

明石海峡における風速分布の数値計算

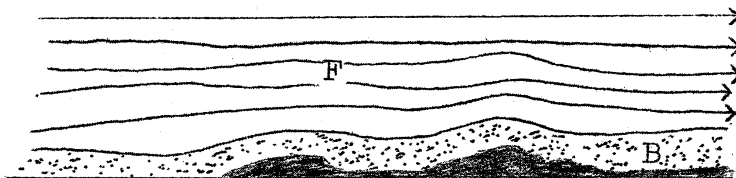
東大 理

宗 像 俊 則

神 部 勉

1. 要 約

つり橋や鉄塔その他建造物に及ぼす風圧を問題にする場合、設計風速の推定が重要になる。例えば台風襲来の際、地形によって風速分布がどのように影響されるかを見積ることは極めて重要な問題である。この研究の目的は、台風襲来時のような相当広大な範囲に亘ってほぼ一様な風が吹く際に、地形によって局地的に現われる風速分布の変化を理論的に推定する方法を与えることである。



第 一 図

さて

(1) まず、数 10 Km 乃至

100 Km 程度のスケールの範囲で、上空では一様な風速の風が吹いているとする。

(2) 海面および地表の付近を離れると空気摩擦は働かないと考える。すなわち、上空での空気の流れは、完全流体の流れと仮定する。(第一図参照。以下 F 領域とよぶ)。なお、F 領域は無限の上空まで続くものではない。実質的に空気が存在するのは、せいぜい 1 万 m の程度である。また重力の影響によって、安定な成層をなすばあいには、空気の鉛直方向の変位が妨げられよう。これは、実質的には、大気の運動が低い天井で限られているような効果をもつ。

(3) 地表付近では大気の乱れのために見掛けの粘性、いわゆる「渦粘性」が現われるので、流れは粘性流体の運動と見なさなければならない。しかし大気全体のスケールから考えて、このような渦粘性の働く領域は極めて薄く、境界層的な性格をもつものであろう。(以下これを B 層と呼ぶ)。

以上の諸点を念頭において、できるだけ簡単な理論式を見出そうというのが、この研究の目的である。

2. F 領域に対する計算の方法

まず、もっとも簡単なモデルとして、空気の粘性と圧縮性を無視しよう。海面上に x, y 軸を

とり、鉛直上向きに z 軸をとる。地表の形（すなわち、島や山の形）は

$$z = h(x, y) \quad (2.1)$$

で表わされる。

海面上を一樣な風速で吹いて来た風は、(2.1) で与えられる地形によってどのような変化を受けるか？これがわれわれの問題である。このばあい、Helmholtz の渦定理により、流れは渦無しと考えることができる。したがって、流速 $\mathbf{v}(u, v, w)$ は速度ポテンシャル ϕ を用いて

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \quad (2.2)$$

のように表わされる。また、圧縮性を無視したので、 ϕ は $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ，すなわち

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.3)$$

を満足する。

一樣風速 U の方向に x 軸を選んだとして

$$\phi = Ux + \phi$$

とおけば、 ϕ は地形による変化を表わす項である。したがって、山が急峻でない限り、 ϕ はあまり大きくない。 ϕ も

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.4)$$

を満足する。

ϕ に対する境界条件としては、まず、上空で一樣風速 U に近づくことから

$$z \rightarrow \infty : \phi \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

つぎに、地表での条件は、法線速度 $v_n = 0$ である。さて、地表の形は (2.1) で与えられるから、その法線方向 $\mathbf{n}$ はベクトル $(-\partial h / \partial x, -\partial h / \partial y, 1)$ に平行である。したがって、 $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ は

$$\left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(-\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot 1 = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = U \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad z = h(x, y) \quad (2.6)$$

と書ける。前述のように、地形があまり急峻でない、すなわち $h = O(\epsilon)$ のように 1 次の無限小と仮定すると、 ϕ も $O(\epsilon)$ となる。そこで、 $O(\epsilon^2)$ を無視することにすれば、(2.6) は簡単化されて

