

単調作用素列の収束について

お茶の水女大 理 渡辺ヒサ子

§ 1. 序 $([0, 1])$ 上の positive linear operators の列 (L_n) の収束に関する Korovkin の定理と呼ばれる次の定理がある。すなわち、 $g = 1, = x, = x^2$ に対して、 $(L_n g)$ が g に一様に収束すれば、どんな $f \in C([0, 1])$ に対しても、 $(L_n f)$ は f に一様に収束する。この定理はいろいろな形で一般化されているが、H. Bauer により次の形で一般化された。 X を compact Hausdorff 空間とする。 $(L_i)_{i \in I}$ を $C(X)$ から $\mathbb{R}^X$ (X 上の実数値関数全体からなる ordered vector space) への monotone mappings からなる net として、 F は定数関数を含み、 X の点を separate するような $C(X)$ の部分空間とある。そのとき、すべての $g \in F$ に対して $(L_i g)$ が g に pointwise (resp. uniformly) に収束すれば、どんな F -affine 関数 f に対しても、 $(L_i f)$ は f に pointwise (resp. uniformly) に収束する。そのような f の集合 $\bar{F}$ が $C(X)$ と一致するための

必要かつ十分条件は、 F に関する Choquet 境界が X と等しいことである ([1]). また H. Bauer は 局所 compact 空間においても、適当な条件のもとでは、収束を局所一様、又は order 収束にかえても、同様の結果が得られることを示している ([1], [2]).

ここでは、特に順序に重きを置いて、ordered vector 空間で考える。あなめち、 E を ordered vector 空間、 Y を集合として、 C は E の convex cone とある。 C から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mapping (又は sublinear mapping) A と、 E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net $(L_i)_{i \in I}$ に対して、 $\lim L_i g \leq A g$ ($\forall g \in C$) ならば、 $(L_i f)$ がある $L f \in \mathbb{R}^Y$ に pointwise に収束するための f 、又は C, A に対する条件、又は E の linear subspace F に対して、 $\lim L_i g = A g$ ($\forall g \in F$) ならば、 $(L_i f)$ は ある $L f \in \mathbb{R}^Y$ に pointwise に収束するための条件、さらに、 pointwise 収束を 局所一様収束 又は order 収束にして、同様の条件を考へたい。

§2. $A(C)$ -境界, $A(C)$ -affine 関数. E は ordered vector 空間, C は E に含まれる convex cone で E は C^+ -bounded とある。ここで、 E が C^+ -bounded であるというのは、どんな $f \in E$ に対して $g \geq 0$ で $-g \leq f \leq g$

であるよるは $g \in C$ が存在することである。 Y は集合として、 A は C から $\mathbb{R}^Y$ への写像である。 A が C で monotone であるというのは、

$$C \ni f, g, f \leq g \Rightarrow Af \leq Ag,$$

が成り立つことである。 A が sublinear (resp. subadditive) であるというのは、次の (i) と (ii) (resp. (i)) を満たすことである:

$$(i) C \ni f, g \Rightarrow A(f+g) \leq Af + Ag,$$

$$(ii) C \ni f, \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow A(\lambda f) = \lambda Af.$$

このとき、 A は C から $\mathbb{R}^Y$ への monotone, sublinear mapping である。このとき、 $E \ni f$ と、 $Y \ni y$ に對して、

$$\bar{A}f(y) = \inf \{ Ag(y); g \geq f, g \in C \}$$

とおく。 $-\infty < \bar{A}f(y) < \infty$ であり、 $\bar{A}f: f \mapsto \bar{A}f(y)$ は E 上の sublinear functional である。 $Y \ni y$ に對して、

$$\mathcal{M}_y = \{ \mu \in E^{*+} : \mu(f) \leq \bar{A}g(y), \forall g \in C \}$$

とおく。ここで E^{*+} は E 上の positive linear functional の全体である。Hahn-Banach の拡張定理を使って、次の補題が得られる。

補題. $f \in E$ と $y \in Y$ に對して、

$$\bar{A}f(y) = \max \{ \mu(f); \mu \in \mathcal{M}_y \}$$

が成り立つ。

M_γ が一点集合となるような点 $y \in Y$ の集合を $\delta(A(C))$ で表わし、 $A(C)$ -境界と呼ぶことにする。

命題 1. $y \in \delta(A(C))$ であるための必要かつ十分条件は、どの $f \in E$ に対しても、 $\overline{Af}(y) = -\overline{A(-f)}(y)$ が成り立つことである。

Y 上で $Af = -\overline{A(-f)}$ である $f \in E$ を $A(C)$ -affine element と呼ぶ。このとき、次の系が得られる。

系. $\delta(A(C)) = Y$ であるための必要かつ十分条件は、どんな $f \in E$ も $A(C)$ -affine であることである。

§3. 局所一様収束. Y は局所 compact Hausdorff 空間、 E は ordered vector 空間で、 C は E が C^+ -bounded であるような E に含まれる convex cone とある。 A は C から $C(Y)$ への sublinear mapping とある。 E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net $(L_i)_{i \in I}$ と SCY に対して、 $g \in E$ で、 S 上-様に $\overline{\lim} L_i g \leq h$ であるといふのは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、index $i_0 \in I$ で、どんな $i \geq i_0$ でも

$$L_i g(y) < h(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in S)$$

を成り立たせる α が存在することである。また、どんな compact 集合 S に対しても、 S 上-様に $\overline{\lim} L_i g \leq \alpha$ であるとき、 Y 上局所-様に $\overline{\lim} L_i g \leq \alpha$ であるという。

