

一般の虚アーベル体の Demjanenko matrix について

青山学院高等部 津村 博文 (Hirofumi Tsumura)

§ 0. Introduction

自然数 n に対し, $A_n = \{a \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq a < n/2, (a, n) = 1\}$ とおく. また整数 x に対し, $R(x) = R_n(x)$ を x modulo n の剰余類の代表元で $0 \leq R(x) < n$ となるものとし, x' を $xx' \equiv 1 \pmod{n}$ で $1 \leq x' < n$ となる整数とする. このとき Maillet determinant $D(n)$ が次のように定義される.

$$D(n) = \det \left(R(ab') \right)_{a, b \in A_n}. \quad (0.1)$$

Carlitz-Olson は 任意の奇素数 p に対し, 次の関係式を証明した ([C-O]).

$$D(p) = \pm p^{(p-3)/2} h^-(\mathbf{Q}(\zeta_p)). \quad (0.2)$$

ここで $h^-(\mathbf{Q}(\zeta_p))$ は $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ の相対類数である. この (0.2) は一般の円分体にまで一般化されたが, 最近になって Girstmair によって虚アーベル体の Maillet determinant が定義され (0.2) が一般化された ([G]).

Maillet determinant に類するものとして Demjanenko Matrix がある. この行列は以前から Folz や Zimmer によって, ある楕円曲線の torsion point の order の bound を与えるなど ([F-Z]) 有効に使われていたものであるが, Hazama によって $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ に付随する Demjanenko matrix Δ_p の determinant が計算され, (0.2) の類似として次の関係式が証明された ([Ha]).

$$\det \Delta_p = \pm \frac{F}{p} h^-(\mathbf{Q}(\zeta_p)). \quad (0.3)$$

ただし $F = \prod_{\chi} (2 - \chi(2))$, ここで χ は $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ の奇指標全体を動く. この (0.3) は Sands-Schwarz によって 導手が奇素数巾の虚アーベル体に拡張され ([S-Sch]), Dohmae によって 導手が奇数の虚アーベル体に拡張された ([D]). また最近になって, Hirabayashi により導手が偶数のもののうち, ある条件をみたす虚アーベル体についても (0.3) の拡張された結果が示された ([Hi]).

この小文では、一般の虚アーベル体 K (すなわち導手は任意) について、その導手と互いに素な 2 以上の自然数 ℓ にたいし、generalized Demjanenko matrix $\Delta(K, \ell)$ を構成し、(0.3) の一般化である次の関係式を証明する (§2 参照)。

主定理

$$\det \Delta(K, \ell) = \frac{(-2)^{[K:\mathbf{Q}]/2}}{Q_K w_K} h^-(K) \prod_{\chi \in X^-} (\ell \chi(\ell) - 1) \prod_{p|n} (1 - \chi(p)),$$

ここで Q_K はいわゆる K の unit index, w_K は K に属する 1 の巾根の総数, X^- は $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の奇指標全体とする。

$\ell = 2$ のとき, $\Delta(K, 2)$ は本質的に Demjanenko matrix と一致することがわかる (§2 参照)。また $\ell = n + 1$ のとき, $\Delta(K, n + 1)$ は Girstmair の定義した K の Maillet determinant をあらわす行列と一致していることがわかる (§3 参照)。このとき, 上記の主定理の結果は [G] の Theorem 1 の結果と完全に一致している。従ってこの $\Delta(K, \ell)$ は Maillet determinant と Demjanenko matrix の両方の一般化とみなすことができる。

応用として §4 では導手が 2 巾である虚アーベル体 K について, $h^-(K)$ の upper bound を与える。この評価は, [S-Sch] の Theorem 4 の類似と見ることができる。§5 では $\Delta(K, \ell)$ の行列の直和分解を考察する。すなわち $c|([K:\mathbf{Q}]/2)$ となる c について, $\Delta(K, \ell)$ が c 個の小行列の直和からなる行列と相似であることを証明する。とくに $c = [K:\mathbf{Q}]/2$ のときが $\Delta(K, \ell)$ の対角化であり, 各対角成分は本質的に一般ベルヌイ数となる。§6 では K の cyclotomic $\mathbf{Z}_p$ -extension $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots$ に付随するような generalized Demjanenko matrix $\Delta(K, \ell, m)$ ($m \geq 0$) を構成する。ただし $\Delta(K, \ell, m) \in M([K:\mathbf{Q}]/2, \mathbf{Q}(\zeta_{p^m}))$ であり, $m = 0$ のとき $\Delta(K, \ell, 0) = \Delta(K, \ell)$ である。

