

非粘性 Burgers 方程式の 高次 Gram-Charlier 型展開

電波研究所 田 中 浩

§ 1. 序

多くの乱流の研究者による均質・等方的乱れのいわゆる closure problem に対する試みにもかかわらず、最終的な解決は非線型性の困難さのために阻まれてきた。 n 次のモーメントを求めようとするれば、基本方程式 (Navier-Stokes 方程式, Burgers 方程式) の非線型項のために生じる $n+1$ 次のモーメントがあらわれる。このような方程式系を閉じさせるには何らかの仮定が必要である。これらの仮定については Monin & Yaglom (1967) にまとめられている。

乱れの非線型機構の model は大きく 2 種類に分けられる。最初はいわゆる逐次展開にもとづくアプローチである。Reynolds 数展開, キュムラント展開, Wiener-Hermite 展開などはこれに属する。才 2 には例えば Tatsumi (1969) によって Burgers 乱れに関して行われたような非線型波展開の方法である。この方法は

基底として非線型波動 (Burgers 乱れならば 3 角波, Navier-Stokes 乱れならば 多分渦糸) を採用するところが従来の逐次展開と異なっている。

この論文の目的は Kampé de Fériet によって提案された Gram-Charlier 型展開の妥当性を調べることである。この展開は上に述べた 2 種類の方法のうち最初の部類に属する。それ故にこの Gram-Charlier 展開の結果から他の逐次展開のそれを類推できそうである。0-4 次キュムラント近似で Tatsumi (1957) によって導かれた方程式の初期値問題が Ogura (1962, 1963) によって数値的に解かれその結果ある大きさ以上の Reynolds 数ではある時間後にエネルギー・スペクトルが負になることが発見された。より高次の方程式系のエネルギー・スペクトルの性質を調べるために, Kawahara (1968) は Burgers 乱れの Hopf 汎函数方程式を作り, 0-5 次キュムラント近似を使って展開した。その結果負のエネルギーの発生する波数領域は 0-4 次キュムラント展開の場合と比較して高い方に移ることを示している。Tanaka (1969) は非粘性 Burgers 乱れに 0-5 次展開を適用してその初期値問題を数値的に解いて同様の結果を得た。Tanaka (1970) はまたより高い次数 (0-6 次展開に対応) についても数値解析を行った結果、負エネルギーは 0-5 次展開の場合よりもさらに高い波数領域にあらわれることをたしかめた。

この論文では、著者は非粘性 Burgers 乱れについて最高 0-7 次近似まで展開して、エネルギー・スペクトルの性質を調べる。数値積分は相関方程式のままで行い、その結果を再び数値的に Fourier 変換してスペクトルの値を求めている。

§ 2. 基本方程式

Burgers 乱れの運動は、次の無次元方程式によってあらわされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-1)$$

ただし $u=u(x, t)$ で、 x と t はそれぞれ空間と時間をあらわす。また Re は Reynolds 数である。方程式 (2-1) の解については Burgers (1950) によって相当厳密に調べられている。(2-1) で $Re=\infty$ とした非粘性方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-2)$$

は解として

$$u(x, t) = (x - x_0) / (t - t_0) \quad (2-3)$$

をもつ。ただし x_0, t_0 は常数である。非常に大きいがいしかし有限の Re では、方程式 (2-1) はステップ解をもつ。すなわち

$$u(x, t) = C - w \tanh\left(\frac{R}{4} w \xi\right) \quad (2-4)$$

となる。ここで $C = (u_l + u_r) / 2$, $w = (u_l - u_r) / 2 \geq 0$, $\xi = x - x_0 - C(t - t_0)$, u_l と u_r はそれぞれその層の左端 ($\xi < 0$) と

右端($\xi > 0$)における u の値である。これは $R \rightarrow \infty$ の極限で、完全なステップ函数となる。こうして $R \rightarrow \infty$ で2つの結合された解は周期的な鋸歯状波となり、

$$u(x, t) = \left(\frac{2\pi}{t}\right) \text{saw } x \quad (2-5)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \text{saw } x &= \begin{cases} x/2\pi + \frac{1}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ x/2\pi - \frac{1}{2} & 0 < x \leq \pi \end{cases} \\ \text{saw } x &= \text{saw}(x + 2\pi) \end{aligned} \right\} (2-6)$$

このように粘性の影響はそれがどんなにわずかであっても shock layer を作ることができる。しかしながら、方程式(2-2)の場合には粘性の影響は全く考慮されていないので、多価の解をもつ可能性がある。一般に方程式(2-2)の解は

$$u = f(x - ut) \quad (2-7)$$

と書ける。ここで f は u の初期値である。この方程式の解は一般には多価である。初期値として一価函数を与えても時間が経過するにつれて break down をおこして多価になる。多価性の発生によってエネルギー・スペクトルに何らかの破綻が生じるかどうかについては、あまりはっきりしたことはいえない。後に追記で若干説明することにして先に進む。

