

amenable tensor category の AFD-bimodule による実現について

東北大学 林 倫弘 (Tomohiro Hayashi)

§0. Introduction

我々がここで扱う "tensor category" とは 左右から II_1 -factor が作用する bimodule を object とする category のことです。このような category は subfactor の不変量として現れ 特にある種の subfactor (amenable subfactor) に対しては 完全な不変量となることが 近年 S. Popa により示されています。(正確にいうと Popa が示したのは standard invariant (paragroup, standard lattice) が 完全不変量となることです。bimodule のなす tensor category は standard invariant の情報を全て含む不変量なので 当然完全不変量となります。)

一方 逆に abstract な standard invariant が与えられた時、それを実現する subfactor が存在するか? という点が問題になります。この点についても Popa は解答を与え

ています。 Popa は [P2] において "あらゆる standard lattice はある (必ずしも AFD ではない) subfactor で実現可能である" ということを示しました。 また standard lattice が amenable な時は AFD II₁-factor で実現ができるということをアプアンスしています。 我々の目標は この問題の "tensor category 版" に解答を与えることです。 基本となるアイデアは A. Ocneanu による surface bimodule construction です。 (なお 本ノートの内容は 参考文献 [HY], [H] のものです。)

§1. non-graded tensor category の実現

N を II₁-factor, C を index 有限の N - N bimodule からなる category とします。 さらに C は (i) relative tensor product (ii) unitary equivalence (iii) 既約分解 (iv) conjugation について閉じているとします。 さらに C に属する既約な bimodule の unitary equivalence class 全体を S とおき S が高々可算集合であることも仮定します。 (しばしば S の元と既約な bimodule を同一視します。)

記号 $NX \otimes_N Y_N$ を単に XY と書く。 また $I \equiv_N L^2(N)_N$

$\bar{X}$ は X の conjugate bimodule とする。 $\text{Hom}({}_N X_N, {}_N \bar{Y}_N) \in \text{Hom}(X, \bar{Y})$ と略記する。

Proposition 1.1 (Frobenius duals)

各 $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ (i.e., X は $\mathcal{C}$ に属する N - N bimodule) に対し $\varepsilon_X \in \text{Hom}(X \bar{X}, I)$ が存在し次を満たす。

$$(i) \quad \varepsilon_{X \bar{Y}} = \varepsilon_X \circ (I_X \otimes \varepsilon_Y \otimes I_{\bar{X}})$$

$$(ii) \quad \forall \zeta \in \text{Hom}(X, \bar{Y}) \text{ に対し}$$

$$\varepsilon_X \circ (I_X \otimes \tau \zeta) = \varepsilon_Y \circ (\zeta \otimes I_{\bar{Y}})$$

$$\text{ただし } \tau \zeta = (\bar{\zeta})^* \in \text{Hom}(\bar{Y}, \bar{X})$$

$$(iii) \quad \forall \zeta \in \text{Hom}(X, \bar{Y}) \text{ に対し}$$

$$\varepsilon_X \circ (\zeta \otimes I_{\bar{Y}}) = 0 \implies \zeta = 0$$

$$(iv) \quad \forall \zeta \in \text{End}(X) \text{ に対し}$$

$$\varepsilon_X \circ (\zeta \otimes I_{\bar{X}}) \circ \varepsilon_X^* = \varepsilon_{\bar{X}} \circ (I_{\bar{X}} \otimes \zeta) \circ \varepsilon_{\bar{X}}^*$$

Remark X の bounded vector 全体を X^{bnd} と表わし、left N -valued inner product を $[\xi, \eta]_N$ ($\xi, \eta \in X^{\text{bnd}}$) と書くことにする。 また $\{s_i\}_i$ を $\text{End}(X)$ の minimal projection による I の分解とする。 すると ε_X は

$$\varepsilon_X(\xi \otimes \eta) = \sum_i \left(\frac{\dim_N(s_i X)}{\dim(s_i X)_N} \right)^{\frac{1}{4}} [s_i \xi, s_i \eta]_N \tau_N^{\frac{1}{2}}$$

($\tau_N^{\frac{1}{2}}$ は $L^2(N)$ における N の unit に対応するベクトル)

により与えられる。

Definition 1.2 (minimal traces)

linear functional

$$\text{End}(X) \ni \zeta \mapsto \langle \zeta \rangle_x \in \mathbb{C}$$

$$\zeta \quad \langle \zeta \rangle_x = \varepsilon_x \circ (\zeta \otimes I_x) \circ \varepsilon_x^* \in \text{End}(I) = \mathbb{C}$$

