

Reduced b -function

佐藤 幹夫 述

矢野 環記

こゝに、Reduced b -函数について、佐藤先生の
講演、個人的談話、unofficial prints 等から組み立てたものである。
その他色々補足がある。

この方面はあまり開拓されていないが、本来、イデオロギ
よりも、理論的にはあつかひやすいはずのものと思われる。

- §1. 定義・基本性質 — $\bar{h}, \bar{h}', \infty$ —
 §2. $\bar{h}(s)$ の min. poly. $\bar{z}$ の表現 — $M(s)$ —
 §3. Quasi-fraction isolated sing. $\bar{z}$ の $\bar{h}$.

§1. 定義. 基本性質. — $\bar{b}, \bar{b}', c_\infty$ —

$b(s)$ は, $P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$ とする, monic, degree 最小なものであつた。これに任じ、monic な $\mathbb{C}[s]$ の元連 $b_1 (=b), b_2, \dots, b_\nu, \dots$ を 次の様に定義する。

$$\text{Def. 1} \quad (b_\nu(s)) \equiv [s^\nu f^{s+\nu} : f^s]_{\mathbb{C}[s]}$$

f の巾乗 f^ν の b 函数を $b_{f^\nu}(s)$ とするは、

$$\text{Cor. 2} \quad (b_{f^\nu}(s)) = (b_\nu(\nu s))$$

$$\text{Thm. 3} \quad \exists! \bar{b}(s), \bar{b}'(s), c_\nu(s), c_\infty(s), c'_\nu(s) \\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.}$$

$$b_\nu(s) = [\bar{b}(s)]_\nu c_\nu(s+\nu) \\ = c'_\nu(s) [\bar{b}'(s)]_\nu$$

$$\nu \leq \nu' \Rightarrow c_\nu(s) | c_{\nu'}(s); \quad \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \begin{cases} c_\nu(s) = c_\infty(s) \\ c'_\nu(s) = c_\infty(s) \end{cases} \\ (c' \text{ についても同様}).$$

$$\text{ここには, } [\varphi(s)]_\nu = \varphi(s)\varphi(s+1)\cdots\varphi(s+\nu-1)$$

$$\text{Def. 4} \quad \bar{b}(s) \text{ を } f \text{ の right reduced } b\text{-fn} \\ \bar{b}'(s) \text{ を " left " と呼ぶ。}$$

$$\text{Cor. 5} \quad \nu \geq \nu_0, \quad \bar{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_\nu(s+1)}$$

$$\bar{b}'(s) = \frac{b_{\nu+1}(s-\nu)}{b_\nu(s-\nu)}$$

$\bar{b}(s)$ は, f^s の analytic continuation に最適であり,
通常 reduced b とは, $\bar{b}(s)$ のことをいふ. ($b_{\text{red}}(s)$ と
かく.) よって, 今後本稿では $\bar{b}(s)$ を主体に用いる. (3.1
定理によつては $\bar{b}'(s)$ も有効である. 又, mixed b -fn も
定義する.

$$\bar{b}(s) = \prod (s + \alpha_j) \quad \gamma(s) = \prod P(s + \alpha_j) \text{ とする.}$$

$$P_\nu(s) f^{s+\nu} = b_\nu(s) f^s \text{ より,}$$

$$\frac{1}{C_\infty(s+\nu)} P_\nu(s) \left(\frac{1}{\gamma(s+\nu)} f^{s+\nu} \right) = \frac{1}{\gamma(s)} f^s$$

よつて, $\operatorname{Re} s \gg 0$ かつ, $\frac{1}{\gamma(s)} f^s$ は $s \in \mathbb{C}$ へ連続する.

$\bar{b}'(s)$ では, $C_\infty(s)$ の零点を考慮する.

example.

$$f = x^4 + y^4$$

$$b(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{5}{4}) (s+\frac{5}{4}) (s+\frac{6}{4})$$

$$\bar{b}(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) \cdots \cdots (s+\frac{5}{4})$$

$$\bar{b}'(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) \cdots \cdots (s+\frac{6}{4})$$

$$C_\infty(s) = C_1(s) = s + \frac{2}{4} =$$

一般の quasi-hom. isolated の場合については p. 241.