定理1. (L_i) は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone, sub-additive mappings からなる net で、 $L_i(0) = 0$ を満足するものとする。 S は Y の compact 部分集合とする。どんな $g \in C$ に対しても、 S 上-様に $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$ であれば、 S 上 $\overline{Af} = -\overline{A(-f)}$ であるような f に対して、 $(L_i f)$ は S 上-様に $\overline{Af}$ に収束する。

系1. どんな $g \in C$ に対しても、 Y 上局所-様に $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$ であれば、どんな $A(C)$ -affine f に対しても $(L_i f)$ は $\overline{Af}$ に Y 上局所-様に収束する。

系2. S は $\delta(A(C))$ の compact 部分集合とする。どんな $g \in C$ に対しても、 $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$ であければ、 $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$ であるような $f \in E$ に対しても $(L_i f)$ は S 上-様に $\overline{Af}$ に収束する。

さらに、 F は E の linear subspace で、 E は $F^\perp$ -bounded とある。このときは、 F から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mapping A に対して、

$$\overline{Af}(y) = \inf \{ Ag(y); g \geq f, g \in F \},$$

$$\underline{Af}(y) = \sup\{A_h(y); h \leq f, g \in F\}$$

か、 $f \in E$ と $y \in Y$ に對して定義され、 $\infty > \overline{Af}(y) > -\infty$,
 $\infty > \underline{Af}(y) > -\infty$ であり、 $\underline{Af}(y) \leq \overline{Af}(y)$ を満足する。

(L_i) は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる
 net とあるとき、次の定理と系1, 系2 が得られる。

定理2. A は F から $C(Y)$ への monotone mapping と
 ある。任意の compact set $S \subset Y$ に對して、どんな $g \in F$
 についても S 上-様に $\lim L_i g = Ag$ であるならば、 S 上で
 $\overline{Af} = \underline{Af}$ であるような $f \in E$ に對して、 S 上-様に
 $\lim L_i f = \overline{Af}$ である。

系1. A は F から $C(Y)$ への monotone, subadditive
 mapping で $A(0) = 0$ を満足するものとする。どんな $g \in F$
 に對しても Y 上局所-様に $\lim L_i g = Ag$ であるならば、ど
 んな $A(F)$ -affine element f に對しても、 Y 上局所-
 様に $\lim L_i f = \overline{Af}$ である。

系2. A は F から $C(Y)$ への positive linear mapping
 とある。 $\delta(A(F))$ の compact 部分集合 S に對して、どの
 $g \in F$ についても S 上-様に $\lim L_i g = Ag$ であるならば、
 どの $f \in E$ に對しても、 S 上-様に $\lim L_i f = \overline{Af}$ であ
 る。

A は F から $C(Y)$ への positive linear mapping とある。

次の性質を持つ $f \in E$ の全体を $S(F, A)$ で表わす:

E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net (L_i) と F の任意の元 g に対して, $(L_i g)$ が $A g$ に局所一様に収束すれば, $(L_i f)$ はある $L f \in \mathbb{R}^Y$ に局所一様に収束する。

E の部分集合 G が generate した linear subspace を $F(G)$ とすると, $S(F(G), A) = E$ を満足すれば, G を A -Korovkin set と呼ぶ。

定理 3. $S(F, A)$ は $A(F)$ -affine elements の全体と等しい。

系. E が G^+ -bounded であるような E の部分集合 G が A -Korovkin set であるための必要十分条件は, $Y = \delta(A(F(G)))$ が成り立つことである。

§4. pointwise 収束

E は ordered vector 空間で, C は E から C^+ -bounded であるような E の convex cone とある。 Y は集合として, A は C から $\mathbb{R}^Y$ への monotone, sublinear mapping とある。 $(L_i)_{i \in I}$ は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net とある。このとき, Y は discrete

位相を入れることにより、 Y は局所 compact 空間となり、

一点集合は compact set だから、定理 1 より、次の定理が成り立つ。

定理 4. (L_i) は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone, subadditive mappings からなる net で $L_i(0) = 0$ を満たすものとする。 S は Y の部分集合とする。どんな $g \in C$ に対しても S 上で pointwise に $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$ であれば、 S 上 $\overline{Af} = -\overline{A(-f)}$ であるような f に対して、 $(L_i f)$ は S 上で pointwise に $\overline{Af}$ に収束する。

また、特に C が linear subspace F になっているときには、定理 2 の type の pointwise 収束に関する結果も得られることは、明らかである。