で定める。これを minimal trace と呼ぶ。

実際、次の補題により trace になり得る。

Lemma 1.3 $\forall \zeta \in \text{Hom}(X, Y) \quad \forall \eta \in \text{Hom}(Y, X)$ に対し

$$\langle \zeta \eta \rangle_Y = \langle \eta \zeta \rangle_X$$

Definition 1.4 (quantum dimensions)

$d(X) \equiv \langle I_X \rangle_X (= \varepsilon_X \varepsilon_X^*)$ とおき これを quantum dimension と呼ぶ。

Lemma 1.5 (i) $d(X \oplus Y) = d(X) + d(Y)$

(ii) $d(XY) = d(X)d(Y)$ (iii) $d(X) = d(X^*)$

Remark 上の (i) ~ (iii) は Frobenius dual の性質のみから

証明される。一方 $d(X)$ は X の minimal index の square root に一致している。

S を基底とする free module $\mathbb{C}[S]$ はよく知られているように relative tensor product で積を定義することによって fusion algebra になります。([HI] 参照) また quantum dimension は $\mathbb{C}[S]$ 上の dimension を定めます。

Definition 1.6 (amenability of fusion algebra)

$\mathbb{C}[S]$ が amenable であるとは 次を満たすこととする。

$$\forall a = \sum_{s \in S} a(s) s \quad (a(s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a(s) \text{ は有限個を除き } 0)$$

に対し $d(a) = \|L_a : \ell^2(S) \rightarrow \ell^2(S)\|$.

ただし $L_a = \{L_a(s, t)\}_{s, t \in S}$ は

$$L_a(s, t) = \sum_{u \in S} a(u) \dim \text{Hom}(u s, t)$$

で与えられる。またこのとき、 $\mathbb{C}$ も amenable であるといふ。

Definition 1.7

$$(i) \quad s, t, u \in S \text{ に対し } N_{s, t}^u = \dim \text{Hom}(s, t, u)$$

と書く。 S 上の probability measure μ, ν に対し

$$\mu * \nu(u) \equiv \sum_{s, t \in S} \mu(s) \nu(t) N_{s, t}^u \frac{d(u)}{d(s)d(t)}$$

により S 上の probability measure $\mu * \nu$ を定める。

- (ii) μ が symmetric $\iff \mu(s) = \mu(\bar{s}) \quad \forall s \in S$
- (iii) $f \in \ell^\infty(S)$ が μ -harmonic
 $\iff f(s) = \sum_{t \in S} \mu * \delta_s(t) f(t) \quad \forall s \in S$
- (iv) μ が ergodic $\iff \mu$ -harmonic function が
 constant のみ。

次の定理が bimodule の construction における 1 つの
 Key となります。

Theorem 1.8

$\mathbb{C}[S]$ が amenable

$\implies \exists \mu : \text{a symmetric, ergodic probability measure on } S \text{ s.t. } \text{support}(\mu) = S$

以下 $\mathbb{C}[S]$ が amenable とあると仮定し Thm 1.8 に
 より $\mu \in$ 1 つとして固定します。 また、

R : an AFD II_1 -factor with a unique tracial state τ .

$\{e_s\}_{s \in S}$: an orthogonal family of projections in
 R s.t. $\tau(e_s) = \frac{\mu(s)}{\mu(S)}$

$x = (x_n, \dots, x_1) \in S^n = S \times \dots \times S$ (n-times) $\in \mathcal{A} \subset$

$e_x \equiv e_{x_n} \otimes \dots \otimes e_{x_1} \in R^{\otimes n}$, $x R_y \equiv e_x (R^{\otimes n}) e_y$

と示す。

Definition 1.9

$X \in \text{Object}(C)$ に対し

$$A_0(X) \equiv \text{End}(X)$$

$$A_n(X) \equiv \bigoplus_{x, y \in S^n} \text{Hom}(y_n \cdots y_1 X, x_n \cdots x_1 X) \otimes_x R_y$$

また $s \in S$ に対し

$$A_n^s(X) \equiv \bigoplus_{x, y \in S^n} \text{Hom}(y_n \cdots y_1 X, s) \otimes \text{Hom}(s, x_n \cdots x_1 X) \otimes_x R_y$$

と置く。特に $A_n \equiv A_n(I)$ と書く。

Lemma 1.10

$$(i) \quad A_n^s(X) \simeq R \quad (ii) \quad A_n(X) \simeq \bigoplus_{s \in S} A_n^s(X)$$