< 定理の証明 >

$$\text{lemma} \quad b_{\nu+\nu'}(s) \mid b_\nu(s) b_{\nu'}(s+\nu) \quad (1)$$

$$b_\nu(s) \mid b_{\nu+\nu'}(s) \quad (2)$$

$$b_{\nu'}(s+\nu) \mid b_{\nu+\nu'}(s) \quad (3)$$

$$\therefore b_{\nu'}(s+\nu) b_\nu(s) f^s \in \mathcal{O}(s) b_{\nu'}(s+\nu) f^{s+\nu} \subset \mathcal{O}(s) f^{s+\nu+\nu'}$$

$$b_{\nu+\nu'}(s) f^s \in \mathcal{O}(s) f^{s+\nu+\nu'} \subset \mathcal{O}(s) f^{s+\nu+\nu'}$$

$$b_{\nu+\nu'}(s) f^{s+\nu} \in f^\nu \mathcal{O}(s) f^{s+(\nu+\nu')} \subset \mathcal{O}(s) f^{(s+\nu)+\nu'}$$

$b(-\rho) = 0$ の根を, $\text{mod } \mathbb{Z}$ で分類し, $\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_l\}$ とする.

$$\{\alpha_j\} \equiv \{\alpha_j, \alpha_j + i_j^{(1)}, \dots, \alpha_j + i_j^{(n_j-1)}\} \quad \alpha_i \equiv \alpha_j \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$i_j^{(k)} < i_j^{(k+1)} \quad \text{とす. } 1 + i_j^{(n_j-1)} = l(\alpha_j) \text{ と記す.}$$

① による, $b_\nu(\rho)$ の任意の factor $\rho + \beta$ には (1), $\exists j$, $\beta \equiv \alpha_j \pmod{\mathbb{Z}}$. $\beta \geq \alpha_j$. 又, 整数環では各 group $\{\alpha_j\}$ ごとに, 対応する factor ρ で成り立つことと想起し, γ の factor ρ へ $\gamma \geq \rho$ と, $\rho + \alpha_j \mapsto \rho + 1$ とすれば, 結局

$$b_\nu(\rho) = \prod_{i=1}^{r+\nu-1} (\rho + i)^{\mu_{\nu,i}} \quad \text{と (7) より.}$$

$$(b(\rho) = (\rho+1)^{\mu_{1,1}} \cdots (\rho+r)^{\mu_{1,r}} \quad \nu_{1,0} \neq 0, \nu_{1,r} \neq 0)$$

このようにすれば, ①②③は次の形になる.

$$\mu_{\nu+\nu',i} \leq \mu_{\nu,i} + \mu_{\nu',i-\nu}$$

$$\mu_{\nu,i} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$

$$\mu_{\nu',i-\nu} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$

$$\text{又, } \mu_{\nu,i} = 0 \quad i \geq \nu+r, \quad (\mu_{\nu,i} = 0 \quad \nu \leq 0 \text{ or } i \leq 0)$$

Claim

$$\text{i) } \nu \geq 0, 1 \leq i \leq r-1 \text{ かつ } \mu_{\nu,i} = \mu_i \text{ (etc)}$$

$$\text{ii) } i \geq r, 1 \leq r \leq r-1, \quad \mu_{\nu,\nu+r} = \mu'_r \text{ (etc)}$$

$$\text{iii) } \nu \geq i \geq r \text{ かつ } \mu_{\nu,i} = \mu_i \text{ (etc)}$$

$$\text{iv) } \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{r-1} \leq \mu \leq \mu'_1 \leq \dots \leq \mu'_{r-1}$$

$$\text{v) } \mu_k + \mu'_k \geq \mu$$

$$\therefore) \underline{j \geq i} \quad \mu_{j,i} \leq \mu_{i,i} + \mu_{j-i,0} = \mu_{i,i}$$

