

KETpic による曲面描画と教育利用

木更津工業高等専門学校・基礎学系 金子 真隆 (Masataka Kaneko)
阿部 孝之 (Takayuki Abe)
関口 昌由 (Masayoshi Sekiguchi)
山下 哲 (Satoshi Yamashita)
Faculty of Fundamental Research,
Kisarazu National College of Technology
東邦大学・薬学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Pharmaceutical Science,
Toho University

1 はじめに

我々の開発した KETpic を用いると、 $\text{\TeX}$ 文書中に平面図形や 1 変数関数のグラフの正確な図を手軽に挿入することができる。

当初は、Maple や Mathematica に代表される数式処理ソフト (CAS) の能力をフルに利用できる環境を用意することで、数理科学の論文作成に寄与することが強く意識されていた。しかし、開発が進んでいく中で、「単色の線画を基本としていて大量印刷に向く」という KETpic の特性からすると、数理科学の教材作成に対して、より広い利用の可能性が広がっているのではないかということが意識されるようになってきた。実際、我々開発グループのメンバーは、KETpic を用いて作成された教材を実際の授業で使用してきている (8), (9))。

これまでは、右図の例にあるように、空間曲線を実際に見たままの形で正確に描いた上で、曲線の中で他の部分に隠されたところを除去して遠近感を与える (スケルトン画法) ことが可能な状態であったが (4))、曲面を描画出来ないことが教材作成ツールとしての利用にネックとなっていた。

最近になって KETpic による曲面描画が可能となった (5), (6))。この図からも想定される通り、決め手となるのは曲面の「稜線」をどう描くかであり、稜線上の点を射影の特異点と解釈することで KETpic に曲面の描画機能を装備することが出来た。この描画法をわれわれは「稜線画法」と呼んでいる。その理論的な根拠については文献 5) にゆず

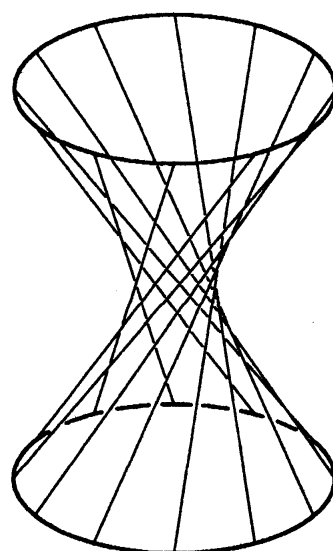


図 1 空間曲線の描画

り、本稿では、上記の進展によって KETpic の数理科学教育への利用を深化させる余地がどこにあるか述べたい。

2 KETpic とは

KETpic は CAS に付属するマクロパッケージであって、CAS の計算機能を生かしつつ、TeX 文書中に正確で美しい図を手軽に挿入するためのものである。現在、Maple、Mathematica、Scilab に対するパッケージがほぼ完成しており、Maxima に対するパッケージも近日中に完成版を公表する予定である。これらは

