C}$ 上の多項式で互いに素とする. (4) より

$$(1-z^{q^l})a(z)b(z^q) = (1+z+\cdots+z^{q-1})(1-z^{q^l})a(z^q)b(z) + z^{v(w)}b(z)b(z^q).$$

上式に $z=1$ を代入して $b(1)=0$ を得る. $(a(z), b(z))=1$ より, $a(1) \neq 0$ となる.

$$b(z) = (1-z)^N b_1(z) \quad (b_1(z) \in \mathbb{C}[z], b_1(1) \neq 0, N \geq 1)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 (1-z^{q^l})(1-z^q)^N a(z)b_1(z^q) &= (1+z+\cdots+z^{q-1})(1-z^{q^l})(1-z)^N a(z^q)b_1(z) \\
 &\quad + z^{v(w)}(1-z)^N (1-z^q)^N b_1(z)b_1(z^q).
 \end{aligned}$$

両辺を $(1-z)^N(1-z^q)$ で割り

$$\begin{aligned}
 (1+z+\cdots+z^{q^{l-1}-1})(1+z+\cdots+z^{q-1})^{N-1} a(z)b_1(z^q) \\
 = (1+z+\cdots+z^{q^{l-1}-1})a(z^q)b_1(z) + z^{v(w)}(1-z^q)^{N-1}b_1(z)b_1(z^q).
 \end{aligned}$$

$z=1$ を代入すると, $N \geq 2$ のとき $q^{N-1}=1$, $N=1$ のとき $b_1(1)=0$ となり, いずれの場合も矛盾を生ずる. 以上で $f(w; z)$ の $\mathbb{C}(z)$ 上の超越性が示された.

Mahler [6] より次の系を得る.

系 任意の代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して $f(w; \alpha)$ は超越数である.

3 関数 $f(w_1; z), \dots, f(w_m; z)$ の代数的独立性

$w_1, \dots, w_m \in W$ とする. $f_i(z) = (1-z)f(w_i; z)$ とおくと定理 1 より各 $f_i(z)$ は,

$$f_i(z) = f_i(z^q) + r_i(z) \quad (r_i(z) \in \mathbb{C}(z))$$

の型の関数方程式を満たす. 従って Mahler [7] より, 関数 $f(w_1; z), \dots, f(w_m; z)$ が $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であるならば, 代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して関数値 $f(w_1; \alpha), \dots, f(w_m; \alpha)$ は代数的独立となる. 従って問題は $f(w_1; z), \dots, f(w_m; z)$ の $\mathbb{C}(z)$ 上の代数的独立性に帰着されるが, Kubota [4, Corollary 9] 又は Loxton and van der Poorten [5, Theorem 2] により, これは $\text{mod } \mathbb{C}(z)$ での $\mathbb{C}$ 上の線形独立性に同値となる.

定理 2 $w_1, \dots, w_m \in W$, $l = \max\{|w_1|, \dots, |w_m|\}$ とする. このとき次の 3 条件は同値である.

- (i) $f(w_1; z), \dots, f(w_m; z)$ は $\text{mod } \mathbb{C}(z)$ で $\mathbb{C}$ 上線形従属である.
- (ii) 全てが 0 でない $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ が存在して, 数列 $\left\{ \sum_{i=1}^m c_i e(w_i; n) \right\}_{n \geq 0}$ が周期 q^{l-1} の周期列となる.
- (iii) 整数 n に対して n^* を $n \equiv n^* \pmod{q^{l-1}}$ ($0 \leq n^* < q^{l-1}$) により定める. このとき, 行列 $(e(w_i; n) - e(w_i; n^*))_{1 \leq i \leq m, q^{l-1} \leq n \leq q^l}$ の階数は $m-1$ 以下である.

注意 与えられた $w_1, \dots, w_m \in W$ に対して (iii) は有限回の手続きで検証される.