$$\mu_{i,i} \leq \mu_{j,i} \quad \therefore \mu_{j,i} = \mu_{i,i}$$

$$\text{特に } i=1, \dots, r-1 \text{ かつ } \mu_i \equiv \mu_{i,i} \geq 1 < 2,$$

$$i \leq j \Rightarrow \mu_{i,i} \leq \mu_{j,i} \text{ より, } \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{r-1}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{i \geq r} \quad \mu_{j,i} &\leq \mu_{i-r,i} + \mu_{j-i+r,r} = \mu_{j-i+r,r} \\
 \mu_{j-(i-r),r} &\leq \mu_{j,i} \quad \therefore \mu_{j,i} = \mu_{j-i+r,r} \\
 j < i \text{ かつ } r &= i-j \geq 1, \quad \underline{\mu'_r} = \mu_{r-r,r} (= \mu_{j,r+j}) \\
 \text{と } j < r, \quad r &\leq r' \Rightarrow \mu'_r = \mu_{r-r,r} \geq \mu_{r-r',r} = \mu'_{r'} \\
 \therefore \mu'_1 &\geq \dots \geq \mu'_{r-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{j \geq i \geq r} \quad &= \text{かつ } r, \text{ 上の } 2 \text{ つが同時に成り立つ} \\
 \mu_{i,i} &= \mu_{j,i} = \mu_{(j-i)+r,r}. \quad \text{このとき } \forall j \geq i \geq r \\
 &\text{について成り立つので結局 } \mu_{j,i} = \mu_{r,r} \equiv \mu.
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \mu_{r-1} = \mu_{r-1,r-1} \leq \mu_{r,r} \geq \mu_{r-1,r} = \mu'_1$$

$$\text{又, } \mu_k + \mu'_k = \mu_{k,k} + \mu_{r-k,r} \geq \mu_{r,r} = \mu.$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \mu_1 \\ \beta_2 = \mu_2 - \mu_1 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_{r-2} \\ \beta_r = \mu - \mu_{r-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \beta'_1 = \mu - \mu'_1 \\ \beta'_2 = \mu'_1 - \mu'_2 \\ \vdots \\ \beta'_r = \mu'_{r-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1 + \mu'_1 - \mu \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} = \mu_{r-1} + \mu'_{r-1} - \mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって, } \bar{h}(\lambda) &\equiv (\lambda+1)^{\beta_1} \dots (\lambda+r)^{\beta_r} \quad (c_\infty(\lambda) = (\lambda+1)^{\gamma_1} \dots (\lambda+r-1)^{\gamma_{r-1}}) \\
 \bar{h}'(\lambda) &\equiv (\lambda+1)^{\beta'_1} \dots (\lambda+r)^{\beta'_r}
 \end{aligned}$$

とかけば, $\bar{h}$ の分解が得られる。

$C_\nu(\lambda)$ の定義と $C_\nu | C_\infty$ にはっきりと明かしてある。

一般には, 各 $\{\alpha_j\}$ に対して, 乗すればよい。

quod erat demonstrandum.

証明方法, 又 $\bar{h}, c$ 構成の

Cor. 6 $\nu_0 \leq \max_j l(\alpha_j)$ とわかる。

$$\bar{h}(\lambda) C_\infty(\lambda+1) = C_\infty(\lambda) \bar{h}'(\lambda)$$

$$C_\infty(\lambda) | [\bar{h}(\lambda)]_{\nu_0}, [\bar{h}'(\lambda - \nu_0)]_{\nu_0}$$

この式 = 式 $\frac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)} = \frac{C_\infty(s+1)}{C_\infty(s)}$ を用いれば, 2つの Prop を得る.
 $\frac{C_b(s+1)}{C_b'(s)} = \left[\frac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)} \right]_b = \frac{C_\infty(s+1)}{C_\infty(s)}$ (たともどうして必要なのでは?)
 従って,

Prop. 7 If $C_b(s) = C_b'(s)$, then
 $C_b(s) = C_b'(s) = C_\infty(s)$.