§ 3. 相関方程式系

任意の段階の連立相関方程式系を形成するために、以下に

述べるような若干面倒な計算をしなければならない。計算過程を示すために、2方程式系(これは0-4次キュムラント近似に対応)を採用する。この論文にあらわれる相関はすべて空間座標の2点 x と x' の間のそれである。

点 x' においても、(2-2)と同様な方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad (3-1)$$

が得られる。ここで u' は x' における速度をあらわす。(2-2)に u' を乗じ、(3-1)に u を乗じ、それらを加えると

$$\frac{\partial}{\partial t} uu' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u^2 u' + \frac{\partial}{\partial x'} uu'^2 \right) \quad (3-2)$$

を得る。3重相関を求めるには、点 x'' (x, x' とは異なる)におけるもう1つの方程式

$$\frac{\partial u''}{\partial t} + u'' \frac{\partial u''}{\partial x''} = 0 \quad (3-3)$$

が必要である。いま $u'' = u''(x'', t)$ 。(2-2)に $u'u''$ を、(3-1)に $u''u$ を、(3-3)に uu' をそれぞれ乗じて加え合わせると

$$\frac{\partial}{\partial t} uu'u'' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u^2 u' u'' + \frac{\partial}{\partial x'} uu'^2 u'' + \frac{\partial}{\partial x''} uu'u'^2 \right) \quad (3-4)$$

を得る。(3-2)の右辺にあらわれる縮退した形 $u^2 u'$ と uu'^2 は u'' を u あるいは u' に一致させることによって得られる。その結果

$$\frac{\partial}{\partial t} u^2 u' = -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} u^3 u' + \frac{\partial}{\partial x'} u^2 u'^2 \right) \quad (3-5)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial t} uu'^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u^2 u'^2 + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x'} uu'^3 \right) \quad (3-6)$$

となる。

もし x と x' の距離が r であるとすれば, 均質・等方性乱れでは相関量は r のみであらわすことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} x' - x &= r \\ \frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \right\} (3-7)$$

次に Frenkiel & Klebanoff (1967) にならって相関の記号を導入する。それは

$$R^{m,n}(r) = \langle u^m(x) u^n(x+r) \rangle \quad (3-8)$$

である。 $\langle \rangle$ は統計的平均をあらわす。よって方程式 (3-2), (3-5), (3-6) の平均をとってさらに (3-7), (3-8) を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t} R^{1,1}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{R^{2,1}(r) - R^{1,2}(r)}{2} \quad (3-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R^{2,1}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{2}{3} R^{3,1}(r) - \frac{1}{2} R^{2,2}(r) \right\} \quad (3-10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R^{1,2}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -\frac{2}{3} R^{1,3}(r) + \frac{1}{2} R^{2,2}(r) \right\} \quad (3-11)$$

と表現できる。(3-10) と (3-11) を (3-9) に代入してさらに

$$\begin{aligned} R(r) &= R^{1,1}(r) \\ T(r) &= \frac{R^{2,1}(r) - R^{1,2}(r)}{2} \end{aligned}$$

とおくと次のような方程式系を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} R(r) = \frac{\partial}{\partial r} T(r) \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{R^{3,1}(r) + R^{1,3}(r)}{3} - \frac{1}{2} R^{2,2}(r) \right\} \quad (3-13)$$

ここで $R(r)$ は 2 重相関で, $T(r)$ は特に skewness と呼ばれる。もし (3-13) の右辺の 4 重相関が何らかの仮定のもとに 2 重相関と関連づけられれば, 2 つの従属変数 $R(r)$ と $T(r)$ をもつ閉じ

らに連立方程式を得ることができる。

一層高次の相関方程式系は同様な方法で得られる。一般に n 個の点の速度積の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u u' \dots u^{(n-1)} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u^2 u' \dots u^{(n-1)} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} u u'^2 \dots u^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{(n-1)}} u u' \dots u^{(n-1)^2} \right) \quad (3-14) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで $u^{(n-1)} = u(x^{(n-1)}, t)$ 。この方程式を使って適宜縮退させて平均をとれば任意の次数の相関を司る方程式が得られる。いま (3-13) の右辺の括弧の中を $Q(r)$ とおけば, $Q(r)$ を含む3つの連立方程式が得られる (これを3方程式系と呼ぶ)。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} Q(r) \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4} (R^{4,1}(r) - R^{1,4}(r)) - \frac{1}{2} (R^{3,2}(r) - R^{2,3}(r)) \right\} \quad (3-16)$$

ここで $Q(r)$ は

$$Q(r) = \{ R^{3,1}(r) + R^{1,3}(r) \} / 3 - R^{2,2}(r) / 2 \quad (3-17)$$

いま (3-16) の右辺の5重相関が2重相関 $R(r)$, Skewness $T(r)$ など表現できれば, $R(r)$, $T(r)$, $Q(r)$ の3つの変数に関する閉じた方程式系をつくる。2方程式系と3方程式系については Tanaka (1969) に詳述してある。