§5. Order 収束. Y は集合として、 $\mathbb{R}^Y$ の linear subspace B が $B = B^+ - B^+$ と書けたいとある。ここで $B^+ = B \cap \{f : f \geq 0\}$ である。

$$B^b = \{f \in \mathbb{R}^Y : |f| \leq h, \exists h \in B^+\}$$

とおき、 $B \subset G \subset B^b$ であるような $\mathbb{R}^Y$ の sub-vector lattice G 上の order 位相 $T_o(G)$ とは、どんな order interval

$$\{g' \in G : -g \leq g' \leq g\} \quad (\forall g \in G^+)$$

は bounded にある最強の locally convex topology のことである。

E は B^+ から $(0, \infty)$ への関数の全体とあるとき、 $E \ni \varepsilon$ に對して、

$$V_\varepsilon = \{f \in B^+; \exists h_1, \dots, h_n \in B^+, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \\ |f| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon(h_i) h_i\}$$

とおく。このとき、次の命題が成り立つ ([2, 1.1 Lemma]).

命題 2. $(V_\varepsilon \cap G)_{\varepsilon \in E}$ は定数関数 0 の convex, symmetric 基本 $T_0(G)$ -近傍系である。

Y は局所 compact 空間, B は $C(Y)$ の adapted linear space とある。また、 B は $C(Y)$ の linear subspace で、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものとする:

(i) $B = B^+ - B^+$,

(ii) どんな $y \in Y$ に對しても、 $f(y) > 0$ であるような $f \in B^+$ が存在する,

(iii) どんな $f \in B^+$ に對しても、次の性質をもつ $g \in B^+$ がある: 任意の $\varepsilon > 0$ に對して、 $\{y; f(y) > \varepsilon g(y)\}$ は compact 集合である。

S は Y の閉部分集合とある. $B^b(S) = \{f|_S; f \in B^b\}$ とおく. そのとき $B_0(S) = B^b(S) \cap C(S)$ はやはり $C(S)$ の adapted 空間であり, $B_0(S)$ は $\mathbb{R}^S$ の sub-vector lattice である. さて, $B_0(S)$ の order 位相は $B^b(S)$ 上の order 位相により induce されたものである. $B_0(S)$ における net (f_α) がこの order 位相で f に収束するとき, (f_α) は f に S 上 order 収束あるという.

17. Bauer による次の定理 ([2, 2.1. lemma]) は Dini の定理の局所 compact 空間への拡張である.

定理 5. $(g_i)_{i \in I}$ は $B_0(Y)$ の decreasing net で, どんな $y \in S$ に対しても $\inf_i g_i(y) = 0$ とある. そのとき, $(g_i)_{i \in I}$ は S 上 0 に order 収束ある.

E は ordered vector 空間, F はその linear subspace で, E は F^+ -bounded とある. このとき, 定理 5 を使って, 次の定理が得られる.

定理 6. Y は局所 compact 空間とある. A は E から $C(Y)$ への positive linear mapping で, 点 A に関する $A(F)$ は $C(Y)$ の adapted space とある. $(L_i)_{i \in I}$ は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net で, S は Y の閉部分集合とある. このとき, どんな $g \in F$ に対しても

$(L; g)$ は Ag に S 上で order 収束すれば, S 上で $Af = \overline{Af}$ を満足するどんな $f \in E$ に対しても, $(L; f)$ は Af に S 上で order 収束する。

この定理が成り立つから, 定理と同じ仮定のもとで, 定理 2 の系 1, 2 で収束を order 収束に, S を閉集合とした形の系も得られることは明らかである。

§6. 応用.

[3] で考えられた finite defined operators に関する Korovkin type の定理は, ほとんどゆるい条件のもとで, 定理 2 の系を使うことにより簡単に証明される。そのため, X と Y は compact Hausdorff 空間で, X は少なくとも $n+1$ 個の要素を持つとある。 $E = C(X)$ として, E から $C(Y)$ への positive linear mapping A を

$$Af(y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(y) f(\varphi_i(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y,$$

と定義する。ここで, $\psi_i \in C^+(Y)$, φ_i は Y から X への連続写像とある。 $C(X)$ の linear subspace F は次の性質を持つものとする:

どんな異なる n 個の X の点 $x_1, \dots, x_n$ について x_i 上では 0 ($1 \leq i \leq n$), その他の点 x では $g(x) > 0$ と

なるような $g \in F$ が存在する。

このとき、 $\delta(A(F)) = Y$ であり、このことが簡単に証明されるから、定理2の系2により次の定理が成り立つ。

定理7. (L_i) は $C(X)$ から (Y) への monotone mappings からなる net とある。どんな $g \in F$ に対して $(L_i g)$ が Ag に一様に収束すれば、どんな $f \in C(X)$ に対して $(L_i f)$ は Af に一様に収束する。

参考文献

- [1] H. Bauer, Theorems of Korovkin type for adapted spaces. Ann. Inst. Fourier 23, 245-260 (1973).
- [2] H. Bauer, Convergence of monotone operators, Math. Z. 136, 315-330 (1974).
- [3] A. S. Cavaretta, Jr., A Korovkin theorem for finite defined operators, Proc. Intern. Symp. on Approximation Theory (Univ. of Texas, Austin, Jan. 22-24), 299-305 (1973).