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad z = 0 \quad (2.7)$$

のようになる。

(2.5), (2.7) の境界条件のもとに Laplace の方程式 (2.4) を解くことは、水平面 ($z=0$) 上に単位面積あたり $2Uh_x(x, y)$ なる強さのわき出し分布を与えたときの速度ポテンシャルを求めることにほかならない。したがって、解は

$$\phi(x, y, z) = -\frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{h\xi(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta \quad (2.8)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \quad (2.9)$$

である。 ξ に関して部分積分を行えば、(2.8) は

$$\phi(x, y, z) = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{r^3} d\xi d\eta \quad (2.10)$$

のように表わすことができる。次に地表付近の風速分布 $\mathbf{v}_1(u_1, v_1, w_1)$ を求めるには

$\phi(x, y, 0)$ から

$$u_1 = U + \phi_x(x, y, 0), \quad v_1 = \phi_y(x, y, 0) \quad (2.11)$$

によって求められる。

実際の計算に当っては、東の方向を x 軸に選ぶと、(2.10), (2.11) は一様な西風の場合に相当している。一様な南風の場合は、 y 軸方向に一様な風速 U があるとして同様の計算を行えばよく、結果は (2.10) の $x \rightarrow y$ を、 $y \rightarrow x$ で置きかえたものとなる。(2.11)については、 $u_1 = \phi_x$ 、 $v_1 = U + \phi_y$ とすればよい。また一般の方角の場合には、 x 軸と θ の角度をなす方角に U の一様な流があったとすると、それは $U \cos \theta$ の一様な西風と、 $U \sin \theta$ の一様な南風の重ね合わせとして表わされる。従って実際には、西風と南風の二通りの場合を求めておいて、他はその重ね合わせとして求めればよい。以下、上の方式に従って、更に適当な変数変換と無次元化を行って数値計算を実行した。そして、以上のような手続のプログラムを作製した後、明石海峡付近の本計算にはいる前に、海面上に正方形の「豆腐」形の島があるという非常に簡単なモデルでプログラムのチェックをした。明石海峡付近の風速計算については、各格子点における山の高さ h は、5 万分の 1 地図で読み取った。最初、東京大学計算センターの OKITAC5090 電子計算機でテスト計算を行い、次に本計算を上と同様のプログラムで「伊藤忠電子計算サービス株式会社」に委託した。参考までに、伊藤忠の本計算の際の使用状況を示すと、

- * 電子計算機名 Control Data G-20 (性能は IBM7090 の約 $\frac{1}{3}$)
- * 全計算時間 約 4 時間 (on line print のため能率は余りよくない)
- * メモリー使用状況

program 部分	約 1,300 words
working storage	約 26,000 words

であった。

3 B 層に対する計算の方法とその結果

前述のように、地表に接する大気の層すなわち B 層に対しては完全流体の仮定は適当ではない。大気の乱れによって運動量が伝えられ、いわゆる渦粘性が現われるからである。取扱いを容易にするために、B 層での空気の運動を支配する方程式として Navier-Stokes の方程式を採用しよう。ただし、粘性としては渦粘性を使うことにする。乱流に対するこのような取扱いは、たとえば物体の抵抗の理論などでもその有効性が確かめられている。

B 層では流体力学で慣用の境界層理論を適用することができる。いま、定常流を考えることにすると、境界層方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

のようにあらわされる。ここで圧力 p としては重力による静水圧を除去したものをとってある。

また、境界層理論の示すように、 p は鉛直方向には変化せず、したがって B 層の外側、つまり自由大気 F 領域の下面での値を採用することができる。

また、すでに F 領域の考察のばあい述べたように、急峻でない地形が一様流に及ぼす影響は少ないと見なすことができる。つまり、 (u, v, w) と $(U, 0, 0)$ の差は少く、したがって (3.1), (3.2) の左辺で、係数 (u, v, w) を $(U, 0, 0)$ でおきかえることができよう。このようにして線型化を行うと、(3.1), (3.2) は

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = U \frac{\partial u_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

となる。 F 領域では流れは渦無しであるから

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (3.4)$$

の関係が成り立つ。したがって

$$u^* = u_1 - u, \quad v^* = v_1 - v, \quad w^* = v_1 - v \quad (3.5)$$

とおけば、上の二つの式は

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{\nu}{U} \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \quad (3.6)$$