4方程式系, 5方程式系についても同様の方法で次のようになる (cf. Tanaka 1970)。

4 方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t} R(r) = \frac{\partial}{\partial r} T(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r) = \frac{\partial}{\partial r} Q(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(r) = \frac{\partial}{\partial r} S(r) \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{R^{5,1}(r) + R^{1,5}(r)}{5} - \frac{R^{4,2}(r) + R^{2,4}(r)}{2} + \frac{2}{3} R^{3,3}(r) \right\} \quad (3-19)$$

ここで $S(r)$ は super-skeuiness に関する量で

$$S(r) = \frac{R^{4,1}(r) - R^{1,4}(r)}{4} - \frac{R^{3,2}(r) - R^{2,3}(r)}{2} \quad (3-20)$$

と定義される。

5 方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t} R(r) = \frac{\partial}{\partial r} T(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r) = \frac{\partial}{\partial r} Q(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(r) = \frac{\partial}{\partial r} S(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S(r) = \frac{\partial}{\partial r} H(r) \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{R^{6,1}(r) - R^{1,6}(r)}{6} + \frac{R^{2,5}(r) - R^{5,2}(r)}{10} \right. \\ \left. - \frac{2}{5} (R^{5,2}(r) - R^{2,5}(r)) - \frac{R^{3,4}(r) - R^{4,3}(r)}{3} + \frac{R^{4,3}(r) - R^{3,4}(r)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3-22)$$

ここで $H(r)$ は

$$H(r) = \frac{R^{5,1}(r) + R^{1,5}(r)}{5} - \frac{R^{4,2}(r) + R^{2,4}(r)}{2} + \frac{2}{3} R^{3,3}(r) \quad (3-23)$$

と定義される。

これらの方程式系を解くためにはやはり閉じられた形にし

なければならぬ。

§ 4. 閉じられた方程式系

階級方程式を閉じさせるための仮定はいくつかあるが、ここでは Kampé de Fériet (1966) によって提案された仮定を使う。いま使われる結合確率密度分布は2つの変数の Hermite 多項式を含む Gram-Charlier 型展開であり次のように書ける：

$$H_{j,k}(u_1, u_2) = (-1)^{j+k} \exp\left\{\frac{1}{2}\Phi(u_1, u_2)\right\} \times \frac{\partial^{j+k}}{\partial u_1^j \partial u_2^k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Phi(u_1, u_2)\right\} \quad (4-1)$$

$$G_{j,k}(u_1, u_2) = (-1)^{j+k} \exp\left\{\frac{1}{2}\Psi(\xi_1, \xi_2)\right\} \times \frac{\partial^{j+k}}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Psi(\xi_1, \xi_2)\right\} \quad (4-2)$$

ここで $\Phi(u_1, u_2)$, $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ は

$$\Phi(u_1, u_2) = (1-R^2)^{-1} (u_1^2 - 2Ru_1u_2 + u_2^2)$$

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2R\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$$

ただし

$$\xi_1 = \frac{u_1 - Ru_2}{1 - R^2} \quad \xi_2 = \frac{u_2 - Ru_1}{1 - R^2}$$

このように上記で定義した函数を使うと結合確率密度分布は

$$P(u_1, u_2) = P_0(u_1, u_2) \sum_0^{j+k} A_{j,k} H_{j,k}(u_1, u_2) \quad (4-3)$$

となり、展開係数は

$$A_{j,k} = \frac{1}{j!k!} \langle G_{j,k}(u_1, u_2) \rangle \quad (4-4)$$

となる。ここで $P_0(u_1, u_2)$ は Gauss 分布である。この分布を使えば異なった次数の相関の関係を求めることができるが、詳細は Frenkiel & Klebanoff (1967) を参照することにして、ここでは必要な結果だけを示しておく。

(i) 4次相関

$$\left. \begin{aligned} R^{1,3}(r) &= R^{3,1}(r) = 3R \\ R^{2,2}(r) &= 1 + 2R^2 \end{aligned} \right\} (4-5)$$

(ii) 5次相関

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}^{3,2}(r) &= 3(2R-1)T \\ \bar{R}^{4,1}(r) &= 6T \end{aligned} \right\} (4-6)$$

(iii) 6次相関

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}^{5,1}(r) &= 15R \\ \bar{R}^{4,2}(r) &= 3 + 12R^2 \\ R^{3,3}(r) &= 2R(3 + 2R^2) \end{aligned} \right\} (4-7)$$

(iv) 7次相関

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}^{6,1}(r) &= 45T \\ \bar{R}^{5,2}(r) &= 15(4R-1)T \\ \bar{R}^{4,3}(r) &= 18(2R^2 - 2R + 1)T \end{aligned} \right\} (4-8)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{R}^{m,n}(r) &= (R^{m,n}(r) - R^{n,m}(r)) / 2 \\ \bar{R}^{+m,n}(r) &= (R^{m,n}(r) + R^{n,m}(r)) / 2 \end{aligned}$$

