

自律系および非自律系におけるオペレーター・スプリット ング法とインプリシット・オイラー法の有効性について

河原一幾

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 博士後期課程

概要

我々は特定の遅延微分方程式 (Delay Differential Equations; 以下 DDEs と略す。) を適切な関数空間における作用素方程式へと変換した。その結果、インプリシット・オイラー法および Lie-Trotter オペレーター・スプリットング法のいずれも、DDE の厳密解を強位相において効果的に近似できることが明らかとなった。さらに、自律系の場合には、宮寺摂動定理を用いてこれらの作用素が C_0 -半群を生成することを示した。一方、非自律系においては、Chernoff の定理により evolution family を生成することを示した。

Lie-Trotter スプリットング・オペレーターが直接 C_0 -半群または evolution family の生成作用素を近似することを示す代わりに、我々は Lie-Trotter スプリットング・オペレーターが遅延微分方程式の厳密解を生成することを示した。そのために Lie-Trotter スプリットング・オペレーターがインプリシット・オイラー作用素を近似し、さらにインプリシット・オイラー作用素が C_0 -半群または evolution family の生成作用素を近似することを証明した。また、インプリシット・オイラー作用素と Lie-Trotter スプリットング・オペレーターの誤差を評価し、これらの作用素が指定した誤差範囲内で制御可能かつ正確であることを示した。

数値計算を通じて、自律系および非自律系におけるオペレーター・スプリットング法の精度、安定性、収束性および効率性をインプリシット・オイラー法と比較評価した。理論的考察と計算結果の双方からその有効性を議論する。

1 Introduction

オペレーター・スプリットング法は偏微分方程式の研究において非常に重要である。特に反応拡散方程式、多孔質媒質方程式、バーガース方程式、KdV 方程式など、厳密解の導出が難しい方程式の近似解を得るために有効であることが H. Holden, K. H. Karlsen, K.-A. Lie, N. H. Risebro らによって示されている [20]。近年、オペレーター・スプリットング法は通信や画像処理など工学分野にも応用が広がっている [15]。しかし、遅延微分方程式 (DDE) への適用については研究が限られている。

我々は DDE を適切な空間で作用素方程式へと分解する。DDE を作用素方程式として再定式化する主な理由は、有限差分法による近似を明確に定義できることである。さらに、関数解析学における多くの深い定理により、有限差分法と厳密解との関係、特に収束性や誤差が明らかになる。

本稿では有限差分法の中でも特にインプリシット・オイラー作用素 $(I - h(A + B))^{-1}$ および Lie-Trotter スプリットング・オペレーター $(I - hA)^{-1}(I - hB)^{-1}$ を取り上げ、自律系および非自律系それぞれについて厳密解への収束性および誤差評価を考察する。

この分野における先駆者としては、Bátkai, András and Piazzera, Susanna [5], András Bátikai and Petra Csomós and Gregor Nickel [4], András Bátikai and Petra Csomós and Bálint Farkas [2], András Bátikai and Petra Csomós and Bálint Farkas [1], Bátikai, András and Petra Csomós and Bálint Farkas and Gregor Nickel [3], K. J. Engel and R. Nagel [8], Faragó, Istvan and Geiser, J [9], Faragó, Istvan and Havasi, Ágnes [11], Faragó, Istvan and Havasi, Ágnes [10], Geiser, Jürgen [13], Geiser, Jürgen [12], Geiser, Jürgen [14], Eskil Hansen and Tony Stillfjord [19], Morten Bjørhus [26] らが挙げられる。本論文はそれらの手法を参考にしつつ、特定の DDE における Lie-Trotter 作用素およびインプリシット・オイラー作用素の収束性と近似誤差を分析する。

2 節では DDE に対する作用素方程式の構成を説明する。3 節では、DDE の理論を構築する上で重要な宮寺摂動定理について述べる。遅延作用素 B は非有界であるため、非有界な摂動を扱える理論が必要となる。4 節では自律系のオペレーター・スプリットティング理論を、5 節では非自律系のオペレーター・スプリットティング理論を論じる。

我々はインプリシット・オイラー法および Lie-Trotter オペレーター・スプリットティング法の誤差を評価し、インプリシット・オイラー作用素が C_0 -半群や evolution family の近似解を生成することを示した上で、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターがインプリシット・オイラー法を近似することを示した。これにより C_0 -半群や evolution family の一意性を用いて、Lie-Trotter 作用素がインプリシット・オイラー作用素に収束することを示すとともに誤差評価を導出した。

6 節では数値的に Lie-Trotter 作用素を計算し、自律系における安定・不安定両方の場合を検討した。計算結果は不安定に見える場合でも指数的な性質により支配され、完全に制御可能な挙動を示した。計算による Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターとインプリシット・オイラー作用素との近似誤差は自律系では $Ch\tau$ 、非自律系では $Ch\tau^2$ となることがわかる。

非自律システムでは、K. Ohira-T. Ohira の原理（参考文献 [23]）が、遅延微分方程式の直接計算では導出できない厳密解を得る手段を提供する。K. Ohira-T. Ohira の原理によって得られる数値的に厳密な解をベンチマークとして用い、インプリシット・オイラー法およびオペレータ分割法の近似精度を検証する。

インプリシット・オイラー法は、微分方程式を扱うために長年使用されてきたが、主に 1990 年代後半からハンガリーの研究グループによって遅延微分方程式をバナッハ空間の直和空間内の微分方程式として扱い、数値的に解くというアプローチが研究されはじめた。主要な研究として [11], [10], [4], [3], [1], [2] などがある。

7 節でオペレーター・スプリットティング法の精度、安定性、収束性、効率性を理論的・数値的両面から議論し、8 節でまとめを述べる。

2 DDEs に対する作用素方程式の設定

我々の扱う DDEs は特別な形をした次のように定義される方程式である。

自律系の場合

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) + bu(t + \tau), \quad \text{for } t \geq 0, \\ u(t) &= \text{history}(t), \quad \text{for } \tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

非自律系の場合

$$\begin{aligned} u'(t) &= atu(t) + bu(t + \tau), \quad \text{for } t \geq 0, \\ u(t) &= \text{history}(t), \quad \text{for } \tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

ここでは a と b はともに実数で $a < 0$ とする。 $\tau < 0$ は定数とする。 $\tau > 0$ の場合も考えられるがその場合逆方向に対する DDEs として考えることにする。 $\text{history}(t)$ を history segment と呼び、あらかじめ定められた関数とする。

2.1 Operator Framework of the DDEs

DDEs を作用素方程式に書き直すと

自律系の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= au(t) + b\Phi u_t \quad \text{for } t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ u_0(\sigma) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix} \quad \text{for } \tau \leq \sigma \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

非自律系の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= at u(t) + b\Phi u_t \quad \text{for } t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ u_0(\sigma) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix} \quad \text{for } \tau \leq \sigma \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで history segment $u_t(\sigma) : [\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ を $u_t(\sigma) = u(t + \sigma)$ で定義し、遅延作用素 Φ を $\Phi\rho = \rho(\tau)$ で定義する。

時間履歴への依存性および本質的に低い regularity という問題を克服するために、我々は補助的な方程式を導入して問題を再定式化する。このアプローチは、K. J. Engel と R. Nagel [8] をはじめ、A. Bátkai と S. Piazzera 等のハンガリーグループ [5]、[4]、[2]、[1]、[3]、Eskil Hansen and Alexander Ostermann [18]、Eskil Hansen and Tony Stillfjord [19] 等の研究において用いられた。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_t &= \frac{du(t+\sigma)}{dt} = \frac{du(t+\sigma)}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}u_\sigma, \\ u_t(0) &= u(t). \end{aligned} \quad (5)$$

$X(t) = (u(t), u_t)$ とするとこれらの方程式は次のようになる。

自律系の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= (A + B)X(t), \quad \text{for } t \geq 0 \\ X(0) &= \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

非自律系の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= (A(t) + B)X(t), \quad \text{for } t \geq 0 \\ X(0) &= \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $a < 0$ 、作用素 A 、 $A(t)$ 、 B は次のように定義される。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b\Phi \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

ここで作用素 Φ は $\Phi(\rho) = \rho(\tau)$ とし、 $\frac{d}{d\sigma}$ は微分作用素を表すものとする。

次に関数空間を次のように定義する。

$$\mathcal{E} = C([0, T] : \mathbb{R}) \oplus L^1([\tau, 0] : \mathbb{R}),$$

ここで、この空間における元 $x = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}$ のノルムを

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \|u\|_{L^\infty([0, T] : \mathbb{R})} + \|\rho\|_{L^1([\tau, 0] : \mathbb{R})}$$

で定義する。次に $D(A) = D(A(t)) = \mathcal{E}$ と $D(B)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A(t)) = C([0, T] : \mathbb{R}) \oplus L^1([\tau, 0] : \mathbb{R}) = \mathcal{E}, \\ D(B) &= C([0, T] : \mathbb{R}) \oplus \{f \in W^{1,1}([\tau, 0] : \mathbb{R}) : f(0) = \rho(0)\} \subset \mathcal{E}, \\ \text{with norm} \quad \|x\|_{D(B)} &= \|u\|_{L^\infty[0, T]} + \|\rho\|_{L^1[\tau, 0]} + \left\| \frac{d\rho}{d\sigma} \right\|_{L^1[\tau, 0]} \end{aligned} \quad (9)$$

$D(B)$ は $\mathcal{E}$ の部分空間であり closed であるが densely defined ではない。したがって B は $\mathcal{E}$ 上では C_0 -半群を生成しない。

ここで線形作用素に対するレゾルベントとスペクトルを確認しておく。K. J. Engel and R. Nagel [8], A. Pazy [24]などを参照のこと。

定義 2.1 (線形作用素に対するレゾルベントとスペクトル). $(C, D(C))$ をバナッハ空間 $\mathcal{E}$ における閉線形作用素とする。

1) C のスペクトルは

$$\sigma(C) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - C : D(C) \rightarrow \mathcal{E} \text{ is not bijective} \}.$$

2) $(C, D(C))$ のレゾルベントは $\rho(C) := \mathbb{C} \setminus \sigma(C)$ において定義され、作用素 $\rho(C)$ は次のようになる。

$$\rho(C) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - C : D(C) \rightarrow \mathcal{E} \text{ is bijective} \}.$$

3) 仮に $\lambda \in \rho(C)$ であれば $\lambda - C$ は *injective* であり、したがって代数的逆作用素 $(\lambda I - C)^{-1}$ が存在する。この作用素を C のレゾルベントと呼び次のように表す。

$$R(\lambda, C) := (\lambda I - C)^{-1}.$$

$\lambda \in \rho(C)$ に対して作用素 $\lambda I - C$ は *injective* でありかつ *surjective* の場合 $(\lambda I - C)^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow D(C)$ は $\mathcal{E}$ 全体で定義される。 C は *closed*、 $\lambda I - C$ も *closed* ありその逆作用素も *closed* である。閉グラフ定理により $(\lambda I - C)^{-1}$ が有界であることがわかる。

次に A と $A(t)$ は *dissipative* であることを確認しておく。

命題 2.2. $a < 0$ に対し A および $A(t)$ は *dissipative* である。

証明. $J(u, \rho)$ を (u, ρ) の双対集合とする。作用素 C が消散的であるとは、すべての $(u, f) \in D(C)$ に対し、ある汎関数 $\phi \in J(u, f)$ が存在して次の条件を満たすことをいう：

$$\operatorname{Re} \langle C(u, f), \phi \rangle \leq 0$$

ここで再び、 $J(u, \rho)$ は (u, ρ) の双対集合を表すものとする。 $h > 0$ に対して、任意の $(u, \rho) \in D(A) = \mathcal{E}$ を考え、特に $\phi = (u, 0) \in J(u, f)$ とすると、次の式が成立する：

$$\langle A(u, f), \phi \rangle = \langle (au, 0), (u, 0) \rangle = ah \|u\|_{L^\infty([0, T])}^2.$$

ここで、 $a < 0$ であるから、

$$\operatorname{Re} \langle A(u, f), \phi \rangle = a \|u\|_{L^\infty([0, T])}^2 \leq 0$$

が成り立つ。したがって、作用素 A は *dissipative* である。同様にして、

$$\langle A(t)(u, f), \phi \rangle = \langle (atu, 0), (u, 0) \rangle = at \|u\|_{L^\infty([0, T])}^2$$