<http://www.kisarazu.ac.jp/~masa/math/>

より無料でダウンロード可能である。

下図に示された通り、KETpic を用いて TeX 文書中に図を挿入する際に、KETpic を用いるのは次の 2 つの作業においてである：

1. KETpic のコマンドを使い、描画したい図形のプロットデータを計算すること。
2. 得られたプロットデータを TeX 形式の図ファイルとして書き出すこと。

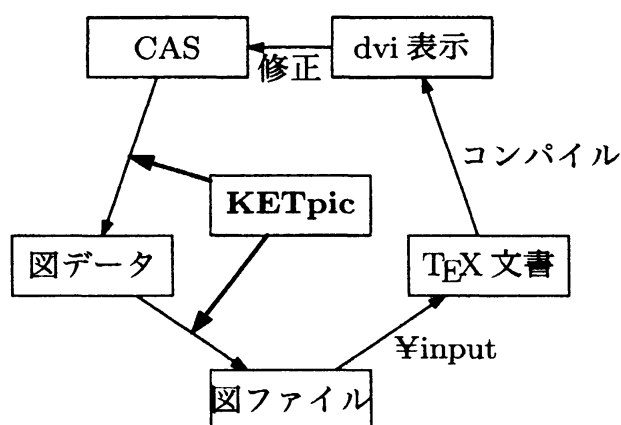


図 2 KETpic による描画プロセス

コンパイルした後の図を見ながら上図のサイクルを繰り返すことで、手軽に図の修正が可能となることが KETpic の利点の一つである。また、上記の 2 番目のプロセスが定型であるのに加え、後述の具体例に見られる通り、空間曲面の描画については 1 番目のプロセスも非常に簡単な構造になっているので、描画にかかる負担が非常に軽いのも魅力である。更に、描画用の図ファイルが TeX ファイルの形になっており、eps ファイルなどと比べて容量が小さいことも利点である。

3 KETpic による空間曲面の描画例

本節では、KETpic を用いて $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書中に描かれる空間曲面と、描画のための KETpic でのプログラムの例を紹介する。

ここでは 2 変数関数

$$z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

のグラフを取り上げる。Mathematica 版の KETpic でこれを描くためのプログラムは以下の通り非常にシンプルである。

```
fn1 = Function[{x, y}, Sin[Sqrt[x^2 + y^2]]];
fd1 = {fn1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}};
out1 = sfbdparadata[fd1];
out2 = projpara[out1];

openfile[workfolder, "fig.tex"];
beginpicture["1cm"];
drwline[out2];
endpicture[0];
closefile[];
```

プログラムの前半で 2 変数関数 fd1 を定義した後、“sfbdparadata” というコマンドを用いて境界線と稜線のデータを計算させている。これは 3 次元の点列データなので、最後に “projpara” というコマンドを用いて、視野平面上に平行投影する。

後半では、得られた 2 次元の点列データ “out2” を “fig.tex” という名前の $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ファイルとして workfolder 内に書き出させている。

実際に描かれた図は以下の通りである：

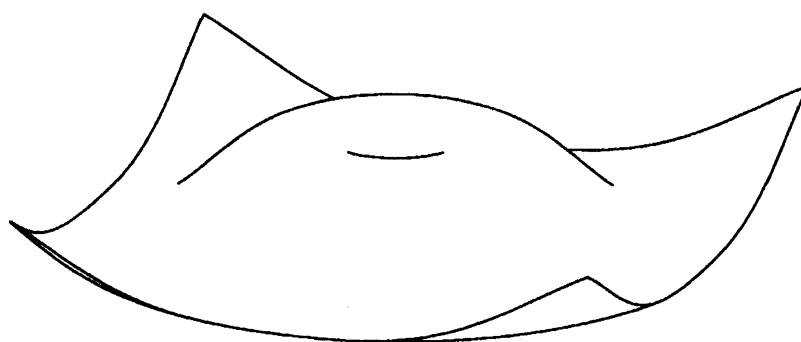


図 3 KETpic による曲面の描画例

CAS における空間曲面描画で一般的に用いられるワイアフレームの描きこみも、“wireparadata” というコマンドひとつで可能である：

```
out3 = wireparadata[out1, fd1, 5, 5];
out4 = projpara[out3];
```