Definition 1.11

$$\circ \quad A_n(X) \ni \xi \otimes a \mapsto \bigoplus_{s \in S} (I_s \otimes \xi) \otimes (e_s \otimes a) \in A_{n+1}(X)$$

$$\circ \quad A_n(X) \ni \xi \otimes a \mapsto (\xi \otimes I_Y) \otimes a \in A_n(X \Upsilon)$$

により埋め込みを定める。ただし

$$\xi \in \text{Hom}(y_n \cdots y_1 X, x_n \cdots x_1 X), \quad a \in {}_x R_y$$

Definition 1.12

$A_n(X)$ 上の Tracial state $\tau_X \in$

$$\tau_x(I_{A_n^s(x)}) = \mu^n * \delta_x(s)$$

(ただし $\delta_x \equiv \sum_{s \in S} \dim \text{Hom}(X, s) \frac{d(s)}{d(X)} \delta_s$)
 を定める。 Lem 1.10 により これは trace を定める。

Remark τ_x は minimal trace と R 上の trace τ により

$$\tau_x(\xi \otimes a) = \delta_{x, \xi} \langle \xi \rangle_{x, \dots, x, X} \cdot \tau(a) \cdot \frac{1}{d(X)}$$

と書くことができる。

Lemma 1.13 Def 1.11 の2つの埋め込みと Def 1.12 の trace の定義は compatible

$\bigcup_n A_n(X)$ の τ_x による GNS-表現でうつしたものの weak closure を $A_\infty(X)$ と表わす。

Lemma 1.14 $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ に対し vN -algebra $A_\infty(X)$ を考える。各 $x \in Z(A_\infty(X))$ ($A_\infty(X)$ の中心) に対し一意に μ -harmonic function ξ が存在して

$$E_{A_n(X)}(x) = \sum_{s \in S} \xi(s) I_{A_n^s(X)}$$

を満たす。ここで $E_{A_n(X)}$ は $A_\infty(X)$ から $A_n(X)$ への τ_x -preserving conditional expectation である。したがって μ の ergodicity より $A_\infty(X)$ は AFD II₁-factor となる。

Definition 1.15 $X \in \text{Object } \mathcal{C}$ に対し

$X_n \equiv \bigoplus_{x, y \in S^n} \text{Hom}(y_n \cdots y_1, x_n \cdots x_1 X) \otimes_x R_y$
 とおく。そして X_n 上の内積を

$(s \otimes a | g \otimes b) \equiv \delta_{x, w} \delta_{y, z} \langle g^* s \rangle_{x_n \cdots x_1 X} \mathcal{L}(b^* a)$
 で定める。ここで

$$s \in \text{Hom}(y_n \cdots y_1, x_n \cdots x_1 X) \quad a \in x R_y$$

$$g \in \text{Hom}(z_n \cdots z_1, w_n \cdots w_1 X) \quad b \in z R_w$$

さらに X_n から X_{n+1} への埋め込みを Def 1.11 と同様に定める。

Lemma 1.16

- (i) X_n は自然に A_n - A_n bimodule の構造を持つ。
- (ii) X_n から X_{n+1} への埋め込みは内積を保つ。また左右の A_n, A_{n+1} の作用と compatible になる。

したがって完備化により A_∞ - A_∞ bimodule X_∞ が得られます。また $X \mapsto X_\infty$ は tensor category としての同型写像となりますが、ここでは次の主張を示すのみをします。(くわしくは [HY] 参照)

Theorem 1.17 (i) $(X \oplus Y)_\infty \simeq X_\infty \oplus Y_\infty$

- (ii) $X_\infty Y_\infty \cong (XY)_\infty$ (iii) $(\overline{X})_\infty \cong \overline{X_\infty}$
 (iv) $d(X) = d(X_\infty)$
 (v) $\begin{array}{ccc} \text{End}(X) \subset \text{End}(XY) & & \text{End}(X_\infty) \subset \text{End}((XY)_\infty) \\ \cap & \cap & \cap \\ \text{End}(\mathbb{Z}X) \subset \text{End}(\mathbb{Z}XY) & \cong & \text{End}(\mathbb{Z}X_\infty) \subset \text{End}(\mathbb{Z}(XY)_\infty) \end{array}$

Remark (i) いままでの議論では C の object が bimodule であることは本質的には用いていません。使っているのは C の tensor category としての情報と amenability です。したがって C を “abstract な” tensor category としても 全てそのまようすくいきます。(IHJ 参照)