となり、ここでも再び $a < 0$ であることから、

Since $a < 0$, it follows that:

$$\operatorname{Re} \langle A(t)(u, f), \phi \rangle = at \|u\|_{L^\infty([0, T])}^2 \leq 0.$$

が成り立つ。これにより、 $A(t)$ もまた *dissipative* であることが示された。

□

命題 2.3 ($A+B$ は $D(B)$ 上で有界、 B は $\mathcal{E}$ 上では非有界である). 上記の時間非依存の作用素 A, B を考える。ただし、 B は非有界作用素 $D(B) \rightarrow \mathcal{E}$ とする。すなわち、ある定数 M が存在して以下が成立する：

$$\left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} \not\leq C \quad \text{for every constant } M \quad (10)$$

この不等式について注意が必要である。 B は空間 $\mathcal{E}$ のノルムに関しては非有界だが、定義域 $D(B)$ 上のグラフノルムに関しては有界である。すなわち、

$$\left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} \leq C \|x\|_{D(B)} = C(\|u\|_{L^\infty[0,T]} + \|\rho\|_{L^1[\tau,0]} + \|\rho'\|_{L^1[\tau,0]}).$$

が成り立つ。

この結果から、作用素 $A+B$ は定義域 $D(A) \cap D(B) = D(B)$ に制限すればグラフノルムに関して有界となることが導かれる。すなわち、

$$\left\| (A+B) \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| \leq C \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{D(A) \cap D(B) = D(B)}.$$

である。

同様のことは時間依存の場合、作用素 $A(t)$ についても成り立つ。すなわち、区間 $t \in [0, T]$ において、 $A(t) + B$ は定義域 $D(B)$ 上で有界となる。

証明. $\rho \in W^{1,1}([\tau, 0] : \mathbb{R})$ のとき、跡 (トレース) $\rho(\tau)$ は well-defined である。ソボレフの埋蔵定理より、 $\rho \in W^{1,1}([\tau, 0] : \mathbb{R})$ は連続であるため、 $\rho(\tau)$ は意味を持つ。

従って、

$$|bf(\tau)| \leq |b| \|f\|_{W^{1,1}([\tau, 0])}$$

が成立する。また、 $\rho \in W^{1,1}([\tau, 0] : \mathbb{R})$ の場合、その微分 ρ' は $L^1([\tau, 0] : \mathbb{R})$ に属する。

ゆえに、

$$\|\rho'\|_{L^1([\tau, 0] : \mathbb{R})} \leq \|\rho\|_{W^{1,1}([\tau, 0] : \mathbb{R})}.$$

が成立する。

以上から B は $D(B)$ 上で有界であることが示された。また

$$A \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \\ 0 \end{pmatrix}$$

であることから、ある定数 $M > 0$ を用いて、

$$\left\| A \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| = \|au\|_{L^\infty([0, T] : \mathbb{R})} \leq M$$

が成立する。

時間依存の場合、 $A(t)$ は

$$\left\| A(t) \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| = \|atu\|_{L^\infty([0, T] : \mathbb{R})} = \sup_{0 \leq t \leq T} |atu| \leq |a|T \|u\|_{L^\infty([0, T] : \mathbb{R})} \leq M$$

となり、これにより作用素 $A+B$ は定義域 $D(A) \cap D(B)$ 上で有界であることが示される。作用素 A が時間依存である場合でも、 $A(t) + B$ は $D(A(t)) \cap D(B) = D(B)$ 上で $0 \leq t \leq T$ の各点において有界であることが示された。 $\square$

命題 2.4 (B は A (および $A(t)$) に対して相対有界である), 作用素 B は、作用素 A および $A(t)$ に対して相対有界である。すなわち、ある $0 \leq \alpha < 1$ および $\beta \geq 0$ が存在して、以下を満たす：

$$\left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} \leq \alpha \left\| A \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} + \beta \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{D(B)}$$

さらに、時間依存の作用素 $A(t)$ に対しても、区間 $t \in [0, T]$ において以下が成立する：

$$\left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} \leq \alpha \left\| A(t) \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} + \beta \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{D(B)} \quad \text{for } t \in [0, T].$$

証明. 次のように評価できる：

$$\left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \rho(\tau) \\ \rho'(s) \end{pmatrix} \right\|,$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} \left\| B \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| &\leq |\rho(\tau)| + \|\rho'(s)\|_{L^1[\tau, 0]} \\ &\leq C_1 \|\rho\|_{W^{1,1}[\tau, 0]} + \|\rho\|_{W^{1,1}[\tau, 0]} \\ &\leq (C_1 + 1) \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

よって、 $\alpha = 0$, $\beta = C_1 + 1$ と選ぶことで結論が成立する。 $A(t)$ の場合も、全く同様に示すことができる。 $\square$

3 Miyadera Perturbation

次節以降では、作用素 $(I - hB)^{-1}$ が適切に定義されていることを利用する。次の補題では、レゾルベント作用素

$$R(\lambda, A(t) + B) = (\lambda I - (A(t) + B))^{-1}$$

が有界であり、かつ強可測であることを確認する。

補題 3.1 ($A(t) + B$ のレゾルベントの存在性). 実部が十分大きなある複素数 λ に対して、作用素 $\lambda I - (A(t) + B)$ は可逆である。すなわち、 $A(t) + B$ のレゾルベント作用素

$$R(\lambda, A(t) + B) = (\lambda I - (A(t) + B))^{-1}$$

が有界であることが示される。

証明. 任意の $(v, \phi) \in \mathcal{E}$ に対して、次を満たす $(u, \rho) \in D(B)$ が存在することを示せばよい：

$$(\lambda I - (A(t) + B)) \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \phi \end{pmatrix}.$$

この式を具体的に展開すると、

$$\begin{pmatrix} \lambda - at & -b\Phi \\ 0 & \lambda - \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \phi \end{pmatrix}$$

となる。これから次の連立方程式が得られる：

$$(\lambda - at)u - b\rho(\tau) = v$$

$$\left(\lambda - \frac{d}{d\sigma}\right)\rho = \phi$$

2つ目の方程式は変数係数法（定数変化法）により解ける一階線形常微分方程式であり、その解は次のように与えられる：

$$\rho(\sigma) = e^{\lambda\sigma} \int_{\tau}^{\sigma} e^{-\lambda s} \phi(s) ds$$

これを用いて1つ目の方程式に $\rho(\tau)$ を代入すると

$$u = \frac{v + b\rho(\tau)}{\lambda - at}$$

を得る。ここで、自律系 $(A(t) = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ の場合も非自律系においても、 $a < 0$ としているため、 $\lambda > 0$ を十分大きく取れば分母はゼロにならず、 u は適切に定義される。

以上より、我々は明示的に解を構成でき、また解が一意的に定まるため、 λ が十分大きいとき作用素 $\lambda I - (A(t) + B)$ が可逆であることが示された。また、作用素 $A(t)$ および B は閉作用素であるため、その和 $A(t) + B$ も閉作用素である。したがって、閉グラフ定理により、逆作用素 $(\lambda I - (A(t) + B))^{-1}$ が有界となる。このことから補題が証明された。□

特に自律系の場合も $(\lambda I - (A + B))^{-1}$ が有界であることが導かれる。 $a = 0$ の場合には、この補題により B が非有界、densely defined でなくても $(\lambda I - B)^{-1}$ が $\lambda > 0$ で well-defined であることがわかる。

宮寺摂動定理（Miyadera Perturbation Theorem）の使用を考える。A. Pazy の文献 [24] では、 $A + B$ が dissipative である場合について宮寺摂動定理の説明がなされているが、本稿では $A + B$ が dissipative であるという仮定を置かない。

定理 3.2 (一般化された宮寺摂動定理). [21], [28], [27], [8] Banach 空間 $\mathcal{E}$ 上で C_0 -半群 $(T_A(t))_{t \geq 0}$ を生成する作用素 A を考える。また、作用素 $B : D(B) \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ が A に対して相対有界であるとする。すなわち、定数 $0 \leq \alpha$ および $\beta \geq 0$ が存在し、以下を満たすとする。

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|, \quad \forall x \in D(A) \cap D(B). \quad (11)$$

さらに、以下の条件を仮定する：

- (i) 作用素 A が Banach 空間 $\mathcal{E}$ 上で C_0 -半群 $T_A(t)$ を生成する：すなわち、ある定数 $M \geq 1$ と $\omega \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $t \geq 0$ に対して以下が成立する：

$$\|T_A(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (12)$$

- (ii) 作用素 B は作用素 A に対して相対有界であり、その相対的な有界性を示す定数 α は 1 よりも小さい：これはある定数 $\beta \geq 0$ が存在して、次の条件を満たすことを意味する：

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|, \quad \forall x \in D(A) \cap D(B) \quad (13)$$

- (iii) 作用素 B は densely defined の必要はないが、上記の相対的な有界性の条件を定義域 $D(A) \cap D(B)$ 上で満たさなければならない。

以上の仮定が満たされる場合、作用素 $A+B$ は *Banach* 空間 $\mathcal{E}$ 上で C_0 -半群 $T_{A+B}(t)$ を生成し、その半群の *growth bound* として以下が成り立つ：

$$\|T_{A+B}(t)\| \leq M e^{(\omega+\beta)t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (14)$$

宮寺摂動定理の証明は省略し、ここでは我々のモデルが宮寺摂動定理の適用条件を満足することを示す。この定理は次のことを意味している：

- 1 十分大きな λ に対して、作用素 $A+B$ のレゾルベントが適切に定義される。
- 2 インプリシット・オイラスキーム $(I-h(A+B))^{-1}$ は、小さい刻み幅 h に対して well-posed である。
- 3 半群の *growth bound* は、相対的有界性の条件に現れる絶対定数 β 分だけしか増加しない。

宮寺摂動条件は我々のモデルに適している。我々が確認すべきは、作用素 B が作用素 A に対して相対有界で、その有界性定数が $\alpha < 1$ を満たすことである。しかし、これは命題 2.4 により、実際には $\alpha = 0$ として成立することが既に示されている。

したがって、宮寺摂動定理は我々のモデルに適用可能である。作用素 A が生成する半群 $T_A(t)$ は、明示的に次のように計算できる：

$$\begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 $a < 0$ であるため、 $\|T_A(t)\| \leq 1 = e^{0t}$ となり、作用素 $A+B$ が生成する半群は、命題 2.4 で得られた定数 C_1 を用いて

$$e^{(0+(C_1+1))t} = e^{(C_1+1)t}$$

と上から評価される。

さらに後に述べるように、近似解と厳密解の間の誤差が $O(ht)$ であることも確認できる。

4 Autonomous Operator Splitting

Lie-Trotter スプリットティング・オペレーター $T_h := (I-hA)^{-1}(I-hB)^{-1}$ を考える。前節では宮寺摂動定理を用いることによって、インプリシット・オイラー作用素 $R_h := (I-h(A+B))^{-1}$ が C_0 -半群 $T_{A+B}(t)$ を生成することを確認した。本節の目的は、作用素ノルムにおいて差 $R_h^n - T_h^n$ が $O(nh^2) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) を示すことである。これは $t = nh$ において、 $h \rightarrow 0$ のとき Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターがインプリシット・オイラー作用素に収束し、その結果として同一の C_0 -半群を生成することを意味する。

次の命題では、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターとインプリシット・オイラー作用素の差を計算する。これは Eskil Hansen and Tony Stillfjord [19] によって用いられた方法と類似したものであるが、彼らはより一般的な状況を考察している。

命題 4.1 (The error between the Lie-Trotter splitting operator and the Implicit Euler operator).

$$\|R_h^n - T_h^n\| \leq Cnh^2 \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0. \quad (15)$$

証明.

$$R_h - T_h = (I-hA)^{-1} \left((I-hA)(I-h(A+B))^{-1} - (I-hB)^{-1} \right) \quad (16)$$

これを簡単にすると：

$$\begin{aligned}
 R_h - T_h &= (I - hA)^{-1} (I - hA - hB + hB) (I - h(A + B))^{-1} - (I - hB)^{-1} \\
 &= (I - hA)^{-1} \left(I + hBR_h - (I - hB)^{-1} \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

