

ランク 1 の対称空間上の ラプラス変換の固有函数

大島 理 峰村 勝弘

§ 1. Helgason 予想

$X_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $B_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおき, X_0 上の微分作用素

$$\Delta_0 = (1 - x^2 - y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad z = x + iy$$

の X_0 上の固有函数について考察する. X_0 上の任意の調和函数 (即ち, 固有値 0 の固有函数) は, ポアソン核

$$P(z, b) = \frac{1 - |z|^2}{1 - 2|z|\cos(\theta - \eta) + |z|^2}, \quad z = e^{i\theta}|z|, \quad b = e^{i\eta}$$

により B_0 上の (佐藤) 超函数を積分して得られることが知られてゐるが, 最近 Helgason は, [2] で, B_0 上の超函数 T の (以下超函数はすべて佐藤超函数を意味する) ポアソン積分

$$\int_{B_0} P(z, b)^{q+s/2} dT(b), \quad s \in \mathbb{R}$$

によつて, Δ_0 の固有値 $(s^2 - 1)$ の固有函数がすべて得られることを示した. 実は, X_0 はリー群 $G = SU(1, 1)$ を含む極大コンパクト部分群 $K (\cong SO(2))$ で割った等質空間であり, Δ_0 は, G のリー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式から作られる X_0 上の G -不変なリー

マン計量に対するラプラシアンのある正の定数倍に等しい。
 Helgason は、この問題を一般のランク 1 の (非コンパクト)
 対称空間上での問題に定式化し、同様な結論の成立を示唆し
 た。我々はそれを Helgason 予想と呼ぶことにする。次にその
 Helgason 予想を精確に述べよう。

G を中心が有限である連結実単純リー群で、非コンパクト
 とする。 $\mathfrak{g}_0$ を G のリー環、 K を G の (一つの) 極大コンパ
 クト部分群、 $\mathfrak{k}_0$ を K のリー環とする。 $\mathfrak{g}_0$ のキリング形式 $\langle, \rangle$
 に関する $\mathfrak{k}_0$ の直交補空間を $\mathfrak{p}_0$ とおき、 $\mathfrak{a}_+$ を $\mathfrak{p}_0$ の一つの極大可
 換部分環とする。ランク 1 の (非コンパクト) 対称空間は、
 $\dim \mathfrak{a}_+ = 1$ であるような G を、 K で割った等質空間 G/K とし
 て得られる。以下 $\dim \mathfrak{a}_+ = 1$ を仮定する。 $\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{a}_+$ を含む $\mathfrak{g}_0$ の
 一つの極大可換部分環とし、 $\mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ とおく。 $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-$
 の $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ における複素化を $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}_k$ とする。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$
 に関するルートの全体を Σ とする。 $\mathfrak{a}_+^*$ と $(\mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{a}_-)^*$ に両立
 する誘引式順序を一つ固定し、この順序に関する正のルート
 全体を P 、 P の元で $\mathfrak{a}_+$ 上で消えないもの全体を P_+ とする。
 ルート α の $\mathfrak{a}_+$ への制限を $\bar{\alpha}$ とし、

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \bar{\alpha}, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \left(\sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha \right)$$

とおく。こゝに、 $\mathfrak{g}^\alpha$ はルート α に対応するルートベクトル
 のなす部分空間を表わす。 $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{n}_0$ をリー環にもつ。 G の解析

の部分群をそれぞれ A, N とする。 G は $G = KAN$ と一意的に分解される (岩沢分解)。岩沢分解により、 $x \in G$ に対して $H(x) \in \mathfrak{a}_+$ の元を $x \in K(\exp H(x))NT$ と、2 定まることとなる。 K における A の中心化群を M とし、 $X = G/K$, $B = K/M$ とおく。このとき対称空間 X に対するポアソン核は

$$P(x, b) = \exp\{-2\rho(H(g^{-1}b))\}, \quad x = gK, b = kM$$

で与えられる。 $\mathfrak{g}_0$ のキリンゲン形式から作られる X 上の G -不変なリーマン計量に対応するラプラシアンを Δ とし、リー環 $\mathfrak{g}_0$ から定まる正定数 $\langle \rho, \rho \rangle$ によって、 $\Delta_0 = \langle \rho, \rho \rangle \Delta$ とし、 Δ を正規化する。このとき Helgason 予想は、次の様に述べられる。

予想 C (Helgason 予想)