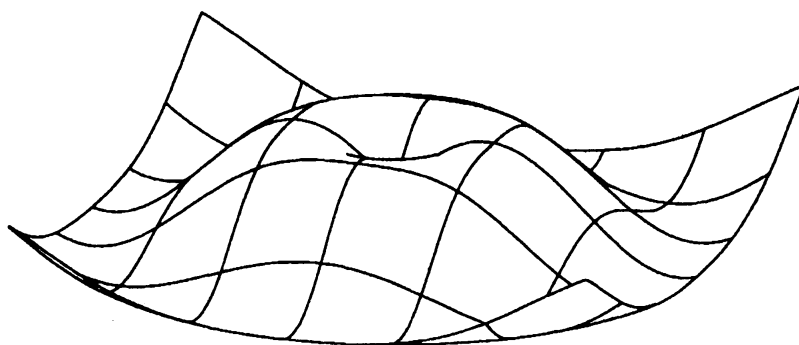


図4 ワイヤフレームの追加

4 CASによる空間曲面の描画

曲面を正確に分かりやすく描画するとなれば、CASの3次元グラフィックスを利用するのが最善であろう。画面要素ごとに、視点から曲面までの「深さ」と法線ベクトルを計算するので、KETpicによる描画などと比べて計算量はそれなりに大きくなるが、ディスプレイ上で色や明るさを活用し、曲面の正確な形を非常に見易くかつ美しく表現可能である。従って、教室でパソコンの画面を見せながら曲面の形状を説明するようなケースでは、CASを用いたデモンストレーションにかわる効果的な手段は望みづらい。

しかし、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書を含む白黒の(大量)印刷媒体上に描画しようとする、様子は変わってくる。正確さを重く見てCASを利用した画像を $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書中に挿入する場合、CASから直接出力させるかスキャナーで画像を取り込むかしてeps形式の画像ファイルを作成し、これを“includegraphics”コマンドで $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書に取り込む必要がある。図5は、前節と同じ曲

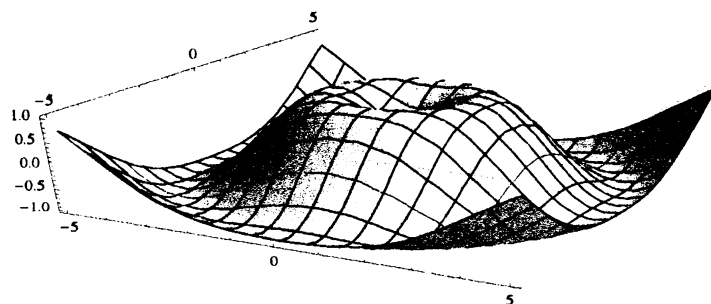


図5 CASによる曲面の描画例

面をMathematicaからの直接出力(Exportコマンドを使った)によって文書中に挿入したものだが、その魅力のかかなりの部分が失われてしまっていることが否めない。eps形式に直接出力が可能なMathematicaだからこそこまで元々のグラフィックスの質が保たれているが、直接出力機能を持たない一般のCASの場合には更に質が落ちることを覚悟しなくてはならない。

このように白黒の印刷媒体上に描画すると質が落ちてしまう理由はいくつかあげられるが、大きいのは次の2点だろう：

1. CASによる描画では、色彩・濃淡・光沢を用いて曲面の形状を表現するが、白黒の大量印刷媒体にのせるとそのような多くの情報が失われてしまうこと。
2. 境界線は明示的に描かれるが、稜線については画素ごとの描画の結果として判別できるのみであること。ディスプレイ上ではそれで問題ないものの、白黒印刷にすると稜線がはつきりしなくなる。

KETpicによる曲面描画は、このような欠点を補えることが次節で説明される。

5 稜線画法による空間曲面の描画

KETpicに装備された稜線画法による曲面描画では、「面画」を主体とするCASによる曲面描画と違い、曲面の境界線および稜線のプロットデータのみを計算し、傾斜や曲率等は計算しない。CASによる描画は、ワイヤフレームや影・光・色により、曲面の局所的な形（傾き・曲率）を表現しており、「微分幾何的な絵」ということができる。これに対し稜線画法では、（曲面の大域的な構造を定めるのに）必要最小限な曲線のみ描画しており、局所的な構造は捨象してしまっているので読み取れないが、その分大域的な構造が浮かび上がる結果となる。その意味で「線画」による「位相幾何的な絵」という位置づけが可能である。

更に、KETpicによる曲面描画では、スケルトン画法と同様に、境界線・稜線の中で、曲面の手前側により隠された部分を切り取っている。実際に実行しているのは隠線の除去なのであるが、必要最小限の曲線によって曲面を描いていることが幸いし、実質的に隠面処理をしているのと同等の効果が得られている。