と定義する。(4-5)と(4-6)はキュムラント近似と全く同じである (cf. Tanaka 1969)。(4-5)は0-4次キュムラント近似に、(4-6)は0-5次キュムラント近似に対応する。

閉じられた方程式系をつくる前に、各従属変数が Fourier 変換できるかどうかを調べてみる必要がある。もし各従属変数 $R(r), T(r), Q(r), S(r), H(r)$ が $r \rightarrow \infty$ に対して 0 に収束しなければ、その Fourier 変換は不可能となる。5個の従属変数の中で、

$Q(r)$ と $H(r)$ は $r \rightarrow \infty$ に対して 0 に収束しない。 $r \rightarrow \infty$ に対して $Q(r)$ と $H(r)$ はそれぞれ $-1/2$ および -3 に収束する。そのため $r \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する新しい従属変数として

$$Q^*(r) = Q(r) + 1/2$$

$$H^*(r) = H(r) + 3$$

を定義すれば、これらは $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。

$Q(r)$ と $H(r)$ のかわりに $Q^*(r)$ と $H^*(r)$ を使い、(4-5), (4-6), (4-7), (4-8) をそれぞれ (3-13), (3-16), (3-19), (3-22) に代入すると、相系に関する 4 組の決定方程式系が得られる：

(i) 2 方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \{2 - R(r)\} R(r)\end{aligned}\quad (4-9)$$

(ii) 3 方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} Q^*(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} Q^*(r) &= 6 \frac{\partial}{\partial r} \{1 - R(r)\} T(r)\end{aligned}\quad (4-10)$$

(iii) 4 方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} Q^*(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} Q^*(r) &= \frac{\partial}{\partial r} S(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} S(r) &= 4 \frac{\partial}{\partial r} \{3 - 3R(r) + R(r)^2\} R(r)\end{aligned}\quad (4-11)$$

(iv) 5 方程式系

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\
\frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} Q^*(r) \\
\frac{\partial}{\partial t} Q^*(r) &= \frac{\partial}{\partial r} S(r) \\
\frac{\partial}{\partial t} S(r) &= \frac{\partial}{\partial r} H^*(r) \\
\frac{\partial}{\partial t} H^*(r) &= 60 \frac{\partial}{\partial r} \{R(r) - 1\}^2 T(r) \quad (4-12)
\end{aligned}$$

Tanaka (1969) は 2 方程式系と 3 方程式系を Fourier 変換して方程式系のスペクトル形を求めた。しかしながら 4 方程式系と 5 方程式系についてはスペクトル形を求めることはかなり困難なので、相関方程式系のままで数値解析を実行する。

各方程式系はそれを構成している方程式の数と同数の初期条件が必要である。基本的な初期条件は $R(r)$ と $T(r)$ に関する。 $R(r)$ と $T(r)$ の初期系は

$$R(r, 0) = \left\{ 1 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{4}\right) \quad (4-13)$$

$$T(r, 0) = 0 \quad (4-14)$$

のように選ばれた。(4-14) は初期には波数間のエネルギー遷移がないことを意味する。これら 2 つの初期形を使って、 $Q^*(r, 0)$, $S(r, 0)$, $H^*(r, 0)$ も求められる。 $Q^*(r, 0)$ は

$$Q^*(r, 0) = \{2 - R(r, 0)\} R(r, 0) \quad (4-15)$$

から求められる。この関係は $Q^*(r)$ が初期には (4-9) の右辺の被微分項と同一であることを意味する。同様に $S(r, 0)$ と

$H^*(r, 0)$ は次のようにして求まる。

$$S(r, 0) = 6\{1 - R(r, 0)\} T(r, 0) = 0 \quad (4-16)$$

$$H^*(r, 0) = 4\{3 - 3R(r, 0) + R(r, 0)^2\} R(r, 0) \quad (4-17)$$

こうして得られた初期条件を使って各方程式系を初期値問題として数値解析することが可能になる。

§ 5. 数値計算の方法

非線型微分方程式の数値計算の方式はいまだに確立した理論を有していないようである。有限の mesh による近似解の精度は Lax(1954)の論文に述べられている。しかし彼は流体力学方程式の保存系について述べているにすぎない。それ故非線型微分方程式の数値計算の安定条件の一般的法則は今日まで導かれていない。

この論文で使用した finite scheme を 2 方程式の場合について説明する。方程式 (3-12) と (4-9) は次のような差分型に書ける：

$$R^{(\tau+1)}(i) = R^{(\tau)}(i) + \sigma \{T^{(\tau)}(i + \frac{1}{2}) - T^{(\tau)}(i - \frac{1}{2})\} \quad (5-1)$$

$$T^{(\tau+1)}(i) = T^{(\tau)}(i) + \sigma [\{2 - R^{(\tau)}(i + \frac{1}{2})\} R^{(\tau)}(i + \frac{1}{2}) - \{2 - R^{(\tau)}(i - \frac{1}{2})\} R^{(\tau)}(i - \frac{1}{2})] \quad (5-2)$$