ランク 1 の対称空間 X において、函数

$$J_s(T)(x) = \int_B P(x, b)^{(1+s)/2} dT(b)$$

は、 s が $\mathbb{R}$ を、 T が B 上の超函数を動くとき、 Δ_0 の固有値 $\mu \geq -1$ の固有函数を尽くす。

予想 C において「 $\mathbb{R}$ 」を「 $\mathbb{C}$ 」に、「固有値 $\mu \geq -1$ 」を「すべての複素数固有値」におきかえた命題を、強形の Helgason 予想と呼ぶことにする。すなわち、

予想C' (強..形の Helgason 予想)

ランク 1 の対称空間 X において、函数

$$P_s(T)(x) = \int_B P_s(x, b)^{(1+s)/2} dT(b)$$

は、 $s \in \mathbb{C}$ を、 T が B 上の超函数を動かして、 Δ_0 のすべての複素数固有値の固有函数を尽くす。

とくに、 T が B 上の連続函数であるときは、 $P_s(T)$ ($s \in \mathbb{C}$) は Δ_0 の固有値 $(s^2 - 1)$ の固有函数であることに注意する。

Helgason は、単位円内部 $X_0 = SU(1, 1)/K$ の場合に予想Cを証明し、更に脚注で、予想C'も成立すると述べている。

§2. ランク 1 の (既約) 対称空間

ランク 1 の対称空間は

- (1) A III 型 $SU(n, 1)/S(U_n \times U_1)$ (エリト双曲型空間) $n \geq 1$.
- (2) BD-I 型 $SO_0(n, 1)/SO(n)$ (実双曲型空間) $n \geq 2$
- (3) C II 型 $S_p(n, 1)/S_p(n) \times S_p(1)$ $n \geq 1$
- (4) F II 型

に分類されている。とくに単位円内部は、(1) の $n = 1$ 、(2) の $n = 2$ の場合には共通に含まれている。又 (2) の $n = 4$ の対称空間は、(3) の $n = 1$ の場合の対称空間に同型である。

§3. 実双曲型空間上の Δ_0 の具体的表示

§2 で述べた (2) の実双曲型空間は次の様に実現される。

$G = SO_0(n, 1)$ の元 g を

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A: n \times n, B: n \times 1, C: 1 \times n, D: 1 \times 1$$

と表わし, g の $\mathbb{R}^n$ 上の作用を $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$g \cdot x = (Ax + B)(Cx + D)^{-1}$$

で定める。

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \}, x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$$

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = 1 \}$$

とみると, G は D に推移的に作用し

$$G/K \approx D \text{ (同型)}. K \cong SO(n)$$

となる。又 K は S^{n-1} に推移的に作用し

$$K/M \approx S^{n-1}, M \cong SO(n-1).$$

である。よって D 上のラプラス Δ_0 は

$$\Delta_0 = \frac{4}{(n-1)^2} (1 - |x|^2) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\},$$

($\Delta = \frac{n-1}{8} \Delta_0$) で与えられる。

§4. 現在までの結果と証明の方針

現在までに得られている、対称空間の各タイプに対する結果と証明の概略を述べる。

対称空間	成立が証明された予想
A III 型	C
BD-I 型	C'
CII 型	考察中。(しかし, C が成立する可能性は非常に強い。)

F II 型は全く考察していないが, C は成立すると思われる。

証明の概略は以下の様である。

(i) B 上の超函数の階級づけ。B 上の超函数を, B 上の球函数 φ により展開し, その係数の, パラメタ φ に関する増大度で特徴づける。([1], [4])

(ii) B 上の球函数 φ のポアソン積分 $f_s^\varphi = P_s(\varphi)$ を, G の部分群 A 上でのある種の微分方程式を解くことにより, (定数倍を除いて) 超幾何級数により表す。

(iii) フトナー型の定理により, その定数を決定する。([5])

(iv) Δ_0 の固有値 s^2-1 の固有函数を, f_s^φ により (φ に関する和として) 展開し, その係数の φ に関する増大度と, B 上の超函数の φ による展開の係数の増大度を比較する。

対称空間のタイプによって成立する予想 (正確に言えば, 証明を与えることのできる予想) が異なるのは, (iv) の段階における f_s^φ の (φ に関する) 増大度の評価の (各 s に対する)

技術的に難易に依り、2...3。現在 佐藤-河合-柏原により
群論を用いて証明が追求されている。

文献

- [1] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic Functions on Hermitian Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3(1973), 81-108.
- [2] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., 5(1976), 1-154.
- [3] L. K. Hua, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, A.M.S. Transl.
- [4] K. Minemura, Harmonic Functions on Real Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3(1973), 121-151.
- [5] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a real hyperbolic space, preprint.
- [6] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a hermitian hyperbolic space, preprint.
- [7] ———, 実双曲空間上の laplacian の固有函数のポアソン積分表示, 数理解析研究所講究録182, ユニタリ表現論とその応用, 86-101.