

例外領域上の超幾何関数について

近畿大理工 長岡昇勇 (Shōyū Nagaoaka)

G. Shimura は [3]において, 非解析的 Eisenstein 級数への応用を念頭におき, 拡張された合流型超幾何関数をいくつかの tube 型領域上で考察した. 実際, 拡張された超幾何関数は, 非解析的 Eisenstein 級数の Fourier 係数を, あるアテール空間上の積分として表示したとき, その archimedean part に表われる. [3]の Introduction で述べられている様にその結果は, Jordan 環の理論を使い統一的に記述されるが, このノートでは, Cayley 数を成分とする unitary 行列からなる Jordan 環の場合(もちろん, これは例外型 Jordan 環の場合も含んでいる)に, [3]と同様の結果を記述する.

$\mathbb{C}_R$ を real Cayley algebra とし, その standard な基底を固定して考える ([2] 参照). $1 \leq m \leq 3$ なる整数 m に対して

$k(m) = 4m - 3$ とおく. $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\mathcal{J}_R^{(m)}$ を $\mathcal{J}_R^{(m)} = \{x \in M_m(\mathbb{C}_R) \mid {}^t \bar{x} = x\}$ で定義する. ここで $\bar{x}$ は x の各成分の

Cayley conjugation を表わす. $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ は 其中に積 $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ を定義することにより real Jordan algebra となる. $m=3$ のとき, すなわち $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(3)}$ が例外型 Jordan 環と呼ばれているものである ([1] 参照). $x = (x_{ij}) \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ に対して $\text{tr}(x) = \sum x_{ii} \in \mathbb{R}$ と書き, $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上の内積 $(,)$ を $(x, y) = \text{tr}(x \circ y)$ で定義する. さらに, $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上の polynomial function $\det$ を次の様に定義する. $m=3$ のとき

$$\det(x) = \prod_{i=1}^3 x_{ii} - x_{11}N(x_{23}) - x_{22}N(x_{13}) - x_{33}N(x_{12}) + T((x_{12}x_{23})\bar{x}_{13}),$$

ここで $N(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$, $T(a) = a + \bar{a}$ ($a \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$). $m=2$ のとき

$$\det(x) = x_{11}x_{22} - N(x_{12}). \quad \mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \text{ の元 square } x \circ x$$

全体のなる集合とし, $\mathcal{K}_m^+$ をその部分集合で, $\det \neq 0$ なる条件を満たすものから成るものとする. $\mathcal{K}_3^+$ は例外型錐と呼ばれているものである [1]. この錐を使って, $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}^{(m)} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の中に tube 領域 $\mathbb{H}_m = \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} + i\mathcal{K}_m^+$ を定義する. $\mathbb{H}_3$ は E_7 型の例外領域であり, $\mathbb{H}_2$ は 10 次元 IV 型領域, $\mathbb{H}_1$ は複素上半平面である. $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ を $\mathbb{R}^{m \cdot k(m)}$ と同一視することにより $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上に Euclidean measure dx を定義する. ここで我々は錐 $\mathcal{K}_m^+$ に付随する gamma 関数 $\Gamma_m(s)$ を

$$\Gamma_m(s) = \int_{\mathcal{K}_m^+} e^{-\text{tr}(x)} \det(x)^{s-k(m)} dx$$

で定義する. 積分は $\text{Re}(s) > k(m) - 1$ なる条件のもとで

収束し、次の等式を満たす。

$$\Gamma_m(s) = \pi^{2m(m-1)} \prod_{n=0}^{m-1} \Gamma(s-4n),$$

ここで $\Gamma(s)$ は 通常の gamma 関数である。

$g \in \mathcal{H}_m^+$, $h \in \mathcal{J}_R^{(m)}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して、次の様におく

$$\eta_m(g, h; \alpha, \beta) = \int_{x \pm h \in \mathcal{H}_m^+} e^{-(g, x)} \det(x+h)^{\alpha-K(m)} \det(x-h)^{\beta-K(m)} dx,$$

$$\eta_m^*(g, h; \alpha, \beta) = \det(g)^{\alpha+\beta-K(m)} \eta_m(g, h; \alpha, \beta)$$