なお, この小文の内容について, §2, §3, §4 については [T2] に, §5 については [T3] に, §6 については [T4] にまとめられている。

§ 1. Stickelberger element の類似物

$G = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q}) = \{\sigma_a \mid \sigma_a : \zeta_n \rightarrow \zeta_n^a, (a, n) = 1\}$, $H = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/K)$, $G_K = \text{Gal}(K/\mathbf{Q}) \simeq G/H$ とする。ここで $\sigma_a|_K$ も簡単のため σ_a とかく。 $J = \sigma_{-1}$

を複素共役とする. また $\mathbf{Q}$ の代数閉包を $\overline{\mathbf{Q}}$ とかき, 群環 $V = \overline{\mathbf{Q}}[G_K]$ を考える. $V^- = \{x \in V \mid Jx = -x\}$ とおくと, $V^- = (1 - J)V$ である.

$\mathbf{Q} \subset K \subset \mathbf{Q}(\zeta_n)$ なので, $T_K \subset \{a \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq a < n, (a, n) = 1\}$ で $H = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/K) = \{\sigma_a \mid a \in T_K\}$ となる T_K がとれる. さらに $J = \sigma_{-1} \notin H$ なので, $S_K \subset A_n = \{c \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq c < n/2\}$ で $\{\sigma_c \mid c \in S_K\} \cup \{\sigma_{-c} \mid c \in S_K\}$ が $G/H \simeq G_K$ の完全代表系となる S_K がとれる.

以下 [W] § 6.3, § 6.4 の記号を使う. X を G_K の指標群とし, X^- を G_K の奇指標全体, X^+ を偶指標全体とする. $\chi \in X$ にたいし

$$\varepsilon_\chi = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{a \in S_K} \chi(a) (\sigma_a^{-1} + \chi(-1)\sigma_{-a}^{-1})$$

とすると, $\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X\}$ は $V = \overline{\mathbf{Q}}[G_K]$ の orthogonal idempotents である. 注として $\varepsilon_\chi \sigma_a^{-1} = \overline{\chi}(a)\varepsilon_\chi$ である. $\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X\}$ が V の $\overline{\mathbf{Q}}$ -basis で, $\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X^-\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$ -basis であることは容易にわかる.

そこで $\ell > 1$ で $(\ell, n) = 1$ となる $\ell \in \mathbf{Z}$ をとり, 次の記号を定義する.

$$A_n(b, \ell) = \sum_{\substack{\zeta^{\ell=1} \\ \zeta \neq 1}} \frac{\zeta^{n-b}}{1 - \zeta^n} \in \mathbf{Q}. \quad (1.1)$$

Remark. もし n が奇数ならば, $\ell = 2$ としてよい. このとき $A_n(b, 2) = (-1)^{b-1}/2$ となる.

DEFINITION 1.1. $\rho = \rho(K, \ell) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^n A_n(R(a), \ell) \sigma_a^{-1} \in \mathbf{Q}[G_K]$.

Remark. $A_n(R(n-a), \ell) = -A_n(R(a), \ell)$ なので, $\rho \in V^-$ である. とくに $\ell = n+1$ のとき, $\rho(K, n+1)$ は (K の Stickelberger element - half norm) の n 倍であることが確かめられる.

以下 $\chi \in X^-$ とする. 定義より,

$$\rho \varepsilon_\chi = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^n A_n(R(a), \ell) \overline{\chi}(a) \varepsilon_\chi. \quad (1.2)$$

次の補題が, [W] の Lemma 12.15 と [T] の Lemma 1 よりえられる.

LEMMA 1.2. $\sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^n A_n(R(a), \ell) \chi(a) = (\ell \chi(\ell) - 1) B_{1,\chi} \prod_{p|n} (1 - \chi(p)).$

この補題と (1.2) より, 次の命題をえる.

PROPOSITION 1.3. $\rho \varepsilon_\chi = \varepsilon_\chi (\ell \bar{\chi}(\ell) - 1) B_{1,\bar{\chi}} \prod_{p|n} (1 - \bar{\chi}(p)).$

§ 2. 主定理の証明

S_K と T_K の定義から

$$G = \{\sigma_a \sigma_c \mid a \in T_K, c \in S_K\} \cup \{\sigma_a \sigma_{-c} \mid a \in T_K, c \in S_K\} \quad (2.1)$$

であるが, $a \in T_K$ ならば $\sigma_a|_K = 1$ なので $\sigma_a \sigma_c = \sigma_c$ on K となる. $\rho(K, \ell) \in V^-$ より次をえる.