系 $w_1, \dots, w_m \in W$ が定理 2 の条件を満たさないとき, 代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して, $f(w_1; \alpha), \dots, f(w_m; \alpha)$ は代数的独立である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 条件 (i) より, 全てが 0 でない $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ と $r(z) \in \mathbb{C}(z)$

が存在して

$$\sum_{i=1}^m c_i f(w_i; z) = r(z) \quad (5)$$

となる. z に z^q を代入して

$$\sum_{i=1}^m c_i f(w_i; z^q) = r(z^q).$$

ここで (4) より

$$f(w_i; z^q) = \frac{1-z}{1-z^q} (f(w_i; z) - d_i(z)) \quad (1 \leq i \leq m).$$

但し

$$d_i(z) = \frac{z^{v_i}}{1-z^{q^{l_i}}}, \quad v_i = v(w_i), \quad l_i = |w_i| \quad (1 \leq i \leq m)$$

と書けるから,

$$\sum_{i=1}^m c_i \frac{1-z}{1-z^q} (f(w_i; z) - d_i(z)) = r(z^q).$$

即ち

$$\sum_{i=1}^m c_i f(w_i; z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \sum_{i=1}^m c_i d_i(z).$$

上式を (5) に代入して

$$r(z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \sum_{i=1}^m c_i d_i(z)$$

を得る. 右辺の第2項は

$$\sum_{i=1}^m c_i d_i(z) = \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}$$

と書ける. 但し

$$P(z) \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P(z) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \{ v_i + q^l - q^{l_i} \} \leq q^l. \quad (6)$$

従って

$$r(z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}. \quad (7)$$

以下で

$$R(z) := (1-z^{q^{l-1}})r(z) \in \mathbb{C}[z] \quad (8)$$

$$\deg R(z) < q^{l-1} \quad (9)$$

を示す. (8) を示すためには, $r(z)$ の極が 1 の q^{l-1} 乗根であり, しかも全て単純極であることをいえばよい. (7) より 0 は $r(z)$ の極ではない. $r(z)$ が 1 の q^{l-1} 乗根でない極をもつとし, そのうち偏角最小のものを 1 つとり ξ とする. 但し, 偏角は $(0, 2\pi]$ の間にとるものとする. ξ_1 を ξ の q 乗根で $\arg \xi_1 = (\arg \xi)/q$ を満たすものとする, ξ_1 は $r(z)$ の極ではない. 他方 ξ_1 は $\xi_1^q = \xi \neq 1$ より $r(z^q)(1-z^q)/(1-z)$ の極となるが, $\xi_1^{q^l} = \xi^{q^{l-1}} \neq 1$ より $P(z)/(1-z^{q^l})$ の極ではない. 従って (7) より ξ_1 は $r(z)$ の極となり矛盾が導かれる. 従って $r(z)$ の極は 1 の q^{l-1} 乗根である. 次に $r(z)$ の極が全て単純であることを示す. まず $z=1$ が $r(z)$ の高々 1 位の極であることに注意しておく. 実際 1 が $r(z)$ の $N(\geq 2)$ 位の極とし, $s(z) = (1-z)^N r(z)$ とおくと $s(1) \neq 0$ である. (7) より

$$\frac{s(z)}{(1-z)^N} = \frac{1-z^q}{1-z} \frac{s(z^q)}{(1-z^q)^N} + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}.$$

従って

$$s(z) = \frac{s(z^q)}{(1+z+\cdots+z^{q-1})^{N-1}} + \frac{(1-z)^{N-1}P(z)}{1+z+\cdots+z^{q^l-1}}.$$