次のステップを計算すると：

$$\begin{aligned}
 (I - hA)R_h - (I - hB)^{-1} &= (I - hA - hB + hB)R_h - (I - hB)^{-1} \\
 &= I + hBR_h - (I - hB)^{-1} \\
 &= hBR_h + I - (I - hB)^{-1} \\
 &= hBR_h + (I - hB)(I - hB)^{-1} - (I - hB)^{-1} \\
 &= hBR_h - hB(I - hB)^{-1}
 \end{aligned} \tag{18}$$

従って我々は $\|R_h - T_h\|$ を次のように評価できる：

$$\|R_h - T_h\| = h\|(I - hA)^{-1}(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \tag{19}$$

ここで $P^{-1} - Q^{-1} = P^{-1}(Q - P)Q^{-1}$ to bound $\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\|$ を使うと

$$\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \leq \|B(I - h(A + B))^{-1}\| \|((I - hB) - (I - h(A + B)))\| \|(I - hB)^{-1}\|. \tag{20}$$

従って $B(I - h(A + B))^{-1}$ は：

$$\begin{aligned}
 B(I - h(A + B))^{-1} &= \frac{1}{h} \left[(I - h(A + B))^{-1} - (I - hB)^{-1} \right] - A(I - h(A + B))^{-1}(I - hB)^{-1}. \\
 &= \frac{1}{h} (I - h(A + B))^{-1} ((I - hB) - (I - h(A + B))) (I - hB)^{-1} \\
 &\quad (I - h(A + B))^{-1} A (I - hB)^{-1}
 \end{aligned} \tag{21}$$

レゾルベント作用素は全空間 $\mathcal{E}$ を B の domain $D(b)$ に写す：

$$(I - hB)^{-1} : X \rightarrow D(B) \subset \mathcal{E}$$

このことは B が非有界であっても、レゾルベント作用素 $(I - hB)^{-1}$ は十分小さな h に対しては有界であり

$$\|(I - hB)^{-1}\| \leq C, \quad h \text{ sufficiently small}$$

が言える。同様に

$$\|(I - h(A + B))^{-1}\| \leq C, \quad h \text{ sufficiently small}$$

が言え、さらに A は $\mathcal{E}$ 上で有界であるから $\|A\| \leq C$.

これらのことを式 (20) に適用すると、この式は

$$\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \leq C \cdot C \cdot C \cdot hC \cdot C = hC$$

となる。この式から (19) は

$$\|R_h - T_h\| = h \left\| (I - hA)^{-1} \left(BR_h - B(I - hB)^{-1} \right) \right\| \leq h \cdot hC = Ch^2. \tag{22}$$

のように評価される。

我々は、インプリシット・オイラー法とオペレータ・スプリットティング法の誤差の上限を次のように求めることができる：

$$\begin{aligned}
\|R_h^n - T_h^n\| &\leq \sum_{k=1}^n \|R_h^{n-k}\| \cdot \|R_h - T_h\| \cdot \|T_h^{k-1}\| \\
&\leq \sum_{k=1}^n C^{n-k} \cdot Ch^2 C^{k-1} \\
&\leq n \cdot C \cdot h^2 \\
&= Cnh^2 = Chn.
\end{aligned} \tag{23}$$

□

この命題から、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターがインプリシット・オイラー作用素に対して $h \rightarrow 0$ のとき収束することが示される。宮寺摂動定理により、インプリシット・オイラー作用素は一意的に C_0 -半群を生成することが保証される。したがって、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターも、インプリシット・オイラー作用素が生成するものと同じ C_0 -半群に収束する。

定理 4.2. *Lie-Trotter* スプリットティング・オペレーターは、インプリシット・オイラー作用素が生成するものと同一の C_0 -半群に収束する。

次に、非有界作用素 $A+B$ が生成する C_0 -半群 $T_{A+B}(t)$ と、その差分近似であるインプリシット・オイラー作用素 $R_h = (I - t/n(A+B))^{-1}$ が生成する C_0 -半群 $T_n(t)$ の間に生じる誤差の程度を調べる。

定義 4.3 (Yoshida Approximants). [8]

十分大きな n に対し、 $n/t \in \rho(A+B)$ が成立するので、次の作用素：

$$A_n := (A+B) \left(I - \frac{t}{n}(A+B) \right)^{-1} = \frac{n}{t} R \left(\frac{n}{t}, A+B \right)$$

は $\mathcal{E}$ から $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ への有界作用素となり、*well-defined* である。

それゆえ $(A+B)$ それ自体が非有界でも

$$(A+B) \left(I - \frac{t}{n}(A+B) \right)^{-1}$$

は、空間全体 $\mathcal{E}$ 上で有界作用素となる。この作用素 A_n を、 $A+B$ の *Yosida Approximants* と呼ぶ。

Yoshida Approximants の定義より、上記で定義された各作用素 A_n は有界線形作用素となる。作用素 A_n は、生成作用素 $A+B$ の吉田近似として有界であるため、次に示す指数作用素を用いて明示的に表現される強連続半群 $T_n(t)$ を生成する：

$$T_n(t) := e^{tA_n}$$

よって各作用素 A_n は強連続半群 $T_n(t)$ を生成することが保証される。

さらに、作用素 A_n は元の非有界作用素 $A+B$ を近似するため、標準的な理論から、以下のような指数関数的評価が一様に成立することが保証される：

$$\|T_n(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad n \geq 1$$

ここで定数 M, ω は n に依存せず、元の作用素 $A+B$ に対して宮寺摂動定理または Hille-Yoshida の定理から得られる growth bound と一致する。

命題 4.4. [8, Lemma in Section 4]

$$\begin{aligned}
\|T_n(t)x - T(t)x\| &\leq tM^2 e^{\omega t} \|A_n x - (A+B)x\| \\
&= nhC e^{\omega t} \|A_n x - (A+B)x\|
\end{aligned} \tag{24}$$

5 Non-autonomous Operator Splitting: A is time-dependent $A(t)$

前節では、自律系の場合を考察し、宮寺摂動定理（Miyadera の定理）を用いて、インプリシット・オイラー作用素および Lie-Trotter スプリッティング・オペレーターが C_0 -半群 $T_{A+B}(t)$ を生成することを確認した。

もし A が時間依存であり、固定した時刻 t に対して $A = A(t)$ となる場合を考える。この場合、作用素 $A(t)$ は閉作用素であり、その定義域は $D(A(t)) = \mathcal{E}$ となるため、宮寺摂動定理を局所的に適用することが可能である。したがって、任意の固定された t に対して、作用素 $A(t) + B$ は局所的な半群を生成する。すなわち、各固定された t ごとに、次を満たす局所的な evolution family $U(s, t)$ が存在する：

$$\frac{d}{dt}U(s, t) = (A(t) + B)U(s, t), \quad s \geq t.$$

この式により、小さな区間 $s - t$ における局所解が得られることになるが、我々はこの局所解をより広い区間に拡張し、大域的（global）な解を得る必要がある。このため、evolution family を明確に定義する。

evolution family $U(s, t)$ は次のように定義される。詳細については、Bátkai, András and Petra Csomós and Bálint Farkas and Gregor Nickel [3], András Bátkai and Petra Csomós and Bálint Farkas [1] および A. Pazy [24] を参照されたい。

定義 5.1 (Evolution family). [3, Definition 1.5] Banach 空間 $\mathcal{E}$ 上の線形有界作用素の族 $U = (U(s, t))_{s \geq t}$ が以下を満たすとき、（指数的に有界な）evolution family と呼ばれる：

(i) 任意の $s \geq r \geq t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$U(s, r)U(r, t) = U(s, t), U(t, t) = I$$

が成立する。

(ii) 対応関係 $(s, t) \mapsto U(s, t)$ は強連続（strongly continuous）である。

(iii) ある定数 $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ が存在して、すべての $s \geq t \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する：

$$\|U(s, t)\| \leq Me^{\omega(s-t)}$$

ここでは Chernoff の定理を用いる。これにより、非自律的な場合の evolution family $U(s, t)$ を求めることができる。

定理 5.2 (チェルノフの定理 (Chernoff)). $\mathcal{E}$ を Banach 空間とし、次の条件を満たす作用素の族を考える：

(i) 一致条件 (Consistency Condition)：強位相において、

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_h(t)x = x \quad \text{for all } x \in \mathcal{E}$$

が成立する。

(ii) 生成作用素の近似 (Generator Approximation)：すべての $x \in D(A(t)) \cap D(B)$ について、強位相において、

$$\frac{R_h x - x}{h} \rightarrow (A(t) + B)x \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

が成立する。

(iii) 一様安定性 (Uniform Stability)：作用素族のノルム $\|R_h\|$ は、小さな h に対して一様に有界である。

これらが成り立つならば、 $R_h(t)^n$ は *evolution family* $U(s, t)$ に収束する。これは以下の微分方程式の一意的な解である：

$$\frac{d}{dt}U(s, t) = A(t)U(s, t), \quad U(t, t) = I.$$

証明. (i) Consistency Conditions:

$$(I - h(A(t) + B))^{-1} - I = h(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1},$$

であるから

$$R_h(t)x - x = h(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1}x. \quad (25)$$

Hille-Yosida あるいは 宮寺条件から、十分小さな h に対し：

$$(I - h(A(t) + B))^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow D(A(t) + B)$$

は t について一様に有界である。

たとえ $A(t) + B$ が非有界であっても $(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1}$ は小さい h に対して一様に有界である。このことにより

$$R_h x \rightarrow x$$

が強位相で成り立つ。これで条件 (i) を満たすことが証明された。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [(I - h(A(t) + B))^{-1} - I] &= (A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1}. \\ &\rightarrow A(t) + B \end{aligned}$$

により (ii) Generator Approximation condition が証明された。

$$\|R_h x\| \leq \|R_h x - x\| + \|x\| \quad (26)$$

より条件 (i) のもとで $\|R_h x\|$ が一様有界であることがわかり一様安定性条件 (iii) を満たしていることが証明された。

□

以上のことからチェルノフの定理 (Chernoff's theorem) により、インプリシット・オイラー作用素

$$R_h := (I - h(A(t) + B))^{-1}$$

が *evolution family* $U(s, t)$ を生成することが証明された。

命題 5.3. インプリシット・オイラー作用素と *evolution family* の差は：

$$\|(I - h(A(t) + B))^{-1} - U(t, t + h)\| \leq Ch^2. \quad (27)$$

と評価される。

証明. 非自律作用素 $A(t) + B$ が生成する *evolution family* $U(s, t)$ は次の積分方程式を満たす：

$$U(s, t)x - x = \int_s^t U(s, \tau)(A(\tau) + B)x d\tau, \quad x \in D(A(\tau) + B)$$

一方、作用素 $(I - h(A(t) + B))^{-1}$ はレゾルベント恒等式を満たし、次のように書ける：

$$(I - h(A(t) + B))^{-1}x - x = h(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1}x.$$

exact evolution family について、短い時間区間において以下が成立する：

$$U(t, t+h)x - x = \int_t^{t+h} U(t, \tau)(A(\tau) + B)x d\tau \quad (28)$$

この二つの差を明示的に書くと、

$$\begin{aligned} & (I - h(A(t) + B))^{-1}x - U(t, t+h)x \\ &= h(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1}x - \int_t^{t+h} U(t, \tau)(A(\tau) + B)x d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

と表現できる。これを積分の形で再び書き換えると

$$= \int_t^{t+h} [(A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1} - U(t, \tau)(A(\tau) + B)] x d\tau \quad (30)$$

となる。レゾルベント作用素の一樣有界性により、

$$\|(I - h(A(t) + B))^{-1}\| \leq C, \quad \text{uniform in } h.$$

が成立する。また、 $\tau \approx t$ のときに近似すると、

$$U(t, \tau) \approx I + (\tau - t)(A(t) + B)$$

が得られ、同様にして、

$$(I - h(A(t) + B))^{-1} \approx I + h(A(t) + B) + O(h^2)$$

となる。レゾルベント恒等式から形式的に正当化される展開は、

$$U(t, \tau) = I + (\tau - t)(A(t) + B) + O((\tau - t)^2), \quad \tau \rightarrow t$$

および

$$(I - h(A(t) + B))^{-1} = I + h(A(t) + B) + O(h^2)$$

である。したがって、被積分関数は $\tau = t + s, ; 0 \leq s \leq h$ と置いて明示的に展開できる：

$$\begin{aligned} & (A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1} - U(t, t+s)(A(t+s) + B) \\ &= [(A(t) + B)(I + h(A(t) + B))] - [I + s(A(t) + B)][A(t+s) + B] + O(h^2). \end{aligned}$$