Prop. 8 $C_\infty(s)$ が cte の時, 常に成って $\bar{b}'(s) = \bar{b}(s)$

従って, $b(s) = \bar{b}(s)$ の時以外では, right reduced b と, left reduced b は異なる。だが, 根の, mod 2 で $\neq 1$ なる group の元数は, 一致に等しい,

§.2 $\bar{b}$ の min. poly. と 1 の表現 — $M(s)$ —

$b(s)$ は $M = \mathcal{B}[s] \neq \mathcal{B}[s] f^{s+1}$ における b の最小多項式であった。 $\bar{b}(s)$ も, 同様に $\bar{b}$ と $\bar{b}$ とを説明し, reduced b の一般化によって与えられる。
 記法を少し変更する。

$$P_\nu(s) \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad \Sigma$$

$$P_\nu(s) f^s = C_\infty(s) \bar{b}(s-1) \cdots \bar{b}(s-\nu) f^{s-\nu}$$

となる f のとき。 $P_\nu(s)$ は mod $g[s]$ で unique.

$P_0(s) (= C_\infty(s)), P_1(s), \dots$ で generate される

$\mathcal{B}[s]/g[s]$ の submodule を $C_\infty(s) \frac{\mathcal{B}[s]}{g[s]}$ とする。

$$f[s] \subset C_{\infty}(s) \subset \mathcal{R}[s] \subset \mathcal{S}[s] \subset \frac{1}{C_{\infty}(s)} \mathcal{S}[s].$$

$$P_m[s] \in \mathcal{S}[s]P_0[s] + \dots + \mathcal{S}[s]P_{m-1}[s] \text{ とある } m \text{ がある.}$$

$$\text{i.e. } P_m[s] + A_1[s]P_{m-1}[s] + \dots + A_m[s]P_0[s] = 0 \pmod{f[s]}$$

$$P_m'[s]P_h[s+n] = C_{\infty}(s)P_{m'+n}[s+n] \pmod{f[s+n]}$$

に注意 (, $P_h[s+n]$ を s の多項式として $C(s)$ で除くとは, $(s \mapsto s-n)$

$$P_{m+n}[s] + A_1[s-n]P_{m+n-1}[s] + \dots + A_m[s-n]P_h[s] = 0 \pmod{f[s]}.$$

$$\therefore \mathcal{R}[s] = \frac{1}{C_{\infty}(s)} (\mathcal{S}[s]P_0[s] + \dots + \mathcal{S}[s]P_{m-1}[s])$$

$$\text{従って, } \pi(s) = \mathcal{R}[s]/f[s] \text{ とおく,}$$

$$= \mathcal{S}[s]f^0 + \overline{b}(s-1)\mathcal{S}[s]f^{s-1} + \dots + [\overline{b}(s-m+1)]_{m-1}\mathcal{S}[s]f^{s-m+1}$$

$$\overline{\pi}_\nu(s) \equiv \pi(s)/\pi(s+\nu) \text{ とおく.}$$

Thm. 9 $[\overline{b}(s)]_\nu$ は, $\overline{\pi}_\nu(s)$ に与える endomorphism s の minimal polynomial である.

$\therefore$ $[\overline{b}(s)]_\nu, \pi(s) \supset \pi(s+\nu)$ は明らか. $\overline{\pi}_\nu(s)$ に与える s の minimal poly. は $\overline{b}_\nu(s)$ とし, $\overline{b}_\nu(s)$ は k -次であるとす.