第3節に挙げた例は形状が単純なので、KETpicによる描画のメリットがあまり感じられないかもしれない。しかし、曲面の形状が複雑になってくると、曲面の大域的な構造を把握しやすいKETpicによる曲面描画のメリットが生きてくる。たとえば、右の図6は2変数関数

$$z = \cos x \sin y + e^{-(x^2+y^2)/0.3}$$

のグラフであるが、使われている曲線の数が少ないので、局所的な形状をいろいろ描き加えるよりもかえって曲面の概形を把握しやすいであろう。

この曲面をMathematicaの3Dグラフィックスで描かせると、ディスプレイの画像からして既に第3節の曲面を描かせた場合と比べてやや見づらくなる。TeX文書中に挿入した図7を見るとなおさらである。このように見づらくなってしまうのは、Mathematicaの3Dグラフィックスにおいて、曲面の稜線が明示的にくっきり描かれないことが大きな原因であるのは明らかであろう。第3節の例のように形状が単純であれば、見る人の

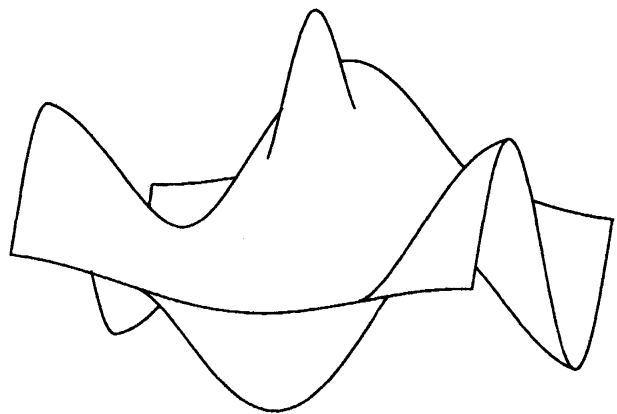


図6 複雑な関数のグラフ

側で稜線を補って見ることはできるが、ここでの例のように複雑な形状になると、曲面上につけられた濃淡によってそれが邪魔されるわけである。

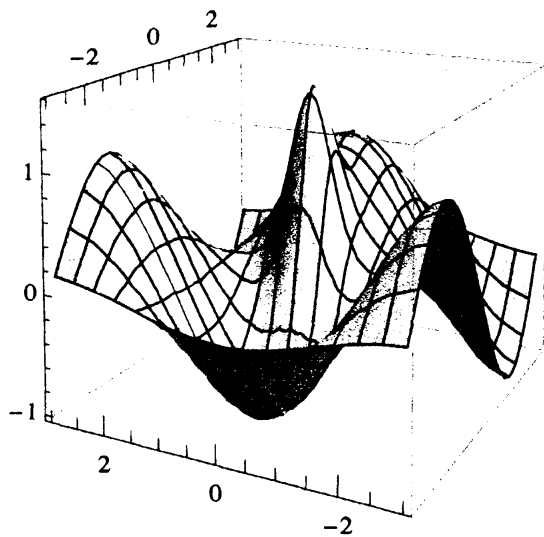


図7 CASによる曲面描画

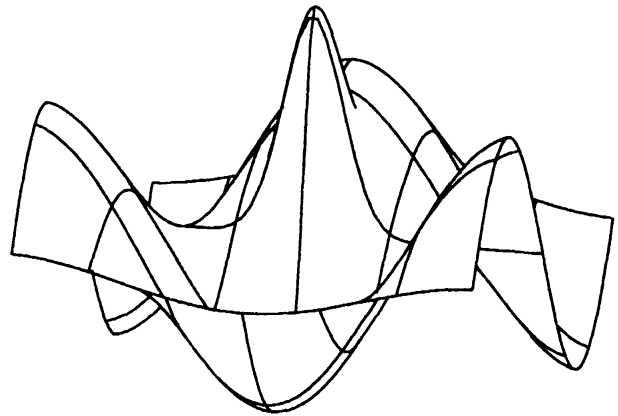


図8 KETpicによる曲面描画

実は稜線画法を用いる場合にも同様の問題がしばしば発生する。たとえば、図6に曲面の局所的な形状に関する情報を付加するためにワイヤフレームを描きこむと、図8のようになってしまっかえって見づらくなる。原因は、曲面の大域的な構造を表す境界線や稜線と、局所的な形状を現すワイヤフレームとが等価に描かれてしまうために、見る人がこれらの情報を得るのを互いに邪魔しあってしまうからである。