項を整理すると、

$$\begin{aligned} & (A(t) + B)(I - h(A(t) + B))^{-1} - U(t, t+s)(A(t+s) + B) \\ &= A(t) - A(t+s) + h(A(t) + B)(A(t) - A(t+s)) + O(h^2). \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる。 s が t に近づくとき、式 (31) が正当化される。

□

次に, Lie-Trotter splitting 作用素

$$T_h := (I - hA(t))^{-1}(I - hB)^{-1}$$

は R_h が生成する evolution family と同じ evolution family を生成することを示す。

このことを説明するために、次のことを示す。 $h \rightarrow 0$ としたとき、作用素ノルム $\|R_h - T_h\|$ は、自律系の場合と同様に $O(th^2)$ に近づく。この結果を証明できれば、 R_h が生成する evolution family の一意性から作用素 T_h が作用素 R_h と同じ evolution family $U(s, t)$ を生成することが確認される。

命題 5.4 ($\|T_h - R_h\| \leq ChT^2 \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$). 作用素を $R_h := (I - h(A(t) + B))^{-1}$ および $T_h := (I - hA(t))^{-1}(I - hB)^{-1}$ とする。このとき、作用素 T_h と R_h の差は一樣位相において $h \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する。すなわち、ある定数 C が存在して次の評価が成り立つ：

$$\|R_h - T_h\| \leq ChT^2 \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0 \quad \text{for some } C. \quad (32)$$

ここで T は $0 \leq t = nh \leq T < \infty$ として定めた定数である。

証明.

$$R_h - T_h = (I - hA(t))^{-1} \left((I - hA(t))(I - h(A(t) + B))^{-1} - (I - hB)^{-1} \right) \quad (33)$$

この表現を簡単にすると

$$\begin{aligned} R_h - T_h &= (I - hA(t))^{-1} (I - hA(t) - hB + hB) (I - h(A(t) + B))^{-1} - (I - hB)^{-1} \\ &= (I - hA(t))^{-1} \left(I + hBR_h - (I - hB)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

次のステップに進むと

$$\begin{aligned} (I - hA(t))R_h - (I - hB)^{-1} &= (I - hA(t) - hB + hB)R_h - (I - hB)^{-1} \\ &= I + hBR_h - (I - hB)^{-1} \\ &= hBR_h + I - (I - hB)^{-1} \\ &= hBR_h + (I - hB)(I - hB)^{-1} - (I - hB)^{-1} \\ &= hBR_h - hB(I - hB)^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

したがって $\|R_h - T_h\|$ を次のように評価できる。

$$\|R_h - T_h\| = h \|(I - hA(t))^{-1}(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \quad (36)$$

ここで恒等式 $P^{-1} - Q^{-1} = P^{-1}(Q - P)Q^{-1}$ を用いて $\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\|$ を評価する：

$$\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \leq \|B(I - h(A(t) + B))^{-1}\| \|((I - hB) - (I - h(A(t) + B)))\| \|(I - hB)^{-1}\|. \quad (37)$$

ここで $B(I - h(A(t) + B))^{-1}$ は:

$$\begin{aligned} B(I - h(A(t) + B))^{-1} &= \frac{1}{h} \left[(I - h(A(t) + B))^{-1} - (I - hB)^{-1} \right] - A(I - h(A(t) + B))^{-1}(I - hB)^{-1} \\ &= \frac{1}{h} (I - h(A(t) + B))^{-1} ((I - hB) - (I - h(A(t) + B))) (I - hB)^{-1} \\ &\quad (I - h(A(t) + B))^{-1} A(t) (I - hB)^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

たとえ B が非有界であっても、レゾルベント $(I - hB)^{-1}$ は、十分小さい h に対しては通常有界である。実際、次のようなレゾルベントの評価は：

$$\|(I - hB)^{-1}\| \leq C, \quad h \text{ sufficiently small}$$

同様に

$$\|(I - h(A(t) + B))^{-1}\| \leq C, \quad h \text{ sufficiently small}$$

さらに、行列 $A(t) = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから $A(t)$ は $\mathcal{E}$ 上で一様有界であり、 $\|A(t)\| \leq CT$ for $0 \leq t \leq T$ を満たすことを考慮すると、次の結果が導かれる。この評価を式 (37) に適用すると、以下のように単純化される：

$$\|(BR_h - B(I - hB)^{-1})\| \leq C \cdot CT \cdot C \cdot hC \cdot C = hCT$$

したがって、式 (19) の評価は次のようになる：

$$\|R_h - T_h\| = h \left\| (I - hA(t))^{-1} (BR_h - B(I - hB)^{-1}) \right\| \leq h \cdot hCT = Ch^2T. \quad (39)$$

以上の結果から、インプリシット・オイラー法およびオペレーター・スプリットティング法における誤差についての評価が以下のように得られた。

$$\begin{aligned} \|R_h^n - T_h^n\| &\leq \sum_{k=1}^n \|R_h^{n-k}\| \cdot \|R_h - T_h\| \cdot \|T_h^{k-1}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n C^{n-k} \cdot Ch^2TC^{k-1} \\ &\leq n \cdot C \cdot h^2T \\ &= Cnh^2T = ChT^2 \end{aligned} \quad (40)$$

□

この命題は、非自律系の場合でも自律系と同様に、時間依存する Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターが、時間依存するインプリシット・オイラー作用素へ収束することを示している。時間依存するインプリシット・オイラー作用素は一意的な evolution family を生成するため、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターもまた同一の evolution family を生成することになる。さらに、近似解と厳密解 (evolution family) の差は約 $O(h^2)$ である。

Chernoff の定理を適用する。時間依存するインプリシット・オイラー作用素が生成する evolution family を $U(s, t)$ とすると、Chernoff の定理は、時間依存するインプリシット・オイラー法を用いた evolution family の近似収束に関する枠組みを与える。ただし、Chernoff の定理では evolution family $U(s, t)$ の growth bound が明示的には得られない。

evolution family $U(s, t)$ の growth bound は、宮寺摂動定理 (Miyadera Perturbation Theorem) によって決定される。

定理 5.5 (Growth Bound of the evolution family $U(s, t)$). *Let*

$$\|Bx\|_{\mathcal{E}} \leq \alpha \|A(t)x\|_{\mathcal{E}} + \beta \|x\|_{D(B)} \quad \text{for } x \in D(A(t)) \cap D(B)$$

したがって、evolution family $U(s, t)$ の growth bound は生成作用素 $(I - h(A(t)) + B)^{-1}$ あるいは $(I - hA(t))^{-1}(I - hB)^{-1}$ によって近似される：

$$\|U(s, t)\| \leq e^{\beta(s-t)}, \quad (41)$$

when setting $A(t) = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

我々のケースでは $a < 0$ で $D(A(t)) = \mathcal{E}$ であるため、 $A(t)$ のレゾルベント集合は $(0, \infty)$ を含む。従って

$$\begin{aligned} R(\lambda, A(t)) &= (\lambda I - A(t))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - at & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - at} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はすべての $\lambda > \omega = 0$ に対して存在する。

レゾルベント評価条件：

$$\|(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leq \max \left\{ \frac{1}{\lambda - at}, \frac{1}{\lambda} \right\},$$

を満たすため $A(t)$ は $s \geq t$ に対して C_0 -半群 $T_{A(t)}(s-t)$ を生成する。

定理 5.6. 作用素 $A(t)$ が生成する時刻 t における C_0 半群のノルムは、次のように上から評価される：

$$\|T_{A(t)}(s-t)\| = \max \left\{ e^{\frac{a}{2}(s^2-t^2)}, 1 \right\}. \quad (42)$$

したがって *evolution family* $U(s, t)$ のノルムも次のように評価される：

$$\|U(s, t)\| \leq e^{0+\beta(s-t)}. \quad (43)$$

証明. 生成作用素 $A(t)$ は時間依存であり、その行列表現は以下で与えられる：

$$A(t) = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

非自律作用素 $A(t)$ の場合、*evolution family* は以下で定義される：

$$T_{A(t)}(s-t) = \exp \left(\int_t^s A(\tau) d\tau \right)$$

この積分を具体的に計算すると：

$$\int_t^s A(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} a \int_t^s \tau d\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

したがって、以下のように書ける：

$$T_{A(t)}(s-t) = \exp \left(\begin{bmatrix} \frac{a}{2}(s^2-t^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

この行列は対角行列であるため、指数関数は各要素ごとに計算でき：

$$T_{A(t)}(s-t) = \exp \left(\begin{bmatrix} \frac{a}{2}(s^2-t^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$T_{A(t)}(s-t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{a}{2}(s^2-t^2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

作用素ノルムは次のように与えられる：

$$\|T_{A(t)}(s-t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_{A(t)}(s-t)x\|.$$

行列が対角行列であるため、ノルムの最大値は最大固有値から得られる：

$$\|T_{A(t)}(s-t)\| = \max \left\{ e^{\frac{a}{2}(s^2-t^2)}, 1 \right\}$$

ここで、 $a < 0$ であるから、常に $e^{\frac{a}{2}(s^2-t^2)} \leq 1$ が成り立つため、結局：

$$\|T_{A(t)}(s-t)\| = 1 \quad (45)$$

これに宮寺摂動定理による評価を適用すると：

$$\|U(s, t)\| \leq \|T_{A(t)}(s-t)\| e^{\beta(s-t)};$$

上で得た結果を代入すると：

$$\|U(s, t)\| \leq e^0 e^{\beta(s-t)}$$

したがって、evolution family $U(s, t)$ の growth bound は、最大でも次のようになる：

$$\|U(s, t)\| \leq e^{\beta(s-t)} \quad (46)$$

□

理論的には、上記の議論からオペレーター・スプリット法とインプリシット・オイラー法の差は次のように評価される：

自律系の場合：

$$ChT \quad (47)$$

非自律系の場合：

$$ChT^2 \quad (48)$$

理論上、非自律系の場合、インプリシット・オイラー法と Lie-Trotter 分割法の誤差は、自律系の場合（1 次のオーダー）と比較して 2 次のオーダーのため収束の accuracy に関しては増加する。グローバルに見れば時間が進むにつれて大きくなる。

6 Numerical Analysis

本節では、以下の文献を参照した：E. Hairer と G. Wanner [16]、E. B. Davies [7]、W. Zuo と Y. Song [30]、および K. Ohira と T. Ohira [23]。さらに、K. Ohira [22] を引用した。また、Python によるプログラム「ddeint」の詳細については、https://github.com/Zulko/ddeint?utm_source=chatgpt.com を参照されたい。

6.1 数値近似 — インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリット法

この近似方程式を有限差分法で近似する際の難しさは、離散的な時刻における関数の数値と、それらを決定する関数を同時に計算しなければならない点にある。この計算の収束性と誤差については、すでに理論的な議論を行った。

まず計算アルゴリズムについて考える。このアルゴリズムの基本的なアイデアは、レゾルベント (resolvent) を用いた半群 (semigroup) の生成を考えることにある。

6.1.1 自律系の場合

自律系において、時間刻み幅を h とすると、インプリシット・オイラー法は Hansen ら [19] を参考に計算すると以下のように表される。

$A+B$ (または $A(t)+B$) のレゾルベント存在証明 (補題 3.1) で示したのと同様にして、任意の $(u_n, \rho_n) \in \mathcal{E}$ に対して、次を満たすような $(u_{n-1}, \rho_{n-1}) \in D(B)$ が存在する：

$$(I - h(A+B)) \begin{pmatrix} u_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ \rho_{n-1} \end{pmatrix}$$

この式を順を追って計算する。

$$\begin{aligned} (1 - ha)u_n &= u_{n-1} + hb\Phi\rho_n(\sigma), \\ \rho_n - h\frac{d}{d\sigma}\rho_n &= \rho_{n-1}. \end{aligned} \quad (49)$$

式 (49) の下側の式を σ に関して解くには、条件 $\rho_n(0) = u_n$ を用いて以下を得る：

$$\rho_n(\sigma) = e^{\sigma/h}u_n + \int_{\sigma}^0 \frac{1}{h}e^{(\sigma-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds, \quad (50)$$

式 (50) の両辺に作用素 Φ を作用させることで、

$$\rho_n(\tau) = e^{\tau/h}u_n + \int_{\tau}^0 \frac{1}{h}e^{(\tau-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds. \quad (51)$$

