

多重劣調和函数に付随したディリクレ空間について

岡田正己 (Masami Okada) 東北大理・数学教室

以下は、主として、福島氏との共同研究 [9] に基づくものです。ポテンシャル論と確率論との、かかわりに於いて、一方のどの部分が、他方のどの部分に対応しているのかを、比較検討するのは、一つの問題意識だと考えられます。以下では、上記 [9] の中で、マルティンゲールを用いた所が、もともとの Beurling-Deny [2] の考え方を、もとにして、どのように示されるか、を述べたいと思います。10月に、数理解析での講演で、不明確であった点は、酒井氏に話をうかがった後、次のような形にしました。研究集会の際、各位に御世話になり感謝します。尚、勝手乍ら、以下では、骨組を述べるだけの部分が多く、詳細は文献 [9] および、その参考文献を御覧下さる様、お願いします。

§1. (1) 定義など; $\mathbb{C}^n$ の有界領域 D 上で定義された、有界多重劣調和函数の集合を $\mathcal{P}_b(D)$ と書きます。滑らかな函数 φ に対して、 d^c を $d^c\varphi = \sqrt{-1}(\bar{\partial} - \partial)\varphi$ として定義します。

従って $dd^c \varphi = 2\sqrt{-1} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ となります。その、 k 個の外積を $(dd^c \varphi)^k$ と略記します。但し、 $k=1, 2, \dots, n$ です。 φ が滑らかと限らない時は、各点ごとに定義できませんが、次の Bedford-Taylor らによって得られた事実を使うことにします。

補題 $\rho_b(D)$ の単調列 $\{p_j\}$ が与えられたとし、 D 上殆んど至る所、 $p_j \rightarrow p \in \rho_b(D)$ とします。このとき、 $(dd^c p_j)^k \rightarrow (dd^c p)^k$ が $*$ 弱収束の意味で成立する。

この補題により、任意の $p \in \rho_b(D)$ に対して、ディリクレ積分が次で定義できます。

$$E^{(p)}(\varphi, \psi) = \int_D d\varphi \wedge d\psi \wedge (dd^c p)^{n-1} \quad \varphi, \psi \in C_0^2(D).$$

また、 $\|\varphi\|^{(p)} = \sqrt{E^{(p)}(\varphi, \varphi)}$ で $\|\cdot\|^{(p)}$ を定義しておきます。

(注意) $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$, $|z|^2 = \sum |z_j|^2$ として、 $m^{(p)}(dz) = dd^c |z|^2 \wedge (dd^c p)^{n-1}$ とおけば、 $m^{(p)}$ は D 上の非負ラドン測度 (係数の体積要素) になります。我々は、次を満たすような p を、以下で考えるものとします。

$$m^{(p)}(O) > 0 \quad \text{for } \forall O \subset D \text{ 開集合.}$$

$C_0^2(D)$ の $\|\cdot\|^{(p)}$ に関する完備化空間を $\mathcal{F}^{(p)}$ と書きます。すると、ディリクレ空間 $(\mathcal{F}^{(p)}, m^{(p)})$ は $L^2(D, m^{(p)})$ の閉部分空間となることから、次の Poincaré 不等式より、得られます。

$$\int_D \varphi^2 m^{(p)}(dz) \leq C \|P\|_\infty E^{(p)}(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in C_0^2(D).$$

とくに $P(z) = |z|^2$ のときは、 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^{2n}$ の ラフ・ラシアン、 Δ となるような $\Delta^{(p)}$ を、ラドン・ニコテューム 微分 $\Delta^{(p)} \varphi = \frac{dd^c \varphi \wedge (dd^c p)^{n-1}}{m^{(p)}(dz)}$

で定義すると次を得ます。

系 グリーン作用素 $G^{(p)} = (\Delta^{(p)})^{-1}$ は $L^2(D, m^{(p)})$ から $\mathcal{F}^{(p)}$ への有界作用素となる。

(2) Beurling - Deny 理論からの準備;

$K \subset D$ をコンパクトな部分集合、 f を $\mathbb{C}^n$ の多項式の K への制限、とするとき、 $\mathcal{H}_{K,f}^{(p)}$ を $\mathcal{H}_{K,f}^{(p)} = \{u \in \mathcal{F}^{(p)} \mid u=f \text{ on } K\}$ で定義します。このとき $\mathcal{H}_{K,f}^{(p)} \neq \emptyset$ です。そこで、 $(\mathcal{F}^{(p)}, m^{(p)})$ は Hilbert space ですから、周知の如く、 $\mathcal{H}_{K,f}^{(p)}$ の中で $\|\cdot\|^{(p)}$ -ノルムを最小にする元 $U_{K,f} \in \mathcal{F}^{(p)}$ が一意的に定まります。一般の $\Delta^{(p)}$ と K に対して、なので、 ∂K 上至る所 $U_{K,f} = f$ というわけではないでしょうが、ともかく、小さな除外集合の外では $(\mathcal{F}^{(p)}\text{-capacity q.e.})$ 等式が成立します。さて、次が、わかります。