上式で $z=1$ とすることにより, $1 = q^{-N+1}$. これは $N \geq 2$ に矛盾する. さて $r(z)$ が 2 位以上の極をもつとし, そのうち偏角最小のものを 1 つとり, ξ とする (偏角の範囲は前と同じ), ξ_1 を ξ の q 乗根で, $\arg \xi_1 = (\arg \xi)/q$ をみたすものとする, ξ_1 は $r(z)$ の高々 1 位の極である. 他方上の注意より, $\xi_1^q = \xi \neq 1$ であるから, ξ_1 は $r(z^q)(1-z^q)/(1-z)$ の 2 位以上の極であるが, $\xi_1^q = \xi$ が 1 の q^{l-1} 乗根であることから $P(z)/(1-z^{q^l})$ の高々 1 位の極である. 従って (7) より ξ_1 は $r(z)$ の 2 位以上の極となるが, これは矛盾. 従って $r(z)$ の極は全て単純である. 以上で (8) が示された. 次に (9) を示す. (7), (8) より

$$\frac{R(z)}{1-z^{q^{l-1}}} = \frac{1-z^q}{1-z} \frac{R(z^q)}{1-z^{q^l}} + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}.$$

従って

$$\frac{1-z^{q^l}}{1-z^{q^{l-1}}} R(z) = \frac{1-z^q}{1-z} R(z^q) + P(z) \quad (10)$$

を得る. ここで

$$\deg \frac{1-z^{q^l}}{1-z^{q^{l-1}}}R(z) \geq \deg \frac{1-z^q}{1-z}R(z^q)$$

の場合は

$$q^l - q^{l-1} + \deg R(z) \geq q - 1 + q \deg R(z)$$

となり (9) が成り立つ. 他の場合は (10) より

$$\deg \frac{1-z^q}{1-z}R(z^q) = \deg P(z)$$

が成り立たなければならない. 従って (6) より

$$q - 1 + q \deg R(z) \leq q^l$$

となり, いずれの場合も (9) を得る.

$$(5), (8) \text{ 及び } (9) \text{ より, } r(z) = R(z)/(1 - z^{q^{l-1}}) \text{ の係数 } \left\{ \sum_{i=1}^m c_i e(w_i; n) \right\}_{n \geq 0}$$

は周期 q^{l-1} の周期列である.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ を条件 (ii) を満たす様にとると

$$\sum_{i=1}^m c_i (e(w_i; n) - e(w_i; n^*)) = 0 \quad (n \geq 0)$$

が成り立つ. 特に (iii) の行列の m 個の列ベクトルは $\mathbb{C}$ 上線形従属である.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). (iii) より全てが 0 ではない $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ が存在して, $\gamma_n := \sum_{i=1}^m c_i e(w_i; n)$ とおくと

$$\gamma_n = \gamma_{n^*} \quad (11)$$

が全ての n ($0 \leq n \leq q^l$) に対して成り立つ. (ii) を示すには, (11) が全ての n について成立すればよい. $n > q^l$ とし, (11) が $n-1$ 以下まで成り立つとする. $n = q^l k + n'$ ($k \geq 0, 0 \leq n' < q^l$) とかく. 任意の i ($1 \leq i \leq m$) に対して, $n \equiv n' \pmod{q^l}$ であるから (3) より

$$e(w_i; n) - e(w_i; [n/q]) = e(w_i; n') - e(w_i; [n'/q]).$$

つまり

$$e(w_i; n) - e(w_i; n') = e(w_i; [n/q]) - e(w_i; [n'/q]).$$

従って

$$\gamma_n - \gamma_{n'} = \gamma_{[n/q]} - \gamma_{[n'/q]}. \quad (12)$$

ここで $[n/q]^* = [n'/q]$ であるから、帰納法の仮定より (12) の右辺は 0 となる。即ち

$$\gamma_n = \gamma_{n'}.$$

$n^* = n'^*$ であるから、帰納法の仮定より

$$\gamma_n = \gamma_{n^*}.$$

以上で、定理が証明された。

W の部分集合 V に対して

$$L(V) := \left\{ c(z) + \sum_{i=1}^m c_i f(w_i; z) \mid w_1, \dots, w_m \in V, c(z) \in \mathbb{C}(z), c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}, m \geq 1 \right\}$$