ここでいくつかの導入された変数について

$$t = \Delta t \cdot \tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots)$$

$$r = \Delta r \cdot i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I)$$

という関係がある。ただし $\sigma = \Delta t / \Delta r$ 。2重相関の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} R(0, t) &= 1 \\ R(\infty, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (5-3)$$

となる。その差分型は

$$\left. \begin{aligned} R^{(\tau)}(0) &= 1 \\ R^{(\tau)}(I + \frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned} \right\} (5-4)$$

初期値の差分型は次のように書ける：

$$R^{(0)}(i) = \left\{ 1 - \left(\frac{i}{\sqrt{2} \Delta r} \right)^2 \right\} \exp \left\{ - \left(\frac{i}{2 \Delta r} \right)^2 \right\} \quad (5-5)$$

$$T^{(0)}(i) = 0 \quad (5-6)$$

2方程式系と同様な差分型が他の方程式系にも適用できる。

σ , Δr , I の値はそれぞれ 0.1, 5, 40 にとった。2重相関の数値が得られた後、その Fourier 変換：

$$\Phi(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R(r, t) \cos(kr) dr \quad (5-7)$$

によってエネルギー・スペクトルが得られる。(5-7) の差分型は

$$\begin{aligned} \Phi^{(\tau)}(k) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^I R^{(\tau)}(i) \cos\left(\frac{k i \pi}{I}\right) + \frac{1}{2} R^{(\tau)}(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R^{(\tau)}(I + \frac{1}{2}) \right\} \quad (k=1, 2, \dots, I) \end{aligned} \quad (5-8)$$

とあらわされる。ここで $\Phi(k, t)$ はエネルギー・スペクトル、 k は波数をあらわす。

§ 6. 数値計算の結果

Fig. 1とFig. 2はそれぞれ2, 3, 4, 5方程式系の2重相関とエネルギー・スペクトルの時間変化を示したものである。図には各系で最初にエネルギー・スペクトルがあらわれた時刻の結果が描かれている。差分型になおして数値計算することによる truncation error の推定は非線型方程式系では困難であるが、少なくとも次の2つのことがいえる：

- (i) 負のエネルギーが発生する時刻まで、どの相関も数値的に不安定にならない。
- (ii) 2および3方程式系のエネルギー・スペクトルの形が、Fourier変換によってスペクトル方程式について解かれた結果(Fig. 3(a), (b))とよく似ている。

どの方程式系の2重相関も時間経過を通じて共通の傾向をもっている。この値の小さな領域と大きな領域では、初期値よりも減少し、その中間のこの領域では増加している。時間経過中に初期値との差がもっとも顕著なのは2方程式系の2重相関である。

負のエネルギーはFig. 2に示されるように構成している方程式の数の多い系ほど時間的に早くあらわれる。負のエネルギーが最初にあらわれる波数は2, 3, 4, 5方程式系においてそれぞれ $k=4, 7, 8, 12$ となっている。すなわち方程式の数が

多くなる系ほど、負エネルギーの出現する波数領域は高くなる。例えば2方程式系と5方程式系のスペクトル間のエネルギー遷移状態を比較すれば明らかなように、2方程式系では低波数のエネルギーは極端に高波数領域に遷移するが、5方程式系では非常に円滑である。例えば5方程式系では時間的にもっとも早く負のエネルギーがあらわれるが、 $k=12$ におけるエネルギー・スペクトルの初期値と22番目の値(最初に負のエネルギーのあらわれる時刻)の差、すなわち $\Phi^{(0)}(12) - \Phi^{(22)}(12)$ は他のいかなる系におけるそれよりも小さい。最初に負のエネルギーのあらわれる波数の上述のような差は次のようになる:

$$d_2 = \Phi^{(0)}(4) - \Phi^{(42)}(4) = 1.19 \quad (2 \text{ 方程式系})$$

$$d_3 = \Phi^{(0)}(7) - \Phi^{(31)}(7) = 0.0362 \quad (3 \text{ 方程式系})$$

$$d_4 = \Phi^{(0)}(8) - \Phi^{(24)}(8) = 0.0205 \quad (4 \text{ 方程式系})$$

$$d_5 = \Phi^{(0)}(12) - \Phi^{(22)}(12) = 0.00022 \quad (5 \text{ 方程式系})$$

すなわち $d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ が満足される。粘性の影響を少しでも入れると5方程式系などでは負エネルギーの出現をおさえることは可能かもしれない。

§ 7. 結論

Kampé de Fériet の仮定が非粘性 Burgers 乱れに適用されてその結果次のような結論が導かれた。

- (i) 2, 3, 4, 5 方程式系の中で, 負エネルギーは 5 方程式系において最も高波数領域に出現する。低次方程式系になるにしたがってその波数領域は低波数領域に移る。
- (ii) 低次方程式系ほど負のエネルギーのあらわれる時間は長くなるが, 負エネルギーが最初に出現する波数におけるエネルギー・スペクトルの初期値との差は大きくなる。
- (iii) 上の 2 つの理由で, 非線型のメカニズムは高次方程式ほど改善されていると考えられる。