命題 (i) $\Delta^{(p)} U_{K,f} = 0 \quad \text{in } K^\circ \cup (D \setminus K)$

(ii) $U_{K,f+g} = U_{K,f} + U_{K,g}$ 但し、 f, g は $\mathbb{C}^n$ の多項式を ∂K に制限したもの。

(i) は、変分を用いた、標準的な議論より OK. (ii) は (i) と次のスペクトル合成の定理より、すぐに出できます。

定理 (Deny [7] , see also [8])

$$u \in \mathcal{F}^{(p)}(D), \Delta^{(p)}u = 0 \text{ in } D \setminus K, u = 0 \text{ q.e. on } K \\ \Rightarrow u = 0 \text{ in } \mathcal{F}^{(p)}(D) \text{ i.e. } u = 0 \text{ q.e. in } D.$$

(注意) $U_{K,-1} = U_K^{(p)}$ 但し、右辺は次で定義される $v_K^{(p)}$ の upper regularization です。(即ち $-\overline{H}_K^{(p)}(-1)$ とでも書くべき所)

$$v_K^{(p)}(z) = \sup \left\{ u(z) \mid \begin{array}{l} u: \Delta^{(p)}\text{-subharmonic, } u \leq 0 \\ \text{in } D \\ u \leq -1 \text{ on } K \end{array} \right\}$$

系 $z \in D \setminus K$ q.e. に対して、 ∂K 上の測度 (調和測度)

$$d\mu_{K,z}^{(p)} \text{ が存在して, } U_{K,f}(z) = \int_{\partial K} f(w) d\mu_{K,z}^{(p)}(w).$$

これは、まず、 ∂K 上、多項式 (の制限) に対しては、 $U_K(f)(z) = U_{K,f}(z)$ が $z \in D \setminus K$ q.e. に定義されていること、つぎに、 $U_K(f+g)(z) = U_K(f)(z) + U_K(g)(z)$ と云うこと、さらに、多項式全体は $C(\partial K)$ 上 dense である、ということから導かれます。

(3) 今まで $p \in \mathcal{P}_b(D)$ に対して、ディリクレ空間 $(\mathcal{F}^{(p)}, m^{(p)})$ を考えてきましたが、以下、 $p = q + \delta|z|^2$ (但し $q \in \mathcal{P}_b(D)$, $\delta > 0$) の形をした p のみを考えます。このとき $m^{(p)}$ を、ルベーグ体積要素 dV で置きかえても $(\mathcal{F}^{(p)}, V)$ は、ディリクレ

空間になることがわかります。上のような族を $\mathcal{P}_+(D)$ とおきます。

§2 (1) Siciak, Zaharjuta 各氏の extremal pluri-subharmonic function u_E^* を次で定義します。 $E \subset D$ に対して、まず u_E を $u_E(z) = \sup \{v(z) \mid v \in \mathcal{P}_b(D), v \leq -1 \text{ on } E, v \leq 0 \text{ in } D\}$ と定義し、 u_E^* は、 u_E の upper regularization とします。さらに、Cegrell, Sadullaev 各氏らによって調べられた、キャパシティ函数 $C_\#(E)$ を $C_\#(E) = -\int_D u_E^*(z) dV(z)$ で定義します。これは、次の性質を持っていることが知られています。

命題 (i) 劣加法性 (ii) 外側正則性 (iii) 単調増大性。

系 (Cegrell, Sadullaev) $C_\#$ は Choquet capacity.

(2) いよいよ次が示せます。

定理 $-u_E^* = \sup_{P \in \mathcal{P}_+} (-u_E^{(P)})$ a.e.

(証明) $\geq$ は、定義より、明らかです。 $\leq$ の方を示します。

まず $E = K$ コンパクト集合のとき $-u_K^* = \lim_{l \rightarrow \infty} -u_E^{(P_l)}$ 但し、 $P_l(z) = u_K^*(z) + \frac{|z|^2}{l}$ を目標にします。これには、まず、次を示します。

補題 $u_K^* - \frac{n-1}{l}|z|^2$ は $\Delta^{(P_l)}$ -superharmonic in $D \setminus K$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \Delta^{(P_l)} \left(u_K^* - \frac{n-1}{l}|z|^2 \right) dV = dd^c \left(u_K^* - \frac{n-1}{l}|z|^2 \right) \wedge (dd^c P_l)^{n-1} \\ \qquad \qquad \qquad \leq (dd^c u_K^*)^n \\ \textcircled{2} \quad D \setminus K \text{ 上 } (dd^c u_K^*)^n = 0 \text{ by Bedford-Taylor.} \end{array} \right)$$