if $\exists \overline{b}_{\nu_0}(s) \neq [\overline{b}(s)]_{\nu_0}$, g.c.d をとると,

$$\deg \overline{b}_{\nu_0} < \deg [\overline{b}]_{\nu_0} \text{ にとける. } \therefore \exists k' < k \text{ s.t.}$$

$$\deg \overline{b}_\nu < \nu k' \quad (\nu \gg 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \curvearrowright [\overline{b}(s)]_\nu C_\nu(s+\nu) \\ \mathcal{S}[s]f^0/\pi(s+\nu+m-1) & \rightarrow & \mathcal{S}[s]f^0/\mathcal{S}[s]f^{s+\nu} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \\ \overline{b}_{\nu+m-1}(s) \hookrightarrow \pi(s)/\pi(s+\nu+m-1) & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \nu k &\leq (\nu+m-1)k' \\ &= \text{すなわち } k' < k \text{ には矛盾} \end{aligned}$$

さらに, $\pi(s)$ はこの性質をもつ最小のものである。
これを説明するため, いくつか一般的事項を準備しよう。

$$\begin{aligned} \pi(s) &\text{ is, } \mathcal{S}[s] \text{ module であって,} \\ \exists m_0, \quad \mathcal{S}[s] \neq s^{-m_0} &\supset \pi(s) \supset \mathcal{S}[s] \neq s \\ \pi(s) &\supset \pi(s+1) \end{aligned}$$

を満たすものとする。

$b_{\pi, \nu}(s)$ を $\pi(s)/\pi(s+\nu) \ni 0$ の min. poly とする。
(存在は上の条件から保証される。) $b_{\pi, 1}$ を b_π と記す。

$$\pi(s) \supset \pi(s+\nu) \supset \pi(s+\nu+\nu') \quad (*)$$

$$\begin{cases} b_{\pi, \nu+\nu'}(s) \mid b_{\pi, \nu}(s) b_{\pi, \nu'}(s+\nu) \\ b_{\pi, \nu}(s) \mid b_{\pi, \nu+\nu'}(s) \quad , \quad b_{\pi, \nu'}(s+\nu) \mid b_{\pi, \nu+\nu'}(s) \end{cases}$$

従って, 定理 3 の証明はそのまま適用して成立する。

$$\text{Thm 10. } \exists \bar{b}_\pi, \bar{b}'_\pi, c_{\pi, \nu}, c'_{\pi, \nu}, c_\pi$$

$$\begin{aligned} b_{\pi, \nu}(s) &= [\bar{b}_\pi(s)]_\nu c_{\pi, \nu}(s+\nu) \\ &= c'_\pi(s) [\bar{b}'_\pi(s)] \end{aligned}$$

$$\nu \leq \nu' \quad c_{\pi, \nu} \mid c_{\pi, \nu'}; \quad c'_{\pi, \nu} \mid c'_{\pi, \nu'}; \quad \exists \nu_0 \leq \nu, \quad c_{\pi, \nu} = c'_{\pi, \nu} = c_\pi.$$

$$\bar{b}_\pi(s) c_\pi(s+1) = c_\pi(s) \bar{b}'_\pi(s)$$

$\bar{b}'_\pi$ は $\bar{b}_\pi$ と c_π から定まる故, $\text{pair}(\bar{b}_\pi, c_\pi)$

により, π の特徴づけを考える。

$$2. \text{ より } \deg g, \deg h \leq \text{mod} + \min(\deg C_{m_0}, \deg C_{r, m_0})$$

$$3. \text{ より } \text{mod} + |\deg C_r - \deg c| \leq \deg g + \deg h.$$

$\overline{C}_r$ と $\overline{h}$ は, 次数が等しいから, 根の組にも
着しい関係がある. mod. $\mathbb{Z}$ groups の数的一致, 各 group の元
の個数の一致は容易である. さらに加へるには, 各 group 一つの
mod. $\mathbb{Z}$ group に着目して, 次の形にしてよい.

$$\overline{C}_r(\rho) = (\rho + n_1) \cdots (\rho + n_d) \quad n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_d. \quad (\text{整数})$$

$$\overline{h}(\rho) = (\rho + n'_1) \cdots (\rho + n'_d) \quad n'_1 \leq n'_2 \leq \cdots \leq n'_d \quad (..)$$

1. の式より

$$[(\rho + n_1) \cdots (\rho + n_d)]_{m-m_0} C(\rho + m - m_0) \mid [(\rho + n'_1) \cdots (\rho + n'_d)]_m C_r(\rho + m)$$

両辺の, 絶対値最大の根の因子を比較すれば, $n_1 \geq n'_1$.