のように、熱伝導型の方程式で表わすことができる。境界条件は、もちろん、

$$z = h(x, y) : v^* = v_1 \quad (3.7)$$

$$z \rightarrow \infty : v^* \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

また、初期条件として、 $x=0$ で速度分布の形を与えなければならない。

この近似では、風速の水平成分 u, v がそれぞれ独立に熱伝導型の方程式で決定され、相互の干渉のおこらないことが注目される。また、変数 y は単にパラメタとして現われるに過ぎないのである。

数値積分を実行する際に (3.7) の境界条件は少しめんどうであるから、

$$\xi = x, \quad \zeta = z - h(x, y) \quad (3.9)$$

によって新しい独立変数 ξ, ζ を導入すれば、(3.6) - (3.8) はそれぞれ

$$\frac{\partial v^*}{\partial \xi} = \frac{\nu}{U} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} \quad (3.10)$$

$$\zeta = 0 : v^* = v_1 \quad (3.11)$$

$$\zeta = \infty : v^* \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

となる。(3.10) で右辺の $\partial h / \partial \xi$ は地形の(主流方向の)傾斜である。また ν は前述の渦粘性度であって、その数値はあらかじめ知られていない。しかし、適当な長さ L を代表的な長さにとつて (3.10) を無次元の形に表わすと

$$\frac{\partial v^*}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} \quad (3.13)$$

となり、 $R = \frac{UL}{\nu}$ は、'有効 Reynolds 数' である。そして経験によれば、 R の値は多くのばあい数十の程度であると考えられる。 R の値の多少の変化は結果に対してあまり大きい影響を与えないから、その数値についてはそう神経質になる必要はない。 L としては、たとえば境界層の 'おしのけ厚さ' を採用すればよからう。後述の実例計算では L はだいたい 100m の程度と考えられている。

地表付近の風速分布は、われわれの近似では、(3.13)を境界条件(3.11), (3.12)のもとに解くことによって求められる。すでに述べたように、一様風速に直角方向の座標 y は単にパラメタとして含まれるだけであるから、計算は一次元の熱伝導の問題と本質的に同じである。

任意に与えられた地形 $z=h(x, y)$ に対しては、まず F 領域の計算により v_1 が見出される。

つきに、 $\partial h / \partial \xi = h_\xi(\xi, y)$ も容易に知れるから、(3.13)は例えば差分法によって数値的に解くことができるであろう。そこで、電子計算機用のプログラムを作成した。

まず、このプログラムによる数値計算の精度を確かめるために、無限に広い平原を一様風速の風が吹くばあいを扱った。その際、ある場所から摩擦が働きはじめる(すなわち、粘着の条件 $v=0; \zeta=0$ が成り立つ)と仮定する。このばあい簡単な解析解が存在するので、精度の検証に適している。結果は満足すべきものであった。

つぎに、平原上に三角形の山があるばあいを調べた。これは、斜面が風速分布にどのような影響を与えるかを見るためである。風上側の斜面では、海面上よりも、上空での風速への近づき方がはやく、逆に風下側では地表付近の風速の小さい領域が地上高くまで続いている。つまり、山のかげで風速の衰える有様が見られるのである。

数値計算は地形があまり急峻でないばあいにはうまくいく。ところがやや傾斜の急なばあいを取り扱うと、われわれの採用した計算プログラムでは正しい解が得られないように見える。例えば山の前面では地表の付近に上層風よりも大きい風速が現われ、また背面には逆流がおこるといふ結果が得られる。これは、実際の現象としては決してあり得ないことではないが、少なくとも(3.13)のような熱伝導型の方程式からは予想されない結果である。

我々の計算では地面 $\zeta=0$ で速度 $u=0$ という境界条件を課したが、実際はスリップ流すなわち $\zeta=0$ で u =有限という条件の方がより現実に近い分布を与えるであろう。このことはまた、乱流境界層における層流底層の概念にも一致する。しかし、これらについての詳細な議論は将来に残されている。