次に、§1 で定めた調和測度 $d\mu_{K,z}^{(p_e)}$ を用いて、

$$\int_{\partial K} \left(u_K^*(w) - \frac{n-1}{2} |w|^2 \right) d\mu_{K,z}^{(p_e)}(w) \leq u_K^*(z) - \frac{n-1}{2} |z|^2 \quad \text{f.e.}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} \quad -u_K^*(z) &\leq \int_{\partial K} d\mu_{K,z}^{(p_e)}(w) + \frac{C \operatorname{diam}(D)^2}{2} \\ &= -u_K^{(p_e)}(z) + \frac{C \operatorname{diam}(D)^2}{2}. \end{aligned}$$

両辺の積分をとって

$$-\int_D u_K^*(z) dV(z) \leq -\int_D u_K^{(p_e)}(z) dV(z) + \frac{C' \operatorname{diam}(D)^{2+2n}}{2}.$$

ここで $C_{\#}$ が、キャパシティ たったので

$$(*) \quad C_{\#}(E) = \sup_{\substack{K \subset E \\ \text{compact}}} C_{\#}(K) \leq -\int_D u_E^{(p_e)}(z) dV(z) + \frac{C''}{2}$$

以上で $C_{\#}(E) \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} -\int_D u_E^{(p_e)}(z) dV(z)$ が示せました。

積分したものに對して不等式が示せたことと、逆の不等式は、常に成立していたことから、定理が示せました。 f.e.d.

(3) キャパシティ S の比較: $C^{(p)}$ と C_{BT} を、次で定義し

$$\text{まず、} \quad C^{(p)}(K) = \inf_{\substack{\varphi \geq 1 \text{ on } K, \varphi \in C_0^2}} E^{(p)}(\varphi, \varphi)$$

$$C_{BT}(K) = \sup_{\substack{0 < \varphi < 1 \\ \varphi \in \mathcal{P}_b(D)}} \int_K (dd^c \varphi)^n.$$

まず、 $\sup_{p \in \mathcal{P}_b(D)} C^{(p)}(K) \simeq C_{BT}(K)$ が、わかっています。

次に (*) において, $\frac{c''}{\ell} = \frac{c_{\#}(K)}{2}$ とするよう $\ell = L$ を固定すれば,

$$c_{\#}(K) \leq 2 \int_D -u_K^{(P_L)}(z) dV(z),$$

さらに, 右辺は, $G^{(P_L)}$ の定義により $\int_D -u_K^{(P_L)} dV = (1, -u_K^{(P_L)})_{L^2} = E^{(P_L)}(G^{(P_L)} 1, -u_K^{(P_L)})$ であり, これに シュワルツの不等式を使って, 結局

$$\begin{aligned} c_{\#}(K) &\leq 2 E^{(P_L)}(G^{(P_L)} 1, -u_K^{(P_L)}) \\ &\leq 2 \sqrt{E^{(P_L)}(G^{(P_L)} 1, G^{(P_L)} 1)} \sqrt{E^{(P_L)}(u_K^{(P_L)}, u_K^{(P_L)})} \\ &\leq c'' L^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{C^{(P_L)}(K)} \\ &\leq c^{(*)} C_{\#}(K)^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{C_{BT}(K)} \end{aligned}$$

これから $C_{\#}^{n+1}(K) \leq c^{(5)} C_{BT}(K)$ を得ます。

$C_{BT}(K) \leq \text{const} (\text{dist}(K, \partial D))^{-n-1} C_{\#}(K)$ は, よく知られたテクニックから, すぐに出ます [5]。

(注意) (2) の等式は, a.e. より強く, q.e. 成立するだろうと思いますが, 証明はしていません。

References

- [1] H.Bauer, Harmonic spaces and associated Markov Processes,
Potential theory, CIME (1969) 23-67.
- [2] A.Beurling- J.Deny, Espaces de Dirichlet. Le cas élémentaire,
Acta Math., t.99(1958) 203-224.
- [3] E.Bedford- B.A.Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions,
Acta Math., 149 (1982) 1-44.
- [4] U.Cegrell, Capacities and extremal plurisubharmonic functions on subsets

- of $\mathbb{C}^n$, Arkiv Mat., 18 (1980) 199-206.
- [5] S.S.Chern- H.I.Levine- L.Nirenberg, Intrinsic norms on complex manifold, Global Analysis, Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1969) 119-139.
- [6] R.Courant, Dirichlet's Principle, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950.
- [7] J.Deny, Méthodes Hilbertiennes en Théorie du Potentiel, Potential theory, CIME (1969) 121-201.
- [8] M.Fukushima, Dirichlet Forms and Markov Processes, Kodansha and North-Holland, 1980.
- [9] ---- -M.Okada, On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, to appear in Acta Math.
- [10] B.Gaveau- J.Ławrynowicz, Intégrale de Dirichlet sur une variété complexe I. Vol. 919, Springer Lec. Notes, 1982.
- [11] M.Okada, Potentiels kàhlériens et espaces de Dirichlet, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 292 (1981) 159-161.
- [12] A.Sadullaev, Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds, Russian Math. Surveys, 36(1981), 61-119.
- [13] J. Siciak, Plurisubharmonic functions and capacities in $\mathbb{C}^n$, Lect. Notes No. 14, Sophia Univ., Tokyo, 1982.