を得る。次に、式 (49) の上側の式と式 (51) を組み合わせることで、

$$(1 - ha)u_n = u_{n-1} + hb \left(e^{\tau/h}u_n + \int_{\tau}^0 \frac{1}{h}e^{(\tau-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds \right) \quad (52)$$

を得る。この式から、 u_{n-1} を用いて u_n を次のように求められる：

$$\begin{aligned} (1 - ha - hbe^{\tau/h})u_n &= u_{n-1} + b \int_{\tau}^0 e^{(\tau-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds \\ u_n &= \frac{1}{(1 - ha - hbe^{\tau/h})}u_{n-1} + \frac{b}{(1 - ha - hbe^{\tau/h})} \int_{\tau}^0 e^{(\tau-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds \end{aligned}$$

6.1.2 非自律系の場合

非自律系の場合について考える。時間刻み幅を h とし、非自律なインプリシット・オイラー法における u_n を求める。Hansen ら [19] によって提案された非自律系に関する考え方を拡張すると、次の微分方程式系として表現できる：

$$\begin{aligned} (1 - ha(nh))u_n &= u_{n-1} + hb\Phi\rho_n(\sigma) \\ \rho_n - h\frac{d}{d\sigma}\rho_n &= \rho_{n-1}. \end{aligned} \quad (53)$$

この形式により、システム内の各量の関係が明確になる。式 (53) の下側の式を σ に関して、条件 $\rho_n(0) = u_n$ を用いて解くと、

$$\rho_n(\sigma) = e^{\sigma/h}u_n + \int_{\sigma}^0 \frac{1}{h}e^{(\sigma-s)/h}\rho_{n-1}(s)ds \quad (54)$$

を得る。

作用素 Φ を式 (54) の両辺に作用させると、

$$\rho_n(\tau) = e^{\tau/h} u_n + \int_0^0 \tau \frac{1}{h} e^{(\tau-s)/h} \rho_{n-1}(s) ds \quad (55)$$

を得る。

次に、式 (53) の上側の式と式 (55) を組み合わせて、次の方程式を導く：

$$(1 - ha(nh))u_n = u_{n-1} + hb \left(e^{\tau/h} u_n + \int_0^0 \tau \frac{1}{h} e^{(\tau-s)/h} \rho_{n-1}(s) ds \right). \quad (56)$$

この式から、 u_n を u_{n-1} に関して明示的に表現すると：

$$\left(1 - ha(nh) - hbe^{\tau/h} \right) u_n = u_{n-1} + b \int_0^0 \tau e^{(\tau-s)/h} \rho_{n-1}(s) ds \quad (57)$$

となる。

最終的に、 u_n について整理すると以下を得る：

$$u_n = \frac{1}{(1 - ha(nh) - hbe^{\tau/h})} \left(u_{n-1} + b \int_0^0 \tau e^{(\tau-s)/h} \rho_{n-1}(s) ds \right). \quad (58)$$

6.2 The Sequential Operator Splitting

本論文では逐次的 (sequential) なオペレーター・スプリッティング法に着目する。ただし、この方法においては、作用素 $A(t)$ と B が可換でないため

$$(I - hA(nh))^{-1}(I - hB)^{-1}, \quad (I - hB)^{-1}(I - hA(nh))^{-1}$$

を計算する際に、順番を入れ替えることができない（これは自律系の場合でも同様である）。この非可換性により、順序を変えると結果が異なる。この問題に対応する有名な手法に、Strang-Marchuk オペレーター・スプリッティング法 (Strang-Marchuk Operator Splitting) がある。また、J. Geiser 等によって提唱されている反復オペレーター・スプリッティング法 (iterative Operator Splitting) と呼ばれる別の方法もあるが ([12, 13, 14] などを参照)、本稿ではこれについては扱わない。本論文では、作用素 $I - h(A(t) + B)^{-1}$ を $(I - hA(nh))^{-1}(I - hB)^{-1}$ の順序で積に分解する。インプリシット・オイラー法と同様に、オペレーター・スプリッティング法によるスキームを、時間刻み幅 h で以下のように定義する。

自律系の場合 Hansen らの論文 [19] で確立された方法を用いて、次式を得る：

$$\begin{pmatrix} v_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = (I - hA)^{-1}(I - hB)^{-1} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

このスキームは以下の2段階で逐次的に解かれる：

$$\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = (I - hB)^{-1} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = (I - hA)^{-1} \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

式 (60) の1つ目の式はインプリシット・オイラー法と同様に解けて、

$$\psi_{n-1}(\sigma) = e^{\sigma/h} v_{n-1} + \int_0^\sigma \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \quad (61)$$

を得る。ここで $\psi_{n-1}(0) = v_{n-1}$ を用いた。この式の両辺に作用素 Φ を作用させることで、

$$\psi_{n-1}(\tau) = e^{\tau/h} v_{n-1} + \int_0^\tau \frac{1}{h} e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \quad (62)$$

および、

$$w_{n-1} = hb\psi_{n-1}(\tau) + v_{n-1} \quad (63)$$

を導く。式 (62) と式 (63) から $\psi_{n-1}(\tau)$ を消去すると、

$$v_{n-1} = w_{n-1} - hb \left(e^{\tau/h} w_{n-1} + \int_\tau^0 \frac{1}{h} e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right) \quad (64)$$

を得る。この方程式を w_{n-1} について解くと、

$$w_{n-1} = \frac{1}{1 - hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_\tau^0 e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right) \quad (65)$$

となる。最終的に、 $(v_{n-1}; \phi_{n-1}(\sigma))$ から $(v_n; \phi_n(\sigma))$ への変換は次のように得られる：

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{1 - ha} w_{n-1} = \frac{1}{1 - ha} \cdot \frac{1}{1 - hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_\tau^0 e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right), \\ \phi_n(\sigma) &= \psi_{n-1}(\sigma) \\ &= e^{\sigma/h} w_{n-1} + \int_0^\sigma \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \\ &= e^{\sigma/h} \frac{1}{1 - hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_\tau^0 e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right) + \int_0^\sigma \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds. \end{aligned} \quad (66)$$

非自律系の場合 Hansen ら [19] が用いた方法を非自律系に拡張すると、次の式を得る：

$$\begin{pmatrix} v_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = (I - hA(nh))^{-1} (I - hB)^{-1} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{history}(0) \\ \text{history}(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (67)$$

この場合も 2 段階に分けて逐次的に解かれる：

$$\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = (I - hB)^{-1} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = (I - hA(nh))^{-1} \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

自律系の場合と同様に、式 (68) の 1 つ目の方程式は、インプリシット・オイラー法に類似した方法で解ける：

$$\psi_{n-1}(\sigma) = e^{\sigma/h} v_{n-1} + \int_0^\sigma \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \quad (69)$$

ここで再び $\psi_{n-1}(0) = v_{n-1}$ と置く。この式の両辺に作用素 Φ を作用させると、

$$\psi_{n-1}(\tau) = e^{\tau/h} v_{n-1} + \int_0^\tau \frac{1}{h} e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \quad (70)$$

さらに、

$$w_{n-1} = \frac{1}{1 - hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_\tau^0 e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right). \quad (71)$$

を得る。

式 (69), (70), (71) を用いると、 $(v_{n-1}, \phi_{n-1}(\sigma))$ から $(v_n, \phi_n(\sigma))$ への遷移を以下のように表現できる：

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{1-ha(nh)} w_{n-1} = \frac{1}{1-han h} \cdot \frac{1}{1-hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_{\tau}^0 e^{(\tau-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right) \\
\phi_n(\sigma) &= \psi_{n-1}(\sigma) \\
&= e^{\sigma/h} w_{n-1} + \int_0^{\sigma} \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \\
&= e^{\sigma/h} \frac{1}{1-hbe^{\tau/h}} \left(v_{n-1} + b \int_{\tau}^0 e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds \right) + \int_0^{\sigma} \frac{1}{h} e^{(\sigma-s)/h} \phi_{n-1}(s) ds.
\end{aligned} \tag{72}$$

このアルゴリズムの重要な部分は積分計算であり、注意が必要である。積分の数値計算アルゴリズムの概要は以下の通りである。

この論文で用いる初期関数 $\phi_0(t)$ は、K. Ohira and T. Ohira [23] の理論から導かれた 10 次の多項式である：

$$\begin{aligned}
\phi_0(t) &:= 0.1481517960987306 - 0.007653167051066314 * t \\
&\quad - 0.01579807805182748 * t^2 - 0.0014508765845303562 * t^3 \\
&\quad + 0.0000350033072326764 * t^4 - 0.00010979645251983746 * t^5 \\
&\quad - 0.00003898004344359906 * t^6 - 5.167003822331118e - 6 * t^7 \\
&\quad - 3.137425140668615e - 7 * t^8 - 6.889058172875103e - 9 * t^9 \\
&\quad + 3.764707108941355e - 11 * t^{10}
\end{aligned} \tag{73}$$

以降、この多項式を「polyFunc(t)」と呼ぶ。

オペレーター・スプリットティング法では、区間 $[\tau, 0]$ を numPoints 個に分割し、台形公式を用いて数値積分を行う。numPoints を 500 と設定し、 $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{\text{numPoints}}$ とする。このアルゴリズムの中心となる積分は以下のものである：

$$\begin{aligned}
\theta_j[0] &= \int_{\tau_0}^0 e^{(\tau_0-s)/h} \phi_{j-1}(s) ds, \\
\theta_j[1] &= \int_{\tau_1}^0 e^{(\tau_1-s)/h} \phi_{j-1}(s) ds, \\
&\dots \\
\theta_j[\text{numPoints}] &= \int_{\tau_m}^0 e^{(\tau_{\text{numPoints}}-s)/h} \phi_{j-1}(s) ds
\end{aligned} \tag{74}$$

この方法では grid point の増加に従い積分区間が狭くなっていくことに注意する。

具体的な計算式（インプリシット・オイラー法およびオペレーター・スプリットティング法）については、すでに上述したとおりである。

6.3 いくつかの例と考察

6.3.1 自律系の場合

解が指数関数的に発散する場合の考察 図 1 は、解が指数関数的に発散する例を示している。この図からは、解のノルムが時間経過とともに指数関数的に増大しているかどうかは明確に分からないため、 $|u(t)|$ そのものではなく、 $\log |u(t)|$ を評価する。もし解が理論的な指数関数的 growth を示す場合、

$$\log \|u(t)\| \approx \log M + \omega t$$

という関係が成立するはずである。このことを示したのが図3（左側）である。この図から、

$$\log \|u(t)\| \leq \log M + \omega t$$

という関係が確認できる。ここで、 $\log M = -2.39$ および $\omega = 0.032$ である。図3の右側は、 $|u(t)|/Me^{\omega t}$ の相対誤差を示している。この図から、 $|u(t)|$ はほぼ $Me^{\omega t}$ に等しいこと、すなわち

$$\frac{|u(t) - Me^{\omega t}|}{Me^{\omega t}} = 1$$

であることが分かる。

図2は真の誤差（true error）を示している。これは最初の数ステップを除いて常に1になっていることを意味する。言い換えると、初期のいくつかの時刻を除き、 $|u(t) - Me^{\omega t}|$ は常に $Me^{\omega t}$ に等しくなっている。これは、 $u(t)$ がほぼ $Me^{\omega t}$ のように振る舞っていることを示している。この結果は、宮寺摂動定理（Miyadera's theorem）を用いて理論的に導かれた近似解の growth bound と整合している。

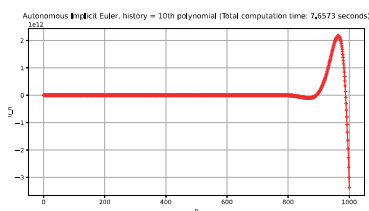


図 1: Solution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-8.0; history=polyFunc(t)"

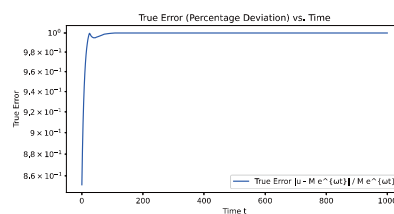


図 2: True Error: $(\|u(t)\| - Me^{\omega t})/Me^{\omega t}$, "a=-10.0; b=-6.0; tau=-8.0; history = polyFunc(t)".