とおく。 $L(V)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である。

定理 3 正整数 l に対して $W_l := \{ w \in W \mid |w| \leq l \}$,

$$W_l^* := \{ bw \in W \mid b \in \{ 1, \dots, q-1 \}, |bw| = l \} \cup \{ 0^l \}$$

とおくとき、 $\{ f(w; z) \mid w \in W_l^* \}$ は $\text{mod } \mathbb{C}(z)$ で $L(W_l)$ の基底である。

証明 W_l^* を $W_l^* = \{ w_0 = 0^l, w_1, \dots, w_m \}$ (但し $m = \#W_l^* - 1$) とかく。
まず

$$\sum_{i=0}^m c_i f(w_i; z) \equiv 0 \pmod{\mathbb{C}(z)} \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

と仮定し、 $c_1 = \dots = c_m = 0$ を示す。任意の j ($1 \leq j \leq m$) をとる。

$$w_j = b_1 \cdots b_l \quad (b_1, \dots, b_l \in \{ 0, 1, \dots, q-1 \}, b_1 \neq 0)$$

とし、 $n = \sum_{i=2}^l b_i q^{l-i}$ とおくと、 $v(w_j) \equiv n \pmod{q^{l-1}}$ であるから、定理 2 (ii) より

$$\sum_{i=0}^m c_i e(w_i; v(w_j)) = \sum_{i=0}^m c_i e(w_i; n)$$

を得る. $n < q^l$ であるから上式の右辺は 0 となる. 他方左辺において, $b_1 \neq 0$ より $e(w_i; v(w_j)) \neq 0$ となるのは $i = j$ のときに限る. よって $c_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$).
従って

$$\mathbb{C}(z) \ni \sum_{i=0}^m c_i f(w_i; z) = c_0 f(w_0; z).$$

ところが定理 1 より, $f(w_0; z) \notin \mathbb{C}(z)$ であるから $c_0 = 0$ となる.

次に $L(W_l) = L(W_l^*)$ を示す. $l = 1$ のときは $W_l^* = \{0, 1, \dots, q-1\} = W_1$ であるから, この式は成り立つ. $l > 1$ とし $L(W_{l-1}) = L(W_{l-1}^*)$ とする. $w \in W_{l-1}^*$ を任意にとる. もし w が 0 で始まっていないならば, $w_0, \dots, w_{(q-1)} \in W_l^*$ であり, (2) より

$$f(w; z) = \sum_{b=0}^{q-1} f(wb; z) + \frac{z^{v(w)}}{1 - z^{q^{l-1}}} \in L(W_l^*).$$

w が 0 から始まっているならば, $w = 0^{l-1}$ でなければならないので $0w, \dots, (q-1)w \in W_l^*$ となる. すると (1) より

$$f(w; z) = \sum_{b=0}^{q-1} f(bw; z) \in L(W_l^*).$$

従って

$$L(W_{l-1}) = L(W_{l-1}^*) \subset L(W_l^*).$$

$|w| = l$ となる $w \in W_l \setminus W_l^*$ の場合が残る. $w = 0x$ ($x \in W_{l-1}$) と書けるから (1) より

$$f(w; z) = f(0x; z) = f(x; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(bx; z) \in L(W_l^*).$$

従って $L(W_l) = L(W_l^*)$. 以上で定理が証明された.

定理 4 $W^* := \{b_1 \cdots b_l \mid b_i \in \{0, \dots, q-1\}, b_1 \neq 0, b_l \neq 0, l \geq 1\} \cup \{0\}$ とおくと, $\{f(w; z) \mid w \in W^*\}$ は $\text{mod } \mathbb{C}(z)$ で $L(W)$ の基底である.

証明 まず任意の $w_1, \dots, w_m \in W^*$ に対して

$$\sum_{i=1}^m c_i f(w_i; z) \equiv 0 \pmod{\mathbb{C}(z)} \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

と仮定し, $c_1 = \dots = c_m = 0$ を示す. $m = 1$ のときは定理 1 より正しい. $m > 1$ とし, $m-1$ まではこの主張が正しいとする. $l = \max\{|w_1|, \dots, |w_m|\}$ とおく.