一方, 2. の式より

$$[(\rho + m_0 + n'_1) \cdots (\rho + m_0 + n'_d)]_{m-m_0} C_r(\rho + m) \mid [(\rho + n_1) \cdots (\rho + n_d)]_m C(\rho + m)$$

$$\therefore m_0 + n'_1 \geq n_1. \quad \text{また } n_1 \geq n'_1 \geq n_1 - m_0.$$

従って, $[(\rho + n_1) \cdots (\rho + n_d)]_{m-m_0} \mid [(\rho + n'_1) \cdots (\rho + n'_d)]_m$. $r_{1,m}(\rho) = [(\rho + n'_1) \cdots (\rho + n'_d)]_m / [(\rho + n_1) \cdots (\rho + n_d)]_{m-m_0}$

$$[(\rho + n_2) \cdots (\rho + n_d)]_{m-m_0} C(\rho + m - m_0) \mid r_{1,m}(\rho) [(\rho + n'_2) \cdots (\rho + n'_d)]_m C_r(\rho + m)$$

$n_1 \leq n_2$ と, $r_{1,m}(\rho)$ の式より, $\rho + n_2 \mid [(\rho + n'_2) \cdots (\rho + n'_d)]_m$.

i.e. $n_2 \geq n'_2$ 同様に $n'_2 + m_0 \geq n_2$. $\therefore n_2 \geq n'_2$ (1),

$$\underline{1 \leq i \leq d} \quad n_i \geq n'_i \geq n_i - m_0.$$

即ち, 我々の次の定理を得た.

Thm. 11

1. $\deg \bar{b}_n = \deg \bar{b}$

2. $|\deg c_n - \deg c| \leq \text{mod}$

3. $\bar{b}_n \sim \bar{b}$ a mod. $\mathbb{Z}$ groups の個数, 各代表元連の mod $\mathbb{Z}$ class, 各 group の元数 $i_k = i'_k$ 一致,

$$\bar{b} \sim (\rho + \alpha_j)(\rho + \alpha_j + i_1) \cdots (\rho + \alpha_j + i_d) \quad i_k \leq i_{k+1}$$

$$\bar{b}_n \sim (\rho + \alpha_j + i'_1)(\rho + \alpha_j + i'_2) \cdots (\rho + \alpha_j + i'_d) \quad i'_k \leq i'_{k+1}$$

$$\text{各対応する因子とすれば,} \quad i_k \geq i'_k \geq i_k - m_0. \\ (i_1 = 0)$$

一般に, $(\bar{b}_{x_1}, c_{x_1}) = (\bar{b}_{x_2}, c_{x_2})$

$$\Rightarrow b_{x_1+x_2} = b_{x_1} = b_{x_2} \quad c_{x_1+x_2} \mid c_{x_1} = c_{x_2}$$

$$b'_{x_1 \cap x_2} \in b'_{x_1} = b'_{x_2} \quad c_{x_1 \cap x_2} \mid "$$

$$(\bar{b}_n, c_n) = (\bar{b}, 1) \text{ の場合, 次の定理がある.}$$

この条件は $b_n(\rho) = \bar{b}(\rho)$ と同値なことに注意せよ.

$$\mathcal{M}'(\rho) = \left\{ u(\rho) \in \bigcup_{v=0}^{\infty} \mathcal{S}(\rho) f^{\rho-v} \mid \exists m, [\bar{b}(\rho)]_m u(\rho) \in \mathcal{M}(\rho+m) \right\} \text{ とおく.}^*$$

明に $\mathcal{M}'(\rho) \supset \mathcal{M}(\rho)$.

作りかより, $\bar{b}(\rho) \mathcal{M}'(\rho) \subset \mathcal{M}'(\rho+1)$

このことから, $b_{\mathcal{M}'} = \bar{b}_{\mathcal{M}'} = \bar{b}$.