ここで 関数 η_m から一般化した超幾何関数

$$\zeta_m(g; \alpha, \beta) = \int_{\mathcal{H}_m^+} e^{-(g, x)} \det(\varepsilon_m + x)^{\alpha-K(m)} \det(x)^{\beta-K(m)} dx$$

で表わされることに注意しておく。ここで $g \in \mathcal{H}_m^+$ で ε_m は m 次単位行列を表わす。実際、 η_m と ζ_m の関係は次の通り。

$$\eta_m(g, \varepsilon_m; \alpha, \beta) = e^{-\tilde{h}(g)} 2^{\alpha+\beta-K(m)} \zeta_m(2g; \alpha, \beta).$$

ここで、いくつかの記号を導入しておく。まず、 $\mathcal{J}_R^{(m)}(p, q, r)$ を $\mathcal{J}_R^{(m)}$ の元で p 個の正固有値、 q 個の負固有値、 r 個の零固有値をもつものの全体のなす集合とする。上記、固有値の定義を述べておく。 $m=3$ のとき、 $\mathcal{J}_R^{(m)}$ の元 h の固有値は

3次方程式 $t^3 - \tau(h)t^2 + \tau(h \times h)t - \det(h) = 0$ の解として定義される。ここで $x \times y$ は、 x と y の cross 積を表わす。また、この3次方程式は重複をこめて3実解をもつことに注意しておく。 $m=2$ のときは、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ の固有値は2次方程式 $t^2 - \tau(h)t + \det(h) = 0$ の解として定義される。ここで、さらに、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 、 $g \in \mathcal{K}_m^+$ に対して、 g に相対する h の固有値という概念を、次の様に定義する。 $m=3$ のとき3次方程式 $t^3 - (g, h)t^2 + (g \times g, h \times h)t - \det(g)\det(h) = 0$ の解として定義する。この3次方程式もまた、重複をこめて3実解をもつ。 $m=2$ のときは、2次方程式 $t^2 - (g, h)t + \det(g)\det(h) = 0$ の解として定義される。そこで、 g に相対する h の固有値のうち正なるもの全体の和、積をそれぞれ $\tau_+(hg)$ 、 $\delta_+(hg)$ で表わそう。さらに $\tau_-(hg) = \tau_+((-h)g)$ 、 $\delta_-(hg) = \delta_+((-h)g)$ 、 $\tau(hg) = \tau_+(hg) + \tau_-(hg)$ とおく。また $\mu(hg)$ で、 g に相対する h の固有値のうち非零なるものの最小絶対値を表わすものとする。

今、 $g \in \mathcal{K}_m^+$ 、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}(p, q, r)$ 、 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \omega_m(g, h; \alpha, \beta) = & 2^{-p\alpha - q\beta} \Gamma_p(\beta - 4(m-p))^{-1} \Gamma_q(\alpha - 4(m-q))^{-1} \\ & \cdot \Gamma_r(\alpha + \beta - \kappa(m))^{-1} \delta_+(hg)^{\kappa(m) - \alpha - 2\beta} \delta_-(hg)^{\kappa(m) - \beta - 2p} \\ & \cdot \eta_m^*(g, h; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

と定義する. 最初の主定理は 次 の 様 に 述 べ ら れ る.

定理 1. 関数 ω_m は (α, β) の 関 数 と し て, $\mathbb{C}^2$ 全 体 に holomorphic に 解 析 接 続 し, 次 の 関 数 等 式 を 満 足 す.

$$(1) \quad \omega_m(g, h; \alpha, \beta) = \omega_m(g, h; k(m) + 4r - \beta, k(m) + 4r - \alpha)$$

さ ら に, $\mathbb{C}^2$ の 任 意 の compact set T に 対 し て, 正 定 数 A, B が 存 在 し て

$$(2) \quad |\omega_m(g, h; \alpha, \beta)| \leq A e^{-\tau(hg)/2} (1 + \mu(hg))^{-B}$$

for every $(g, h) \in k_m^+ \times J_{\mathbb{R}}^{(m)}$ and every $(\alpha, \beta) \in T$,
が 成 立 す る.

こ の 結 果 は, [3] の Theorem 4.2 の analogy で ある.