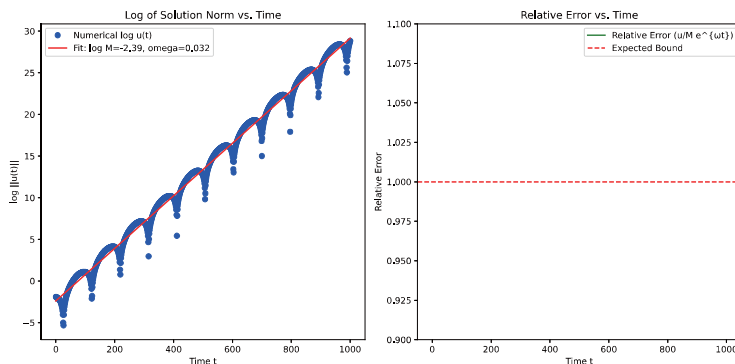


図 3: (left) $\log \|u(t)\|$ vs. t , (right) Relative Error: $\|u(t)\|/Me^{\omega t}$, "a=-10.0; b=-6.0; tau=-8.0; history = polyFunc(t)"

解が漸近的に 0 へ収束する場合 次の例は安定な場合である。図4は、Python の「ddeint」ソルバーを用いて得られた DDE の解を示している。この例で用いたパラメータは、 $a = -0.15$; $b = -6.0$; $\tau = -0.257$ であり、履歴関数としては式 (73) で定義した polyFunc(t) を使用した。この場合、解 $u(t)$ は 0 へ収束する。

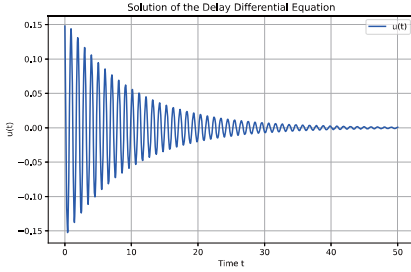


図 4: Solution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.257; history=polyFunc(t)"

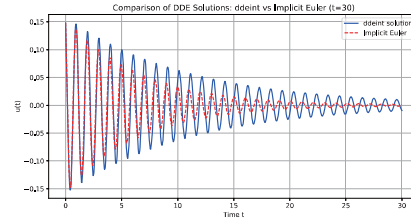


図 5: 'ddeint' vs. Implicit Euler, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.0275; history = polyFunc(t)". Blue = ddeint, Red = Implicit Euler

図 5 は、Python の組み込み関数「ddeint」で得られた DDE の解と、インプリシット・オイラー法を用いて得られた近似解 ($h = 0.01$) を重ねて表示したものである。また、図 6 は、同じ DDE に対してインプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法で得られた解を同一条件下で重ね合わせたものである。

図 7 を見ると、誤差は時間とともに一旦増大するがゼロに収束していくことがわかる。理論的には、命題 (4.1) が示すように、インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法の誤差の上界は

$$htC = O(th)$$

という線形的な成長である。しかし実際の数値結果を見ると、この誤差は線形に増加するのではなく、むしろ指数関数的に減少している。これは作用素 $A + B$ が dissipative であることに起因している可能性がある。dissipativity についてはこの後で考察する。これらの結果は理論的に得られた誤差の評価と矛盾するものではない。

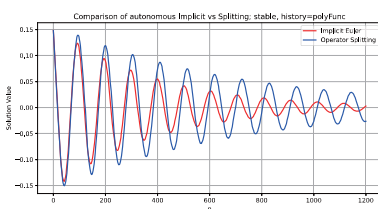


図 6: Implicit Euler vs. Operator Splitting, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.257; Blue=Operator Splitting, Red=Implicit Euler; history=polyFunc(t)"

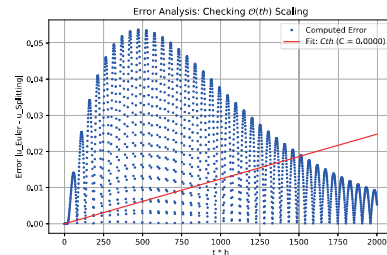


図 7: The error between the Implicit Euler and the Operator Splitting, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.0275; history = polyFunc(t)"

6.3.2 境界条件 $u(0) = \rho(0)$ を課した場合のスペクトル解析

境界条件を与えられた作用素 $A + B$ の固有値 λ は、次の超越方程式 (transcendental equation) の解として得られる：

$$\lambda - a + be^{\lambda\tau} = 0. \quad (75)$$

この方程式によって固有値は制限され、この超越方程式の孤立した解としてのみ得られる。一般に、この特性方程式は複素平面上で無限個の離散的な固有値を持ち、それらは無限遠方へ向けて集積することが知られている。そのため、スペクトルは純粋に離散的（点スペクトル： $\sigma_{\text{point}}(A+B)$ ）となり、上記の超越方程式で定義される固有値だけで構成されることになる。一方で、本問題の境界条件により本質的スペクトル（essential spectrum）：

$$\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \sigma \setminus \sigma_{\text{point}}(A+B)$$

は空集合となるため、この問題は離散的な固有値を持つ境界値問題へと変換される。

6.3.3 Dissipativity and the Spectrum of $A+B$

一般には、スペクトルは

$$\sigma(A+B) = \sigma_{\text{ess}}(A+B) \cup \sigma_{\text{point}}(A+B)$$

という関係を満たすが、これらは必ずしも互いに素（disjoint）であるとは限らない。点スペクトル（point spectrum）が本質的スペクトル（essential spectrum）に埋め込まれたり、または本質的スペクトルへと集積したりする場合もある。

しかし、本研究で設定した境界条件 $u(0) = \rho(0)$ の場合、すでに述べた通り本質的スペクトルが空集合 $\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \emptyset$ となるため、

$$\sigma(A+B) = \sigma_{\text{point}}(A+B)$$

となる。

超越方程式 (75) が明示的に点スペクトルを与えている。また、この場合すべての固有値（点スペクトル）が $\text{Re}(\lambda) < 0$ を満たすことが分かる。さらに、本質的スペクトルが空であることから、作用素の dissipativity（dissipativity）の条件は固有値に関する条件のみに簡略化される。

つまり、数値的な dissipativity の確認は非常に明確である：すべての固有値が厳密に複素平面の左半面に位置する場合、その作用素は dissipative である。

本研究で示したように、0 へと収束する安定解のスペクトルを計算すると、すべての固有値が複素平面の左半面に厳密に存在することが確認される。したがって、この場合、作用素 $A+B$ は dissipative であると結論できる。一方で、不安定解に対しては固有値の一部が複素平面の右半面に存在するため、この場合は作用素 $A+B$ が dissipative でないことが明らかになる。

ここで、不安定モデル ($a = -0.15, b = -6.0, \tau = -8.0$) と安定モデル ($a = -0.15, b = -6.0, \tau = -0.257$) の違いについて検討するために、それぞれのモデルにおけるスペクトル分布を調べる。

図 8 は安定な場合のスペクトル分布を示しており、図 9 は不安定な場合のスペクトル分布を示している。両者の決定的な違いは、安定なモデルの場合には全てのスペクトルが $\text{Re}(\lambda) < 0$ を満たしているのに対し、不安定モデルの場合には少なくとも一部のスペクトルが $\text{Re}(\lambda) > 0$ を満たしているという点である。

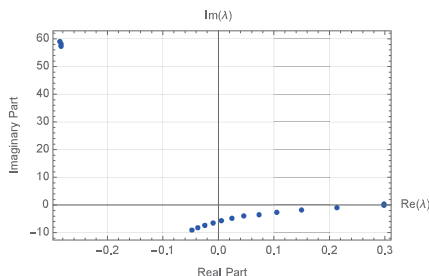
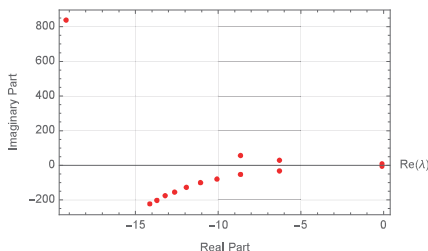


図 8: Scattering Plot of the Spectra, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.257; history=polyFunc(t)"

図 9: Scattering Plot of the Spectra, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-8.0; history=polyFunc(t)"

図8のケースにおける作用素 $A+B$ は消散的 (dissipative) であるが、図9のケースでは消散的ではない。

超越方程式 (75) を解くことで、安定解と不安定解の臨界点 (critical points) を特定する。このために、固有値を実部と虚部に分離して、 $\lambda = \mu + i\omega$ と書き、方程式 (75) を実部と虚部に分解した次の式を考える：

$$\mu - a = be^{\mu\tau} \cos(\omega\tau), \quad \omega = -be^{\mu\tau} \sin(\omega\tau). \quad (76)$$

このとき、 $\mu = \text{Re}(\lambda) < 0$ かつ $\omega \neq 0$ を満たすような遅延 τ を探す。遅延項 τ がシステムを不安定化する可能性がある。もし $a < 0$ であり、かつ $|b|$ が十分大きくない場合、 τ が小さい間はシステムは安定のままである。しかし、 $a < 0$ が減少していくにつれて、振動解 ($\omega \neq 0$) が発生し、不安定性が現れることがある。

このような不安定性が始まる臨界遅延 τ_c をを見つけるためには、 $\mu = 0$ (限界安定性、marginal stability) として設定し、残された方程式を数値的に解いて ω と τ_c を求める。実際にパラメータ $a = -0.15, b = -6.0$ を用いて計算した結果、 $\tau = -0.257$ が不安定性が始まる臨界遅延 τ_c であることを確認した。

例えば、前述した条件で a と b の値を固定した場合を考える。遅延を $\tau = -3.0$ と設定すると、解は不安定になる。一方で、同じ a と b の条件下で遅延を $\tau = -2.0$ に設定すると解は安定になる。この様子を示したものが、図11 (不安定解) と図12 (安定解) である。

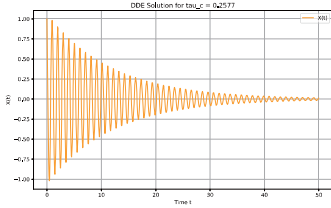


図 10: Python 'ddeint' Numerical Solution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.257; history=cos(t)"

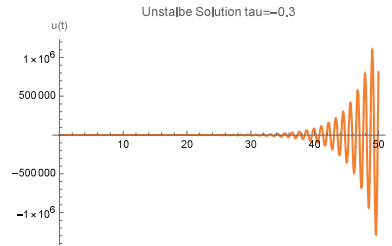


図 11: Unstable Solution of autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.30; history=cos(t)"

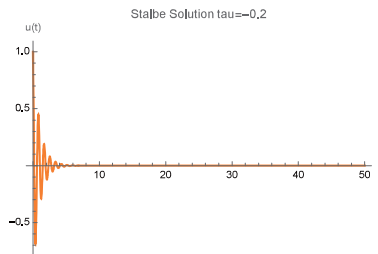


図 12: Stable Solution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.2; history = cos(t)"

ここで、遅延微分方程式 (DDE) の安定解と不安定解に対するスペクトル分布を確認する。安定解に対するスペクトルはすべて負の実部を持つものに対し、不安定解に対するスペクトルには正の実部を持つものが含まれることが分かる。図8は数値的に安定なスペクトルを示しており、図9は不安定解のスペクトルを示している。

また、図13と図14は、それぞれパラメータ $a = -0.15, b = -6.0, \tau = -0.30$ と $a = -0.15, b = -6.0, \tau = -0.2$ の場合の DDE のスペクトル分布を示している。これらの図から明らかなように、解が不安定となる場合の

点スペクトルは $\text{Re}(\lambda) > 0$ となるスペクトルを含み、解が安定な場合にはすべての点スペクトルが $\text{Re}(\lambda) < 0$ を満たしている。

スペクトルおよび解の安定性に関するさらに詳しい情報については、E. Hairer および G. Wanner [16] を参照されたい。

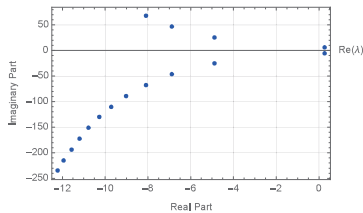


図 13: Spectral Distribution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.30; history = cos(t)"

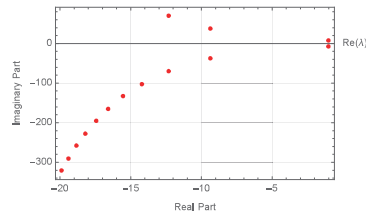


図 14: Spectral Distribution of the autonomous DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-0.20; history = cos(t)"