* $\exists \ell, \mathcal{S}(\rho) f^{\rho-\ell} \supset \mathcal{M}'(\rho)$ とはわからないが, 証明はまだない.

$\gamma(\Delta)$ は従来、仮定を課す。

$$\text{Thm. 12} \quad b_{\pi}(s) = \bar{b}(s) \iff \pi'(s) \supset \pi(s) \supset \pi(s)$$

$$\therefore \Rightarrow \text{条件上)} \quad r(n+1) > \bar{r}(n)r(n) > \bar{r}(n)\bar{r}(n-1)r(n-1) \cdots$$

i.e. $\pi(s) \supset [\ell(s-k)]_p \pi(s-k) \supset [\bar{\ell}(s-k)]_k \mathcal{D}(s) f^{s-k}$.

$\therefore \pi(s) \supset \pi(s)$. $\square$ 4. 17. 7, $m \geq m_0$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{[\bar{\psi}(s)]_m} & & \xrightarrow{\varphi(s+m)} & \\ \eta(s) & \supset & \eta(s) & \supset & \eta(s+m) & \supset & \eta(s+m) \\ & \searrow \varphi(s) & & \swarrow [\bar{\psi}(s)]_m & & \swarrow & \end{array}$$

$$m + \frac{1}{2} \pi = \pi, \quad \min. \text{poly}(\pi(s)/\pi(s+m) \mathbb{P}_2) \mid [\bar{h}(s)]_m.$$

一方 $\mathcal{N}(s) \supset \mathcal{N}(s+m)$ の $[\mathcal{N}(s)]_m$ は best possible.
 $[\mathcal{N}(s)]_m$ より上へ | は 変は等号.

$$\therefore \mathcal{M}'(s) \supset \mathcal{M}(s)$$

$$\Leftarrow \quad g(s) f^{s-m_0} \in \mathcal{H}(s) \quad \forall s,$$

$$m''(s) = m(s - m_0) \cap m'(s) \quad \text{と 大い。} \quad m + \text{分大} = 17$$

$$m''(s) \supset m(s) \supset m(s) \supset m(s+m) \supset m(s+m)$$

$[\bar{t}(s)]_m$

$[\bar{t}_{m'}(s)]_m \quad c_{m'}(s+m)$

$\bar{f}_n(s)$ の根は, Fhm. に従い $\bar{f}(s)$ のものより σ か
自然数に近いもの. しかし, 上の図式より, 結局 $c_n = 1$

$\bar{b}_{nc} = \bar{b}$ でなければならぬ。 Q. E. D.

§3. Quasi-hom. の場合 $\ell(\rho)$

f : weighted hom. isol. sing $(\sum a_i x_i D_i) f = f$
 とする. (f : quasi-hom. isol. sing なら $\sum a_i D_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ の作用による.)

$$\frac{t^{a_1}-t}{1-t^{a_1}} \cdots \frac{t^{a_n}-t}{1-t^{a_n}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} f_\alpha t^\alpha \quad (17) \quad (\text{右辺は有限項})$$

$$\ell(\rho) = (\rho+1) \prod_{\alpha \neq 0} (\rho + \alpha)$$

$$B(\rho) = (\rho+1) \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} (\rho + \alpha)^{f_\alpha} \quad \text{が 固有多項式であった.}$$

$$\mathcal{M}_\nu = \mathcal{O}(r) f^\rho / \mathcal{O}(r) f^{\rho+\nu} \simeq \mathcal{O} / \mathcal{O}_0 + \mathcal{O} f^\nu$$

$$\mathcal{O}_0 = \{ P(x, D) \mid P(x, D) f^\rho = 0 \}. \quad \mathcal{O}_0 = \sum \mathcal{O}(f_i D_i - f_j D_j)$$

とすると $\nu = 1$ の場合と同様. 又 明かに,

$$0 \rightarrow (\mathcal{M}_{\nu'})_{\rho \mapsto \rho+\nu} \rightarrow \mathcal{M}_{\nu+\nu} \rightarrow \mathcal{M}_\nu \rightarrow 0.$$

$\mathcal{M}_\nu$ には $\rho \mapsto \rho + \nu$ の min. poly. が $\ell_\nu(\rho)$ であった. 固有多項式
 を $B_\nu(\rho)$ とする. $\ell_1(\rho) = \ell(\rho)$, $B_1(\rho) = B(\rho)$.