LEMMA 2.1. $\rho = \sum_{c \in S_K} \left(\sum_{a \in T_K} A_n(R(ac), \ell) \right) (\sigma_c^{-1} - \sigma_{-c}^{-1}).$

$(c, n) = 1$ となる $c \in \mathbf{Z}$ にたいし, $\xi_c = \sigma_c^{-1} - \sigma_{-c}^{-1}$ とおくと, $\{\xi_c \mid c \in S_K\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$ -basis となる. ここで $\xi_a \xi_b = 2\xi_{ab}$, $\xi_{-a} = -\xi_a$ なので, Lemma 2.1 より

$$\rho \xi_d = 2 \sum_{c \in S_K} \left(\sum_{a \in T_K} A_n(R(ac), \ell) \right) \xi_{cd}. \quad (2.2)$$

$(a, n) = 1$ となる $a \in \mathbf{Z}$ にたいし $b \in T_K$ と $c \in S_K$ を $\sigma_a = \sigma_b \sigma_c$ または $\sigma_a = \sigma_b \sigma_{-c}$ となるようにとれる. このとき $g(a) = c$,

$$f(a) = \begin{cases} 1 & (if \ \sigma_a = \sigma_b \sigma_c) \\ -1 & (if \ \sigma_a = \sigma_b \sigma_{-c}) \end{cases} \quad (2.3)$$

とおく. 注として $\sigma_a = \sigma_{f(a)g(a)}$ on K なので, 次の2つの補題が成り立つ.

LEMMA 2.2. $c \in S_K$ ならば $\{g(cd) \mid d \in S_K\} = S_K$.

LEMMA 2.3. $b, c, d \in S_K$ について $g(cd) = b$ ならば $c = g(bd')$ かつ $\xi_{cd} = f(bd') \xi_b$.

この2つの補題より, 次の命題をえる.

PROPOSITION 2.4. $d \in S_K$ について,

$$\rho \xi_d = 2 \sum_{b \in S_K} \left(\sum_{a \in T_K} A_n(R(abd'), \ell) \right) \xi_b.$$

DEFINITION 2.5. $\Delta(K, \ell) = \left(2 \sum_{a \in T_K} A_n(R(abc'), \ell) \right)_{b, c \in S_K}.$

主定理の証明

$\{\varepsilon_\chi; \chi \in X^-\}$ と $\{\xi_d; d \in S_K\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$ -basis なので, $L_\rho(v) = \rho v$ で定義される V^- の endmorphism L_ρ のこれらの basis に関する表現行列を考えると, Proposition 1.3, Proposition 2.4, Definition 2.5 と 解析的類数公式 ([W] Proposition 4.9 等) より, 主定理が証明される.

Remark 1. この $\Delta(K, \ell)$ は ordinary Demjanenko matrix のある種の一般化とみることができる. 実際, $|\det \Delta(K, 2)| = 2^{[K:\mathbf{Q}]/2-1} |\det D| = |\det \widetilde{D}|$ が成り立つ. ここで D は Sands-Schwarz の Demjanenko matrix, $\widetilde{D}$ は [S-Sch] において考察されている modified Demjanenko matrix である.

Remark 2. $\prod_{\chi \in X^-} (\ell \chi(\ell) - 1)$ と $\prod_{p|n} (1 - \chi(p))$ の値は [G], [S-Sch], [D] 等できちんと計算されている.

§ 3. Girstmair's Determinant

この § では $\ell = n + 1$ とする. Proposition 1.3 より

$$\begin{aligned} \varepsilon_\chi \rho(K, n+1) &= \varepsilon_\chi n B_{1, \overline{\chi}} \prod_{p|n} (1 - \overline{\chi}(p)) = \varepsilon_\chi \sum_{\substack{a=1 \\ (a, n)=1}}^n \overline{\chi}(a) a \\ &= \varepsilon_\chi \sum_{\substack{a=1 \\ (a, n)=1}}^n n B_1 \left(\frac{R(a)}{n} \right) \sigma_a^{-1} \end{aligned}$$