(ii) Thm 1.17 の (i) ~ (iv) は μ の ergodicity のみがあれば non-amenable な用でも証明できます。しかし (v) には amenability が本質的にさえています。

§2. grading がある場合

前節の議論は category C が N - N bimodule からなる場合でした。しかし subfactor $N \subset M$ からは N - N , N - M , M - N , M - M bimodule のなす category $C_{N,N}$, $C_{N,M}$, $C_{M,N}$, $C_{M,M}$ が得られます。そして $C_{N,N}$ (or $C_{M,M}$) のみでは standard invariant の情報は完

全には含みません。したがって standard invariant の実現問題との関係から bicategory $C = C_{N,N} \cup C_{N,M} \cup C_{M,N} \cup C_{M,M}$ を AFD-bimodule で実現することが重要となります。

以下、次の設定で考えます。

N, M : II_1 -factors (互いに inclusion の関係はなくてよい)

$C_{N,N}, C_{N,M}, C_{M,N}, C_{M,M}$: それぞれ finite index N - N , N - M , M - N , M - M bimodule のなる category として前節同様、 $C = C_{N,N} \cup C_{N,M} \cup C_{M,N} \cup C_{M,M}$ が relative tensor product, unitary equivalence, 既約分解、conjugation について閉じているとします。(ただし relative tensor product は定義される組み合わせの時のみ考える。) $C_{N,N}, C_{N,M}, C_{M,N}, C_{M,M}$ それぞれの既約な bimodule の unitary equivalence class 全体を $S_{N,N}, S_{N,M}, S_{M,N}, S_{M,M}$ と書き、それぞれが 高々可算集合であることも仮定します。この "bicategory" C に対して前節と同様に Frobenius dual, minimal trace, quantum dimension が定義され しかるべき性質を満たします。また $\mathbb{C}[S_{N,N}]$ は fusion algebra となります。

Definition 2.1 C が amenable であるとは $[S_{N,N}]$ が amenable であることとする。

Remark extremal subfactor $N \subset M$ に対して、 $N \subset M$ の graph が amenable になることと $[S_{N,N}]$ が amenable であることは同値。したがって 上の定義は subfactor の amenability に一致している。

これより 前節とは同じ方法で $A_\infty(X)$ や X_∞ を作るの
ですが ここで1つ注意しておきます。 $N \subset M$ の用
automorphism を1つ固定することで bicategory C は
 N - N bimodule からなる (non-graded) tensor category
 C' に埋め込むことができます。したがって もし C' が
前節の意味で amenable ならば C' を AFD-bimodule で
実現できます。すると当然 C も実現されることになりま
す。しかし我々は bicategory C の amenability を
 $C_{N,N}$ の amenability で定義したので C が amenable ても
 C' が amenable になる保証はありません。よって §1
の結果をそのまま適用することはできません。

以下、 $[S_{N,N}]$ は amenable であると仮定します。

すなわち $S_{N,N}$ 上の symmetric, ergodic probability measure μ が $\text{support}(\mu) = S_{N,N}$ とするものと仮定する。

Definition 2.2

$X \in \text{Object}(C_{N,A})$ ($A = N$ or M) に対し

$$A_0(X) \equiv \text{End}(X)$$

$$A_n(X) \equiv \bigoplus_{x, y \in S_{N,N}^n} \text{Hom}(y_n \cdots y_1 X, x_n \cdots x_1 X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{x,y}$$

と定める。 $A_n^s(X)$ ($s \in S_{N,A}$) は Def 1.9 と同様に定める。

Remark §1 と異なり $X \in \text{Object}(C_{M,A})$ に対しても $A_n(X)$ を考える。

Lemma 2.3 (i) $A_n^s(X) \simeq \mathbb{R}$ (ii) $A_n(X) \simeq \bigoplus_{s \in S_{N,A}} A_n^s(X)$

Definition 2.4 $X \in \text{Object}(C_{N,A})$ $Y \in \text{Object}(C_{A,B})$

($A, B \in \{N, M\}$) に対し Def 1.11 と同様に $\hookrightarrow$ を定め

$$A_n(X) \hookrightarrow A_{n+1}(X), \quad A_n(X) \hookrightarrow A_n(XY)$$

を定める。

記号 $S_{N,N}$ 上の probability measure ν と $S_{N,A}$ 上の

probability measure ν' に対し

$$\nu * \nu'(u) \equiv \sum_{\substack{s \in S_{N,A} \\ t \in S_{N,A}}} \nu(s) \nu'(t) N_{s,t}^u \frac{d(u)}{ds dt}$$