6.4 非自律系の場合

6.4.1 K. Ohira and T. Ohira [23] および K. Ohira [22] の原理

一般に、非自律遅延微分方程式 (DDE) の厳密な解析解を明示的に得ることはできない。K. Ohira and T. Ohira [23] および K. Ohira [22] は、解析的に解けない DDE に対して、高精度な半数値的解法（以降、ここではこれを厳密解と呼ぶ）を提供する手法を提案している。以下の DDE を考える：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= au(t) + bu(t + \tau), \quad \text{for } t \geq 0, \\ u(t) &= \text{history}(t) \text{ for } \tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (77)$$

指定された履歴関数を持つ DDE に対して一般には厳密解を得ることは難しいが、K. Ohira-T. Ohira の方法ではフーリエ変換を用いて高精度な半数値的解を導出できる。

この方法は、実数全体で定義された DDE の解を見つけることに基づく。まず履歴関数を未定義とし、DDE に対してフーリエ変換を適用する。その後、数値的に逆変換を行う。この方法の重要なアイデアは、得られた関数の特定の部分を抽出して、それを履歴関数として再定義すると、その部分はまさに元の DDE の厳密解に対応するという点である。

まず、DDE をフーリエ変換すると、次のような解が得られる：

$$\hat{u}(\omega) = C \exp \left[\frac{1}{2a} \omega^2 + \frac{b}{\tau a} e^{i\omega\tau} \right], \quad (78)$$

ここで、 C は 1 に設定された定数である。

$u(t)$ を求めるには、まずこの式に $e^{i\omega t}$ を掛け、 ω に関して積分を行う。ただし、積分の前に次のように式を簡略化できる：

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left(\frac{\omega^2}{2a} + \frac{b \cos(\omega\tau)}{a\tau} \right) \cos \left(\frac{b}{a\tau} \sin(\omega\tau) + \omega t \right). \quad (79)$$

K. Ohira-T. Ohira [23] と K. Ohira [22] は、この方法によって得られる解が方程式 (77) に対して唯一の解であることを示している。

本論文では、K. Ohira-T. Ohira および K. Ohira の結果を基準として、オペレーター・スプリットティング法とインプリシット・オイラー法の精度を評価する。特にパラメータの値を $a = -0.15$, $b = -6.0$, $\tau = -8.0$ と設定する。

K. Ohira-T. Ohira と K. Ohira の方法で得られた厳密解は、図 15 に示されている。

ここで得られた厳密解と、それに対応するインプリシット・オイラー法およびオペレーター・スプリッティング法の近似解を比較した結果を示す。パラメータは $a = -0.15$, $b = -6.0$, $\tau = -8.0$ である。図 16 はこの履歴関数 (K. Ohira-T. Ohira と K. Ohira の方法で得られた厳密解の $[\tau, 0]$ 部分を 10 次関数で近似した関数) を示している。

K. Ohira-T. Ohira [23] および K. Ohira [22] によると、もし K. Ohira-T. Ohira の方法で得られた関数のある部分を抽出して履歴関数として再定義すると、この再定義された履歴関数を用いた DDE の解は、Ohira らによって生成された元の関数と一致する。この原理に基づき、履歴関数を 10 次の多項式としてフィッティングし、K. Ohira-T. Ohira の関数を区間 $[\tau, 0]$ 上で数値的に近似したものが式 (73) である。

図 17 は、ステップサイズを $h = 0.1$ としたインプリシット・オイラー法による近似解を示している。図 18 では、厳密解とインプリシット・オイラー法の近似解を比較している。この比較により、インプリシット・オイラー法が厳密解を良好に近似していることが示されている。

また、図 19 では、同じステップサイズでインプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法による解を比較している。図 20 では、インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法の解の誤差を示している。

この図から、インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法の差は最初のうちは増加するが、その後時間とともに減少し、ガウス分布に似た形状となることが分かる。理論的には $O(hT^2)$ の差があるが、数値計算では時間とともに 0 へ収束していく。この結果は理論的な評価と矛盾するものではない。

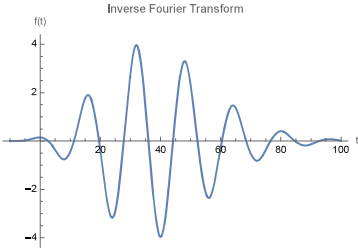


図 15: K. Ohira-T. Ohira's Accurate Semi-Numerical Solution for $a = -0.15$, $b = -6.0$, $\tau = -8.0$

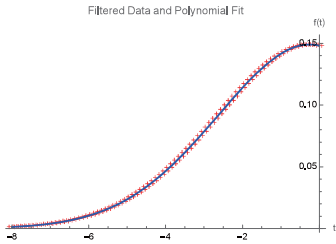


図 16: The history segment of the DDE, 10th order polynomial approximation.

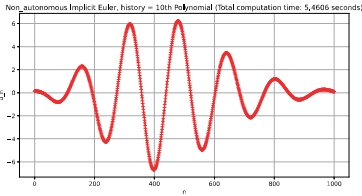


図 17: Implicit Euler Approximate Solution of the DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-8.0; h=0.1."

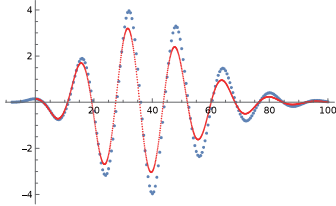


図 18: Comparison of The Numerical Exact Solution and The Implicit Euler Approximate Solution: Red is Implicit Euler Solution, Blue-dot is Exact Solution.

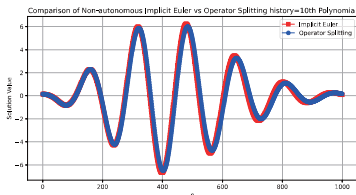


図 19: The Operator Splitting Approximate Solution of the DDE, "a=-0.15; b=-6.0; tau=-8.0; h=0.1": Red is Implicit Euler, Blue is Operator Splitting.

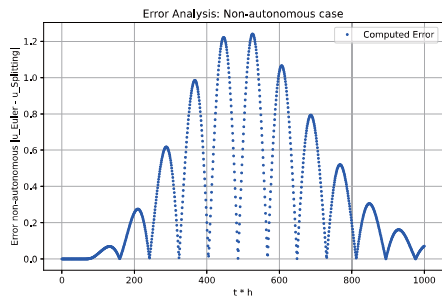


図 20: Error between Non-autonomous Implicit Euler and the Operator Splitting

7 オペレーター・スプリッティング法の有効性

インプリシット・オイラー法およびオペレーター・スプリッティング法の有効性を評価するためには、以下の4つの基準を考慮する必要がある。これらの基準は、Y. Cheng and J. Wang et al. [6]、András Bátkai and Petra Csomós and Bálint Farkas [1]、Su Zhao and Jeremy Ovadia and Xinfeng Liu and Yong-Tao Zhang and Qing Nie [29]、D. H. Peterseim and I. Zander [25]、E. B. Davies [7]、E. Hairer and G. Wanner [16]などで示されている。

- (i) 精度 (Accuracy) : 方法が厳密解をどの程度良好に近似するか。
- (ii) 効率性 (Efficiency) : 作用素を評価する際に必要な計算コスト。
- (iii) 安定性 (Stability) : 硬い系 (stiff systems) または消散的 (dissipative) な力学系を処理する能力。
- (iv) 収束性 (Convergence) : 長時間経過後の挙動および誤差の時間に対する増加の性質。

7.1 精度 (Accuracy)

自律系の場合: インプリシット・オイラー法およびオペレーター・スプリッティング法の両方とも、厳密解を精度良く近似する。これらの解の差は次の評価を満たす:

$$\|R_h - T_h\| \leq Ch\tau$$

これは時間について一次の精度を持つことを示している。

非自律系の場合: 非自律系でも同様に精度の高い近似が得られるが、誤差の上限はさらに改善される:

$$\|R_h - T_h\| \leq Ch\tau^2$$

時間が短い区間においては近似精度がより高く、時間が長くなると誤差は増えるが、依然として制御可能な範囲にある。これは非自律な発展方程式に対してはより高次の精度が得られることを示している。

7.2 安定性 (Stability)

自律系の場合： 安定性は宮寺摂動理論 (Miyadera perturbation theory) を用いて示される。どちらの方法も C_0 -半群を生成する：

$$\|T_{A+B}(t)\| \leq e^{\beta t}$$

非自律系の場合： 安定性は evolution family に対する Chernoff の近似定理を用いて検証される：

$$\|U(s, t)\| \leq e^{\beta(s-t)}$$

これにより、どちらの方法も硬い系 (stiff) や消散的力学系を強固に処理でき、指数関数的な安定性が保証されるため、硬い発展方程式に適していることがわかる。

7.3 収束性 (Convergence, 長期挙動)

自律系の場合： どちらの方法も同一の C_0 -半群へと強収束し、誤差は時間刻み幅 h に対して線形に減少する。

我々は宮寺摂動理論を通じて、インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリットング法の両方が厳密解に近づき、同一の半群生成作用素に収束することを示した。これは長期的な解の挙動が厳密な力学系に非常に近いことを意味する：

$$\|(I - h(A + B))^{-n} - e^{(A+B)t}\| \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0, nh \rightarrow t$$

非自律系の場合： 両方の方法は同じ evolution family に収束し、さらに良好な収束特性 ($\leq Ch t^2$) を持つ。これは非自律系問題に対する強収束性を裏付けている。

$$\|R_h - T_h\| \leq Ch t^2$$

この上界はインプリシット・オイラー法 (R_h) とオペレーター・スプリットング法 (T_h) の解の差が少なくとも ht^2 という速度で減少することを明示的に示している。

この誤差評価は直接的には厳密解に対する精度を測定しているわけではなく、2つの数値解法の間の差を評価したものである。

式に現れる t^2 の存在は、2つの方法の差が短期～中期の時間にわたって非常に効果的に抑えられ、時間が経過するにつれて差の累積が緩やかに増えることを意味する。これにより、オペレーター・スプリットング法がインプリシット・オイラー法と同等か、あるいは t が大きい場合にはむしろそれよりも良好な長期的整合性を持つ可能性があることが示唆されている。

オペレーター・スプリットング法とインプリシット・オイラー法は互いに非常に近い結果を示し、またインプリシット・オイラー法は既に Chernoff の定理を通じて厳密な evolution family への高精度な近似性が保証されていることから、オペレーター・スプリットング法も間接的に同様の高精度を備えていることになる。また、作用素を分解することで、オペレーター・スプリットング法は数値的に単純になり、1ステップごとの誤差蓄積が少なくなる可能性がある。そのため、この不等式は2つの方法を比較したものではあるが、オペレーター・スプリットング法がインプリシット・オイラー法よりも著しく悪い誤差を導入しないどころか、むしろ累積誤差の増加を抑える可能性が高いことを強く示唆している。

なお、本論文では硬さ (stiffness) の問題については深く踏み込まなかった。一般的に、オペレーター・スプリットング法はシステムの固有値の間に大きな差がある場合に不安定化することが知られているが、このトピックについてはここではそれ以上の詳細な検討を行わない。硬さに関するさらなる情報は、E. Hairer and G. Wanner [16]、ならびに E. Hairer, G. Wanner および C. Lubich [17] を参照されたい。

7.4 効率性 (Efficiency)

本節では、オペレーター・スプリット法とインプリシット・オイラー法の効率性について考察する。まず、両者の計算コストを比較する。比較は以下の組み合わせを中心に行う：「自律系 vs. 非自律系」、「オペレーター・スプリット法 vs. インプリシット・オイラー法」、「履歴関数が $\text{polyFunc}(t)$ vs. $\cos(t)$ 」。

履歴関数として $\text{polyFunc}(t)$ を選ぶ理由は、非自律系の場合において厳密解を明確に特定できるためであり、また履歴関数を変更した場合の計算効率も評価する必要があるからである。

評価は 16GB のメモリを搭載した M1 チップ MacBook Pro 2020 において、Python の「`time.time()`」を用いて行った。両手法とも同じアルゴリズムを用いている。他のタスクによるコンピュータのメモリ使用状況が計算時間に影響を与えるため、すべての計算は連続して行った。