この研究は 5 方程式系までに限られているので 6 方程式系以上に関しては明確なことはわからないが, Gram-Charlier 展開を有限個で打切る限り負のエネルギーの出現は避けられないと推定できる。

追記

この論文を書き終えてから気づいたことがあるが, 2 方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R(r) &= \frac{\partial}{\partial r} T(r) \\ \frac{\partial}{\partial t} T(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \{2 - R(r)\} R(r)\end{aligned}$$

は解として

$$R(r, t) = 1 - \frac{r^2}{2t^2} \quad (A-1)$$

をもつことがわかった。この解から次のことがいえる：

(i) $R(0, t) = 1$ であるから, この系ではエネルギーは全時間を通じて保存される。

(ii) しかしながら境界条件 $R(\infty, t) = 0$ にはならず, $R(\infty, t) = -\infty$ となる。

このような結果をふまえて以下若干の推論を行ってみよう。

(A-1) のような解になる原因は非粘性の結果であると考えられる。もし 2 方程式系に粘性項が含まれているとすれば, $R(\infty, t) = 0$ となるべき要素が (A-1) に附加しているはずである。それは Reynolds 数を含む exponential 項 $\varepsilon(r, t; Re)$ がかかっていることと推定される。すなわち

$$R(r, t; Re) = (1 - \frac{r^2}{2t^2}) \varepsilon(r, t; Re) \quad (A-2)$$

なのであろう。 $\varepsilon(r, t; Re)$ は $r \rightarrow \infty$ で 0 に, また $Re \rightarrow \infty$ で 1 に収束するような函数になるだろう。

この論文では数値計算の初期値として本文中の (4-13)

$$R(r, 0) = \{1 - \frac{r^2}{2}\} \exp(-\frac{r^2}{4})$$

のように $\exp(-\frac{r^2}{4})$ という $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束する項がある。そのため時間積分の初期では, 強制的に粘性の影響を加えたかのような操作をしていると考えられるかもしれない。しかしながら時間を延長させてゆけば, 数値計算はいずれ破綻をきたすであろう。というのは相関はほとんど初期値の束縛をふり切って (A-1) のような解に近づいてゆくであろうからで

ある。

このような現象と負のエネルギーの出現との関連を調べることは数学的な興味以上に乱れの本質をついているかと思われる。

References

- Burgers, J. M. 1950 Proc. Acad. Sci. Amst. 53, 247, 393, 718 and 732
 Frenkiel, F. N. and Klebanoff, P. S. 1967 Phys. Fluids 10, 507
 Kampé de Fériet, J. 1966 David Taylor Model Basin Rep., 2013
 Kawahara, T. 1968 J. Phys. Soc. Japan 25, 892
 Lax, P. D. 1954 Comm. pure appl. Math. 7, 159
 Monin, A. S. and Yaglom, A. M. 1967 Statistical Hydrodynamics II
 Ogura, Y. 1962 Phys. Fluids 5, 395
 Ogura, Y. 1963 J. Fluid Mech. 16, 33
 Tanaka, H. 1969 J. Meteor. Soc. Japan 47, 373
 Tanaka, H. 1970 オ2回乱流シンポジウム報告(東大宇宙航空研)
 Tatsumi, T. 1957 Proc. Roy. Soc. A, 239, 16
 Tatsumi, T. 1969 Phys. Fluids 12, II 258