$(u \in S_{N,A})$ で定める。

Definition 2.5 $X \in \text{Object}(C_{N,A})$ に対し

$$\tau_X(I_{A_n(X)}) = \mu * \delta_X(s) \quad (s \in S_{N,A})$$

で $A_n(X)$ 上の tracial state τ_X を定める。

Lemma 2.6 Def 2.4 の埋め込みと Def 2.5 の trace は compatible

$X \in \text{Object}(C_{N,A})$ に対し $\bigcup_n A_n(X)$ の τ_X による GNS 表現の weak closure を $A_\infty(X)$ とおく。

Definition 2.7 $f \in \ell^\infty(S_{N,A})$ が μ -harmonic とは

$$f(s) = \sum_{t \in S_{N,A}} \mu * \delta_s(t) f(t) \quad \forall s \in S_{N,A}$$

を満たすこととする。

Lemma 2.8 $X \in \text{Object}(C_{N,A})$ に対し Lem 1.14 と

同様に $Z(A_\infty(X))$ の元と μ -harmonic function が 1対1

に対処する。

μ の ergodicity と Lem2.8 から $A_\infty(X)$ ($X \in \text{Object}(C_{N,M})$) が Sactor であるといえそうですがそれは一般に non-amenable な用は まちがいです。 μ の ergodicity とは $[S_{N,N}]$ におけるもののなので X が $C_{N,N}$ に入っている用は $A_\infty(X)$ は Sactor になります。 $C_{N,M}$ に入っている用はなんとも言えません。このことは subSactor でいうと一方の graph が ergodic の用、他方も ergodic か? という問題に対処しこれは U. Haagerup により反例が作られています。しかし subSactor の場合、さらに amenability を仮定すると一方の ergodicity が他方の ergodicity を意味することが Popa により示されています。([PI]) 我々の場合でも amenability のおかげで $A_\infty(X)$ ($X \in \text{Object}(C_{N,M})$) は Sactor になります。それは次のようにしていえます。

$$\text{まず §1 より } A'_\infty \cap A_\infty(X\bar{X}) = \text{End}(X\bar{X})$$

($\odot$ $X\bar{X} \in \text{Object}(C_{N,N})$ より §1 が使える。)

このことと

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \subset & A_\infty \\ \cap & & \cap \\ A_0(X) & \subset & A_\infty(X) \\ \cap & & \cap \\ A_0(X\bar{X}) & \subset & A_\infty(X\bar{X}) \end{array}$$

が commuting square をなすことより

$$A_\infty' \cap A_\infty(X) = \text{End}(X)$$

となります。とくに X が既約の場合は

$$\mathbb{C}(A_\infty(X)) \subset A_\infty' \cap A_\infty(X) = \text{End}(X) = \mathbb{C}$$

により $A_\infty(X)$ は Sactor となります。ここで Lem2.8

より ある $X \in \text{Object}(C_{N,M})$ に対し $A_\infty(X)$ が Sactor
なら $\forall Y \in \text{Object}(C_{N,M})$ に対し $A_\infty(Y)$ も Sactor とな
ります。

この論法(つまり $C_{N,N}$ に対し §1 の結果を適用し あと
は commuting square を利用する方法)により

$$A_\infty(X)' \cap A_\infty(X \times Y) = \text{End}(Y)$$

$$(X \in \text{Object}(C_{N,A}) \quad Y \in \text{Object}(C_{A,B}))$$

も証明されます。これを用いれば C の実現が §1 と同
様にしていきます。(くわしくは [H] 参照) また、

[P2] の結果とこの結果をあわせれば amenable standard
lattice の AFD II_1 -subSactor による実現もできます。

References

- [HI] F. Hiai and M. Izumi, Amenability and strong amenability for fusion algebras with applications to subfactor theory, *Internat. J. Math.* 9 (1998), 669-722
- [HY] T. Hayashi and S. Yamagami, Amenable tensor categories and their realizations as AFD bimodules, preprint
- [H] T. Hayashi, In preparation.
- [P1] S. Popa, Classification of amenable subfactors of type II, *Acta Math.*, 172(1994), 163-255
- [P2] S. Popa, An axiomatization of the lattice of higher relative commutants of a subfactor, *Invent. Math.*, 120(1995), 427-445