$B_\nu(\rho) = (\rho+1)_\nu B'_\nu(\rho)$ といふ表示もする. (よゝ seq.
 かつ 明かに) 原点からの奇点の $B'_\nu(\rho)$ になる.

$$0 \leftarrow \text{Hom}((\mathcal{M}_\nu)_{\rho \mapsto \rho+\nu}, B_{pt}) \leftarrow \text{Hom}(\mathcal{M}_{\nu+\nu}, B_{pt}) \leftarrow \text{Hom}(\mathcal{M}_\nu, B_{pt}) \leftarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B'_\nu(\rho+\nu) & B'_{\nu+\nu}(\rho) & B'_\nu(\rho) \end{array}$$

$$B'_{\nu+\nu'}(\rho) = B'_\nu(\rho) B'_{\nu'}(\rho+\nu) \quad \therefore B'_\nu(\rho) = [B(\rho)]_\nu$$

$$\therefore B_\nu(\rho) = [\rho+1]_\nu \prod (\rho+\alpha)^{g_\alpha+\dots+g_{\alpha-\nu+1}}$$

min. poly として,

$$b_\nu(\rho) = [\rho+1]_\nu \prod_\alpha (\rho+\alpha); (g_\alpha, \dots, g_{\alpha-\nu+1}) \neq 0.$$

従って, $\nu \geq \nu_0$ ととり (Cor. により) 次を置く.

Thm. f : quasi-hom. isolated sing.

$$\bar{b}(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho+\alpha_j)$$

$$\bar{b}'(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho+\alpha'_j)$$

ここに, $b(\rho)/(\rho+1)$ の根 $\alpha \bmod \mathbb{Z}$ group の最小代表元達を $\{\alpha_j\}$, 最大代表元達を $\{\alpha'_j\}$ とする.

$$\begin{aligned} \therefore \bar{b}(\rho) &= \frac{b_{\nu+1}(\rho)}{b_\nu(\rho+1)} \\ &= \frac{[\rho+1]_{\nu+1} \prod (\rho+\alpha) (g_\alpha, \dots, g_{\alpha-\nu}) \neq 0}{[\rho+2]_\nu \prod (\rho+\alpha) (g_{\alpha+1}, \dots, g_{\alpha-\nu}) \neq 0} \\ &= (\rho+1) \prod (\rho+\alpha) \quad g_\alpha \neq 0, (g_{\alpha+1}, \dots, g_{\alpha-\nu}) = 0. \end{aligned}$$

$\nu \geq \nu_0$ とすれば, $\rho = \text{図}$ の α は, 絶対値最小の ρ となる残りの ρ は $\rho = \rho_0$ となる.

example. Elementary Singularities.

$$A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$$

$$b = \bar{b} = \bar{b}'$$

$$\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$$

$$C_1(\rho) = C(\rho) = \rho + 1$$

($\Rightarrow \tilde{E}_6, \tilde{E}_8$ は 3 変数表す $\Rightarrow 1 = 2, 4$. 2 変数表す $\Rightarrow \rho + \frac{1}{2}$)

example. $f: (\mathbb{C}^n, 0)$ hom. degree r isol. sing. $\Rightarrow$

$$\bar{b}(\rho) = (\rho + 1) \cdot \left(\rho + \frac{n}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n+(r-1)}{r}\right)$$

$$\bar{b}'(\rho) = (\rho + 1) \cdot \left(\rho + \frac{(n-1)(r-1)}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n(r-1)}{r}\right)$$

$$C(\rho) = \left(\rho + \frac{n}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n(r-1)-r}{r}\right)$$