自律系の場合 自律系では、次のようにパラメータを設定する：

$$h = 0.1, \quad a = -0.15, \quad b = -6.0, \quad \tau = -8.0. \tag{80}$$

履歴関数として $\text{polyFunc}(t)$ を用いた場合：

表 1: Execution Times Comparison, history function = $\text{polyFunc}(t)$ — Autonomous Case

Method	1000 Iteration Execution Time (seconds)
Operator Splitting	5.5305
Implicit Euler	5.6287

履歴関数として $\cos(t)$ を用いた場合：

表 2: Execution Times Comparison, history function = $\cos(t)$ — Autonomous Case

Method	1000 Iteration Execution Time (seconds)
Operator Splitting	5.5352
Implicit Euler	5.5614

非自律系の場合 非自律系の場合も、パラメータと履歴関数は自律系の場合と同じものを用いる。

履歴関数として $\text{polyFunc}(t)$ を用いた場合：

表 3: Execution Times Comparison, history function = $\text{polyFunc}(t)$ — Non-Autonomous Case

Method	1000 Iteration Execution Time (seconds)
Operator Splitting	5.5360
Implicit Euler	5.5732

履歴関数として $\cos(t)$ を用いた場合：

これらの結果を棒グラフで示したものが、図 21 と図 22 である。

表 4: Execution Times Comparison, history function = cos(t)— Non-Autonomous Case

Method	1000 Iteration Execution Time (seconds)
Operator Splitting	5.5292
Implicit Euler	5.6083

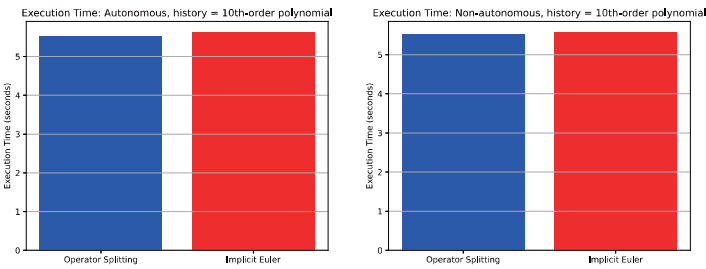


図 21: Execution Time Comparison: Operator Splitting vs. Implicit Euler, History = 10th order Polynomial. Left: Autonomous, Right: Non-Autonomous. Blue: Operator Splitting, Red: Implicit Euler

7.5 効率性に関する考察

このテスト結果から、自律系か非自律系か、また履歴関数にかかわらず、オペレーター・スプリッティング法がインプリシット・オイラー法に比べて計算コストが低いことが分かった。したがって、オペレーター・スプリッティング法はインプリシット・オイラー法より効率的である。

この効率性の理由として、自律系の場合、インプリシット・オイラー法では演算子 $(I - h(A + B))$ の逆行列を計算する必要があり、その計算コストは比較的高くなる。一方、オペレーター・スプリッティング法は次のように表される：

$$u_{n+1} = (I - hA)^{-1}(I - hB)^{-1}u_n.$$

もし $(I - hA)^{-1}$ が非常に疎（スパース）であれば、この計算は効率的に実行できる。

また、非自律系の場合では、インプリシット・オイラー法は各反復ごとに $(I - h(A(nh) + B))^{-1}$ を再計算する必要があり、計算コストが高くなりやすい。一方、オペレーター・スプリッティング法は、 $(I - hA(nh))^{-1}$ と $(I - hB)^{-1}$ をそれぞれ独立して計算することが可能であり、 $(I - hA(nh))^{-1}$ が非常に疎であるため、計算コストを低く抑えることができる。

履歴関数を変更した場合にも、インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリッティング法の計算コストの優劣が逆転するかどうかを確認した。この場合でも、自律系と非自律系の両方において、オペレーター・スプリッティング法の計算コストがインプリシット・オイラー法よりも低い結果が得られた。

以上より、理論的にはオペレーター・スプリッティング法が自律系・非自律系いずれにおいてもインプリシット・オイラー法よりも効率的であることが示された。

次に、同じ手法を用いて自律系と非自律系を計算した場合に、どちらのケースがより効率的かを考察する。以下の図 23 および図 24 を参照されたい。

これらの図からは、自律系と非自律系のどちらがより効率的かを断定することはできない。

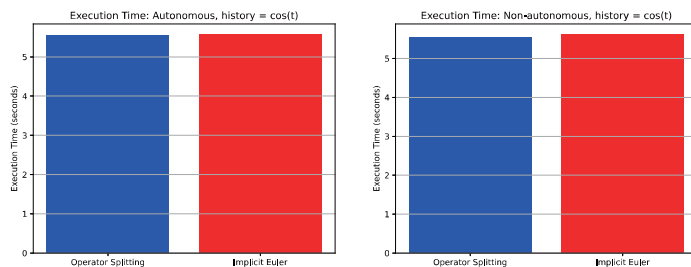


図 22: Execution Time Comparison: Operator Splitting vs. Implicit Euler, History = $\cos(t)$. Left: Autonomous, Right: Non-Autonomous. Blue: Operator Splitting, Red: Implicit Euler

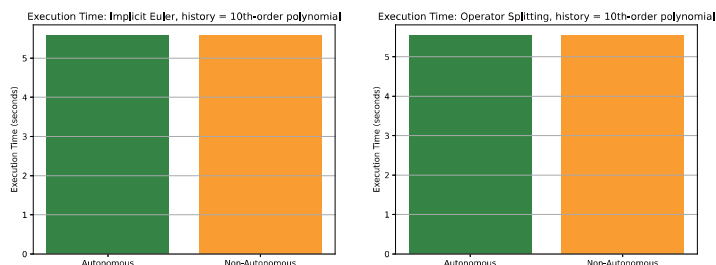


図 23: Execution Time Comparison: Autonomous vs. Non-autonomous, History = $\text{polyFunc}(t)$. Left: Using the Implicit Euler, Right: Using the Operator Splitting. Green: Autonomous, Yellow: Non-autonomous

7.6 インプリシット・オイラー法とオペレーター・スプリットティング法、どちらがより有効か？

上で述べたオペレーター・スプリットティング法の理論により、精度・安定性・収束性に関してはインプリシット・オイラー法と同等であることが示されている。

オペレーター・スプリットティング法は、反復構造がより単純で、計算処理が容易であるため、インプリシット・オイラー法よりも効率的である可能性がある。特に、非自律の遅延微分方程式（DDE）に対して効果的である。しかし、本論文における理論のおよび計算的検討から、少なくともオペレーター・スプリットティング法がインプリシット・オイラー法より劣るという結論は得られなかった。

8 まとめ

自律系の場合、Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターがインプリシット・オイラー作用素に対して $O(ht)$ の誤差で厳密解を近似することを証明した。また、宮寺摂動定理を用いて、この作用素が C_0 -半群を生成し、その成長評価が $e^{\beta t}$ であることも示した。

非自律系の場合には、時間依存の Lie-Trotter スプリットティング・オペレーターがインプリシット・オイラー作用素に対して $O(ht^2)$ の誤差で厳密解を近似することを証明した。さらに、Chernoff の定理を用いて、この作用素が evolution family を生成し、その growth bound が $e^{\beta(s-t)}$ であることを示した。

したがって、オペレーター・スプリットティング法の精度・安定性・収束性は、インプリシット・オイラー法と同等である。数値的検証においても、理論で期待された通りの結果がほぼ得られた。



図 24: Execution Time Comparison: Autonomous vs. Non-autonomous, History = $\cos(t)$. Left: Using the Implicit Euler, Right: Using the Operator Splitting Green: Autonomous, Yellow: Non-autonomous

また、オペレーター・スプリッティング法の計算コストは、自律系・非自律系、あるいは履歴関数の種類にかかわらず、インプリシット・オイラー法よりも低いことが確認された。これにより、オペレーター・スプリッティング法の効率性の優位性が示された。

謝辞

本研究を通じて多大なるご指導とご支援を賜りました名古屋大学多元数理科学研究科 大平徹教授に心より感謝申し上げます。また、青山学院大学の中田行彦先生、東北大学の西口純矢先生にも深く御礼申し上げます。さらに、静岡大学の申正善教授には、これまで変わらぬお励ましをいただき、厚く感謝申し上げます。

参考文献

[1] András Bátkai, Petra Csomós, and Bálint Farkas. Operator splitting for nonautonomous delay equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 65(3):315–324, 2013.

[2] András Bátkai, Petra Csomós, and Bálint Farkas. Operator splitting for dissipative delay equations. *Semigroup Forum*, 95:345–365, 2017.

[3] András Bátkai, Petra Csomós, Bálint Farkas, and Gregor Nickel. Operator splitting for non-autonomous evolution equations. *Journal of Functional Analysis*, 260(7):2163–2190, 2011.

[4] András Bátkai, Petra Csomós, and Gregor Nickel. Operator splittings and spatial approximations for evolution equations. *Journal of Evolution Equation*, pages 613–636, 2009.

[5] András Bátkai and Susanna Piazzera. *Semigroups for Delay Equations*. Research notes in mathematics (Boston Mass.) 10. A K Peters/CRC Press, 2005.

[6] Y. Cheng and J. Wang et al. Operator splitting methods for non-autonomous delay differential equations. *Mathematics of Computation*, 89(318):1407–1430, 2020.

[7] E. Brain Davies. *Linear Operators and their Spaces*. Cambridge University Press, 2007.

[8] K. J. Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, 1999.

- [9] Istvan Faragó and J Geiser. Iterative operator-splitting methods for linear problems. *International Journal of Computational Science and Engineering*, 3(Issue 4):255–263, 2007.
- [10] Istvan Faragó and Ágnes Havasi. On the convergence and local splitting error of different splitting schemes. *Progress in Computational Fluid Dynamics An International Journal*, 5(8):495–, 2005.
- [11] Istvan Faragó and Ágnes Havasi. Consistency analysis of operator splitting methods for c_0 -semigroups. *Semigroup Forum*, 74:125–139, 2007.
- [12] Jürgen Geiser. *Iterative Splitting Methods for Differential Equations*. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [13] Jürgen Geiser. Iterative operator-splitting methods with higher-order time discretizations for parabolic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 211(2):350–367, 2009.
- [14] Jürgen Geiser. *Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications*. CRC Press, 2011.
- [15] R. Glowinski, S. J. Osher, and W. Yin, editors. *Splitting Methods in Communication, Imaging, Science, and Engineering*. Springer, 2016.
- [16] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, 1996.
- [17] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, and Christian Lubich. *Geometric Numerical Integration - Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, 2006.
- [18] Eskil Hansen and Alexander Ostermann. Dimension splitting for evolution equations. *Numerische Mathematik*, 108:557–570, 2008.
- [19] Eskil Hansen and Tony Stillfjord. Implicit euler and lie splitting discretizations of nonlinear parabolic equations with delay. *BIT Numerical Mathematics*, 54(3):673–689, 2014.
- [20] Helge Holden, Kenneth H. Karlsen, Knut-Andreas Lie, and Nils Henrik Risebro. *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions*. European Mathematical Society, 2010.
- [21] Isao Miyadera. On perturbation theory for semi-groups for linear evolution equations. *Tohoku Math. J.*, 18:299–310, 1966.
- [22] Kenta Ohira. An exact solution for a non-autonomous delay differential equations. *arXiv:2411.11402*, 2025.
- [23] Kenta Ohira and Toru Ohira. Solving a delay differential equation through the fourier transform. *Physics Letters A*, 531:130138, 2025.
- [24] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1983.
- [25] D. H. Peterseim and I. Zander. Operator splitting for time dependent pdes: A new approach. *Journal of Computational Physics*, 334:260–287, 2017.
- [26] Morten Bjørhus. Operator splitting for abstract cauchy problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 18:419–443, 1998.
- [27] Kalyan B. Sinha and Sachi Srivastava. *Theory of Semigroups and Applications*. Springer, 2017.

- [28] J. Voigt. On the perturbation theory for strongly continuous semigroups. *Math. Ann.*, 229:163–171, 1977.
- [29] Su Zhaoa, Jeremy Ovadiaa, Xinfeng Liub, Yong-Tao Zhangc, and Qing Niea. Operator splitting implicit integration factor methods for stiff reaction–diffusion–advection systems. *Journal of Computational Physics*, 230:5996–6009, 2011.
- [30] Wenjie Zuo and Yongli Song. Stability and bifurcation analysis of a reaction–diffusion equation with spatio-temporal delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 243–261, 2015.