$w_1 \neq 0$, $|w_1| = \min\{|w_i| \mid w_i \neq 0, 1 \leq i \leq m\}$ としてよい. 任意の $k \geq l$ に対して $n_k = v(w_1 0^k)$ とおく. $n_k \equiv 0 \pmod{q^{l-1}}$ であるから定理 2 (ii) より

$$\sum_{i=1}^m c_i e(w_i; n_k) = \sum_{i=1}^m c_i e(w_i; 0) = 0.$$

左辺において, $e(w_1; n_k) = 1$. また $w_i \neq 0$ ($2 \leq i \leq m$) のときは $e(w_i; n_k) = 0$ であるから $c_1 = 0$ を得る. 他方 $w_i = 0$ となる i が存在するときは, $e(w_i; n_k) = e(0; v(w_1)) + k$ となるから

$$c_1 + c_i(e(0; v(w_1)) + k) = 0.$$

$k \rightarrow \infty$ として $c_i = 0$. 従って $c_1 = 0$ となる. 故に

$$\sum_{i=2}^m c_i f(w_i; z) \in \mathbb{C}(z)$$

であり, 帰納法の仮定から $c_2 = \dots = c_m = 0$ となる.

次に $L(W) = L(W^*)$ を示す. 任意に $w \in W$ をとり,

$$w = 0^k x 0^l \quad (k, l \geq 0, x \in (W^* \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\})$$

と書く. 但し λ は empty block とする. $k+l$ についての数学的帰納法で $f(w; z) \in L(W^*)$ を示す. $k+l=0$ ならば, $w = x \in W^*$ であるから正しい. 続いて $k+l > 0$ とする. $0 \leq k' + l' < k+l$ を満たす $k', l' \geq 0$ 及び, 任意の $y \in (W^* \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\}$ に対して $f(0^{k'} y 0^{l'}; z) \in L(W^*)$ と仮定する. $k \geq 1$ ならば (1) より

$$f(w; z) = f(0^k x 0^l; z) = f(0^{k-1} x 0^l; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(b 0^{k-1} x 0^l; z).$$

$0 \leq l < k+l$, $x \neq 0$ より

$$f(0^{k-1} x 0^l; z), f(b 0^{k-1} x 0^l; z) \in L(W^*) \quad (1 \leq b \leq q-1).$$

従って $f(w; z) \in L(W^*)$ である. $k=0$ のときは (2) より

$$f(w; z) = f(x 0^l; z) \equiv f(x 0^{l-1}; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(x 0^{l-1} b; z) \pmod{\mathbb{C}(z)}.$$

ここで $x \neq 0$ より

$$f(x 0^{l-1}; z), f(x 0^{l-1} b; z) \in L(W^*) \quad (1 \leq b \leq q-1)$$

であるから $f(w; z) \in L(W^*)$ となる. 従って $L(W) = L(W^*)$. 以上で定理が証明された.

References

- [1] J. P. Allouche and J. O. Shallit, Infinite products associated with counting blocks in binary strings, *J. London Math. Soc.* 39(1989), 193 – 204.
- [2] J. P. Allouche and J. O. Shallit, The ring of k -regular sequences, *Theoret. Comp. Sci.* 98(1992), 163 – 197.
- [3] P. G. Becker, k -regular power series and Mahler-type functional equations, *J. Number Theory* 49(1994), 269 – 286.
- [4] K. K. Kubota, On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values, *Math. Ann.* 227(1977), 9 – 50.
- [5] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, A class of hypertranscendental functions, *Aequationes Math.* 16(1977), 93 – 106.
- [6] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* 101(1929), 342 – 366.
- [7] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzender Funktionen, *Math. Z.* 32(1930), 545 – 585.