が $\chi \in X^-$ について成り立つ. ただし $B_1(x) = x - 1/2$ (ベルヌイ多項式) である.
 注として $\sum_a B_1(R(a)/n) \sigma_a^{-1} \in V^-$ なので, $\sum_{\chi \in X} \varepsilon_\chi = 1$ より,

$$\rho(K, n+1) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^n n B_1\left(\frac{R(a)}{n}\right) \sigma_a^{-1} = n \sum_{c \in S_K} \sum_{a \in T_K} B_1\left(\frac{R(ac)}{n}\right) \xi_c$$

が成り立つ. Lemma 2.1 より

$$\sum_{a \in T_K} A_n(R(ac), n+1) = \sum_{a \in T_K} n B_1\left(\frac{R(ac)}{n}\right)$$

が $c \in S_K$ について成り立つ. よって Definition 2.5 より, 次の補題をえる.

$$\text{LEMMA 3.1.} \quad \Delta(K, n+1) = \left(2n \sum_{a \in T_K} B_1\left(\frac{R(abc')}{n}\right) \right)_{b, c \in S_K}.$$

主定理より, 次の命題をえる. これは [G] の Theorem 1 の結果と一致する.

$$\text{PROPOSITION 3.2.} \quad \det \Delta(K, n+1) = \frac{(-2n)^{[K:\mathbb{Q}]/2}}{Q_K \omega_K} h^-(K) \prod_{p|n} (1 - \chi(p)).$$

§ 4. Upper Bound for $h^-(K)$

奇素数 p について導手が p 巾の虚アーベル体 K にたいし, Sands-Schwarz は $h^-(K)$ の upper bound をあたえた ([S-Sch] Theorem 4). ここでは虚アーベル体 K の導手を 2^m と仮定し, $\ell = 3$ として主定理を適用する. $F(\ell, K) = \prod_{\chi \in X^-} (\ell \chi(\ell) - 1)$ とおくと次の命題をえる.

$$\text{PROPOSITION 4.1.} \quad h^-(K) \leq \frac{\omega_K}{|F(3, K)|} \left(2^{m-2} [\mathbb{Q}(\zeta_{2^m}) : K] \right)^{[K:\mathbb{Q}]/4}.$$

$$\text{COROLLARY 4.2.} \quad h^-(\mathbb{Q}(\zeta_{2^m})) \leq 2^m \left(\frac{2^{m-2}}{9} \right)^{2^{m-3}}.$$

§ 5. $\Delta(K, \ell)$ の直和因子

Y を $(X^+ : Y) = c$ となる X^+ の部分群とする. そこで X/Y の代表系のうちで, 奇指標が代表元となるものの全体を $\{\psi_1, \dots, \psi_c\}$ とする.

$$\lambda_s = \sum_{\chi \in Y} \varepsilon_{\psi_s \chi} \quad (s = 1, \dots, c)$$

にたいして $V_s = \lambda_s V$ とおく. ψ_s は奇指標なので $V_s \subset V^-$ である. そこで

$$\ker Y = \{\sigma_a \in G_K \mid \chi(a) = 1 \text{ for any } \chi \in Y\}$$

とおく. $|\ker Y| = (X : Y) = 2c$ なので ([W] Chap.3 参照), $(G_K : \ker Y) = d/c$ となる. $J \in \ker Y$ より $\Gamma \subset S_K$ で $\{\sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ が $G_K/\ker Y$ の完全代表系となるものがとれ, 次の補題が成り立つ.

LEMMA 5.1. $\{\lambda_s \sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ は V_s の $\overline{\mathbf{Q}}$ -basis となる. ($s = 1, \dots, c$).

そこで $L_\rho|_{V_s}$ の $\{\lambda_s \sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ に関する表現行列を $\Delta_s(K, \ell, Y)$ とする. 以下 $\Delta_s(K, \ell, Y)$ の成分を具体的にかこう. $J \in \ker Y$ なので, $\Omega \subset \{x \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq x < n/2\}$ であって $\ker Y = \{\sigma_x^{-1} \mid x \in \Omega\} \cup \{\sigma_{-x}^{-1} \mid x \in \Omega\}$ となるものがとれる. よって

$$\rho = 2 \sum_{y \in \Gamma} \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axy), \ell) \xi_{xy}$$

となる. §2 と同様に, $z \in \Omega$ ならば $\{g(yz) \mid y \in \Omega\} = \Omega$ であること, また $y, z, w \in \Omega$ が $g(yz) = w$ ならば $y = g(wz')$ かつ $\xi_{yz} = f(wz') \xi_w$ であることが示せるので, 次の命題をえる.