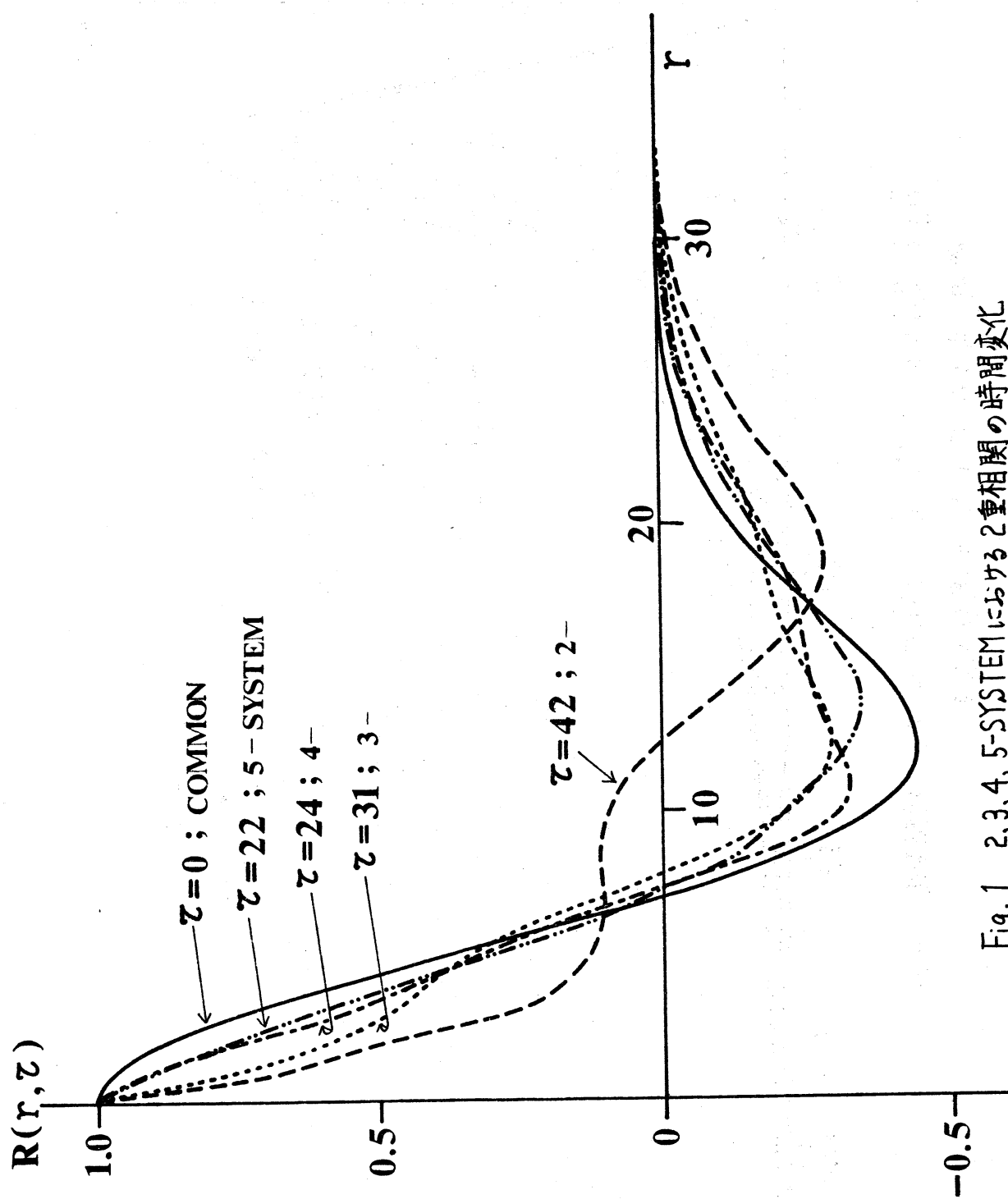


Fig. 1 2, 3, 4, 5-SYSTEMにおける2重相関の時間変化

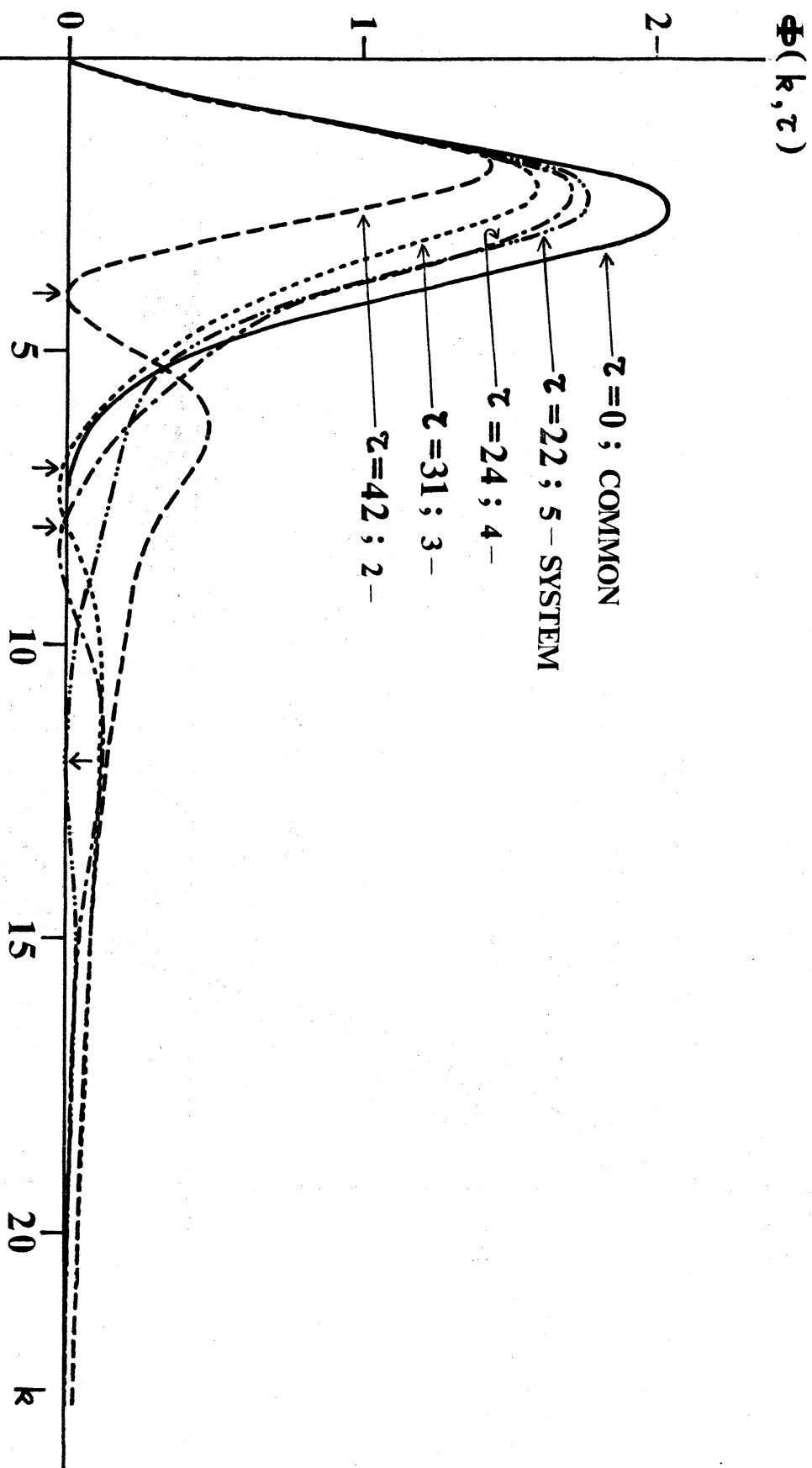


Fig. 2 2,3,4,5-SYSTEMにおけるエネルギー・スペクトルの時間変化. 矢印は最初に負エネルギーが生じる波数を示す.