次 の 様 な 級 数 を 考 え る.

$$S_m(z, L_m; \alpha, \beta) = \sum_{a \in L_m} \det(z+a)^{-\alpha} \det(\bar{z}+a)^{-\beta}$$

こ こ で z は H_m 上 の 変 数, L_m は $J_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内 の lattice.

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. こ の 級 数 は, $H_m \times \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 2k(m) - 1\}$ 上 で locally uniformly に 収 束 す る こ と が 確 か め ら れ る. [3] に 従 っ て, $J_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内 の lattice L が algebraic で あ る, と い う こ と を, 次 の 様 に 定 義 す る. す な わ ち,

$\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ を $\mathbb{R}^{mK(m)}$ と同一視したとき, 各成分が代数的数からなっているときを, いう. 定理1の応用として, 次の定理が得られる.

定理2. $L \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の algebraic lattice とする. すると

$$\text{関数 } \Gamma_m(\alpha + \beta - K(m))^{-1} S_m(z, L; \alpha, \beta)$$

は, (α, β) に関して holomorphic function として, $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続される.

ここで

$$S_m(z, L; \alpha) = \sum_{a \in L} \det(z+a)^{-\alpha}$$

$$S_m^*(z, L; \alpha) = \lim_{s \rightarrow 0} S_m(z, L; \alpha + s, s), \quad \text{とおく.}$$

すると, 級数 $S_m(z, L; \alpha)$ は, $\operatorname{Re}(\alpha) > 2K(m) - 1$ で収束し

(z, α) に関する holomorphic function となる. 明らかに

$\operatorname{Re}(\alpha) > 2K(m) - 1$ なら, $S_m^*(z, L; \alpha)$ は $S_m(z, L; \alpha)$ に一致する. これについて 次の成立する.

定理3. $L \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の algebraic lattice とする. すると, $\operatorname{Re}(\alpha) > K(m)$ に対して $S_m^*(z, L; \alpha)$ は $S_m(z, L; \alpha)$ に一致する. さらに, 次式が成立する:

$$\begin{aligned} & \mu(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}/L) S_m^*(z, L; K(m)) \\ &= 2^{-4m(m-1)} i^{-mK(m)} \Gamma_m(K(m))^{-1} \sum 2^{-r(\mathbf{h})} e^{2\pi i(\mathbf{h}, z)}, \end{aligned}$$

ここで、最後の和は、 $L' \cap J_{\mathbb{R}}^{(m)}(P, 0, \gamma)$ の元全体にわたる。

L' は、 L の dual lattice, $\gamma(h) = \gamma$ とする。

最後に、いくつかの remarks を与えよう。W. L. Bailey, Jr. は論文[1]において、例外 modular 群 Γ に関する Eisenstein 級数を研究した。我々は次の級数を考えよう。

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} |j(z, \gamma)|^s, \quad (s \in \mathbb{C}, z \in H_3),$$

ここで Γ_0 は Γ とある parabolic 部分群との共通部分。

ここで

$$\gamma_m(s) = \pi^{-ms} \Gamma_m(s), \quad \zeta_m(s) = \prod_{n=0}^{m-1} \zeta(s-4n)$$

とおく。 $\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数。そこで、

$$\xi(s) = \gamma_3\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_3(s) \det(\operatorname{Im}(z))^{\frac{s}{2}} E(z, s)$$

と置いてみる。 $E(z, s)$ の Fourier 係数は singular series と上記 ω_3 の積として表現される。 ω_3 の性質より次の事実が予想される。すなわち、 $\xi(s)$ は s に関する meromorphic function として解析接続され、関数等式

$$\xi(s) = \xi(18-s)$$

を満たす。

文献

- [1] W. L. Baily, Jr.: An exceptional arithmetic group and its Eisenstein series. *Ann. of Math.*, 91, 512-549 (1970).
- [2] ____: *Introductory Lectures on Automorphic Forms*. Publication of Math. Soc. of Japan, 12 (1973).
- [3] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains. *Math. Ann.*, 260, 269-302 (1982).
- [4] ____: On Eisenstein series. *Duke Math. J.*, 50, 417-476 (1983).