PROPOSITION 5.2. $z \in \Gamma$ にたいして

$$\rho(\lambda_s \sigma_z^{-1}) = 2 \sum_{y \in \Gamma} \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axy z'), \ell) \psi_s(x) \lambda_s \sigma_y^{-1}$$

が成り立つ.

DEFINITION 5.3. $1 \leq s \leq c$ となる s について

$$\Delta_s(K, \ell, Y) = \left(2 \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axy z'), \ell) \psi_s(x) \right)_{y, z \in \Gamma}.$$

これらと Proposition 2.4 をあわせて次の命題をえる.

PROPOSITION 5.4. $\Delta(K, \ell)$ は次の行列と相似である.

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(K, \ell, Y) & & & 0 \\ & \Delta_2(K, \ell, Y) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_c(K, \ell, Y) \end{pmatrix}.$$

COROLLARY 5.5. $1 \leq s \leq c$ となる s について

$$\det \Delta_s(K, \ell, Y) = \prod_{\chi \in Y} (\ell \psi_s \chi(\ell) - 1) B_{1, \psi_s \chi} \prod_{\substack{p: \text{prime} \\ p | n}} (1 - \psi_s \chi(p)).$$

ここで $B_{1, \chi}$ は一般ベルヌイ数 ([W] Chap.4 参照).

§ 6. 円分 $\mathbf{Z}_p$ -拡大に付随する Demjanenko matrix

§2 で考察した $\Delta(K, \ell)$ は $([K : \mathbf{Q}]/2) \times ([K : \mathbf{Q}]/2)$ -行列なので, $[K : \mathbf{Q}]$ が大きくなると, 行列自身が大きくなってしまふ. そこでとくに K の円分 $\mathbf{Z}_p$ -拡大

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots$$

を考察するときに, §2 で考察した ρ を修正することにより, その表現行列として $\Delta(K, \ell, m) \in M([K : \mathbf{Q}]/2, \mathbf{Q}(\zeta_p^m))$ ($m \geq 0$) が定義されて, 次の命題が成り立つ.

PROPOSITION 6.1. K の導手が d または dp (ただし $(d, p) = 1$) であるとき,

$$\det \Delta(K, \ell, m) = \frac{(-2)^{[K_m : \mathbf{Q}]/2}}{Q_{K_m} w_{K_m}} h^-(K_m) \prod_{\chi \in X^-(K_m)} (\ell \chi(\ell) - 1) \prod_{q | dp} (1 - \chi(q)).$$

Remark. とくに $\Delta(K, \ell, 0) = \Delta(K, \ell)$. 従って $\Delta(K, \ell, m)$ は $\Delta(K, \ell)$ を $\mathbf{Z}_p$ -拡大の方向へ, 大きさを変えずに持ち上げていったものとみなせる. (詳細は [T4] 参照)

References

- [C-O] L.Carlitz and F.R.Olson, Maillet's determinant, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 265-269.
- [D] K.Dohmae, Demjanenko's matrix for imaginary abelian fields of odd conductors, Proc. Japan Acad. **70**(A) (1994), 292-294.
- [F-Z] H.G.Folz and H.G.Zimmer, What is the rank of the Demjanenko matrix?, J. Symb. Comp., **4** (1987), 53-67.
- [Ha] F.Hazama, Demjanenko matrix, class number, and Hodge group, J. Number Theory, **34** (1990), 174-177.
- [Hi] M.Hirabayashi, Relative class number formulae of an imaginary cyclic field by means of Maillet determinant and Demjanenko matrix, preprint.
- [G] K.Girstmair, The relative class numbers of imaginary cyclotomic fields of degrees 4,6,8,and 10, Math. Comp., **61** (1993), 881-887.
- [S-Sch] J.W.Sands and W.Schwarz, A Demjanenko matrix for abelian fields of prime power conductor, J. Number Theory **52** (1995), 85-97.
- [T1] H.Tsumura, On p-adic interpolation of the generalized Euler numbers and its applications, Tokyo J. Math., **10** (1987), 281-293.
- [T2] H.Tsumura, On Demjanenko's matrix and Maillet's determinant for imaginary abelian number fields, J. Number Theory, to appear.
- [T3] H.Tsumura, On a direct sum decomposition of the Demjanenko matrix, preprint, in submitting.
- [T4] H.Tsumura, On the Demjanenko matrix associated to the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$ -extension, preprint.
- [W] L.C.Washington, Introduction to cyclotomic fields, Springer-Verlag, New-York (1982).