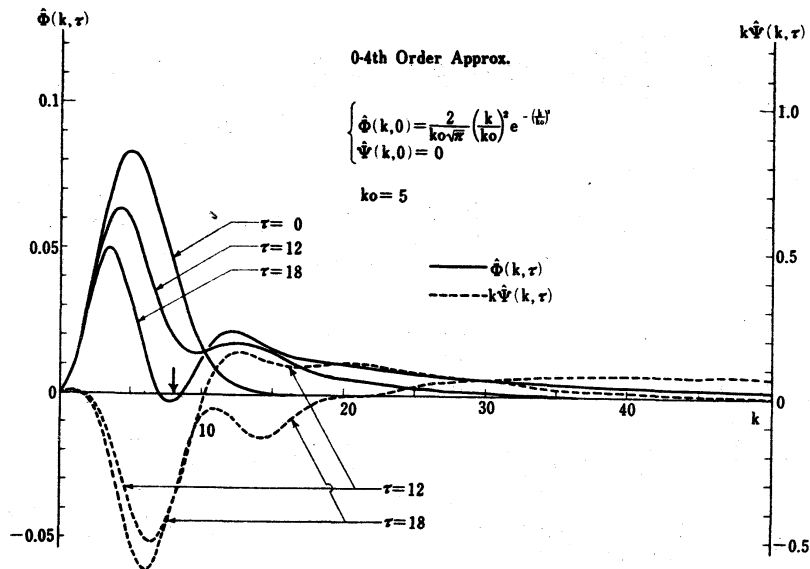


Fig. 3(a) 2-SYSTEMにおけるスペクトル方程式系から得た
エネルギー・スペクトルの時間変化 (Tanaka 1969)

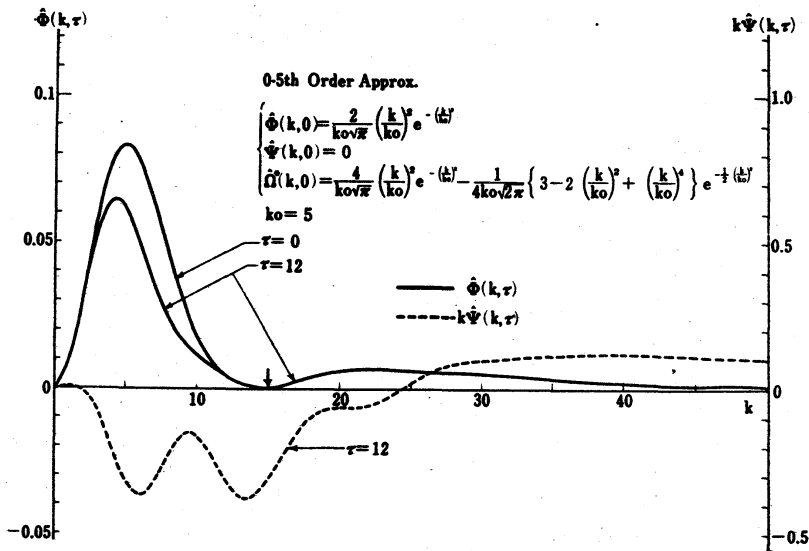


Fig. 3(b) 3-SYSTEMにおけるスペクトル方程式系から得た
エネルギー・スペクトルの時間変化 (Tanaka 1969)