しかし、この問題の解消は比較的簡単である。下図のように、境界線と稜線の部分だけを太くして、ワイヤフレームとの区別を明確にすればよいのである。必要とされるのは、“drwline”というコマンドに線の太さを変える指示をひとつ付け加えるだけである：

```
drwline[out2,2];
drwline[out3];
```

このコマンドは、稜線・境界線“out2”の太さを2倍にする一方で、ワイヤフレーム“out3”の太さをデフォルトで描かせるものである。加えて、更に見易いようにワイヤの数も増やしてある。

KETpicには以上の他、曲面上の曲線や、曲面を曲面によって切断したものを描画する機能も装備されている。いずれも手続きは簡易である。ここでは一例として関数

$$z = 3\{1 - (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}\}$$

のグラフを取り上げる。

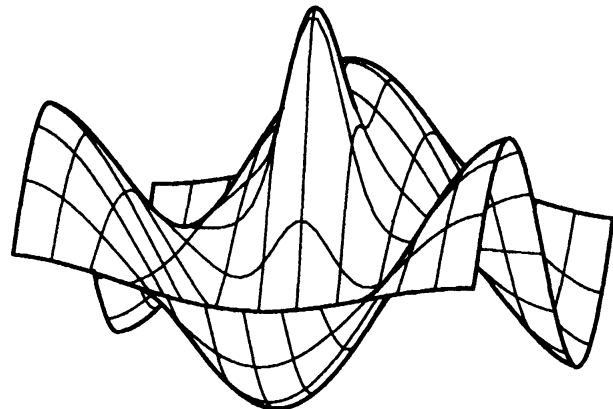


図9 線の太さの区別

まず曲線の描きこみについては、コマンド “crvonsfparadata” を用いて、例えば

```
fn1 = Function[{x, y}, 3*(1 - (2*x^2 + y^2)*Exp[-(x^2 + y^2)])];
fd1 = {fn1, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}};
out1 = sfbdparadata[fd1];
out2 = projpara[out1];
out3 = parametricplotdata[{0.4*Cos[t], 0.4*Sin[t]}, {t, 0, 2*Pi}];
out4 = crvonsfparadata[out3, out2, fd1];
out5 = projpara[out4];
```

という操作で図 10 を得る。“out3” で定義された平面曲線を “crvonsfparadata” によって曲面上に持ち上げ、隠線処理も含めて描いているわけである。

一方、曲面の切断については、コマンド “sfcutoffparadata” を用いて、例えば

```
out6 = sfcutoffparadata[fd1, x^2 + y^2 == 1, "-"];
out7 = projpara[out6];
```

という操作で図 11 を得る。これは “out1” で計算された曲面を円筒面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取った曲面を、“sfcutoffparadata” によって隠線処理も含めて描いている。最後についている符号 “-” は、切り取った後に円筒面の内側を残すことを指定している。

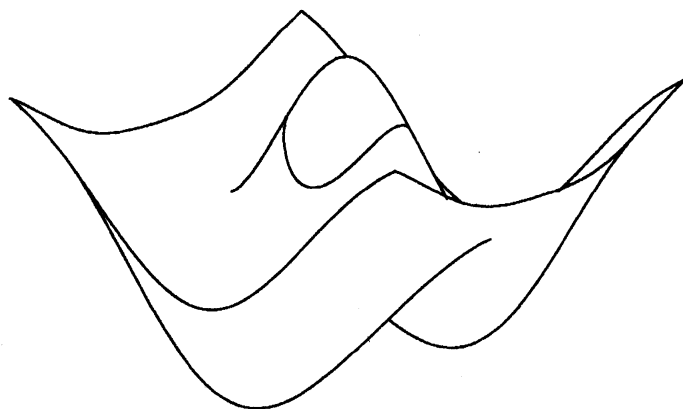


図 10 曲面上の曲線の描画

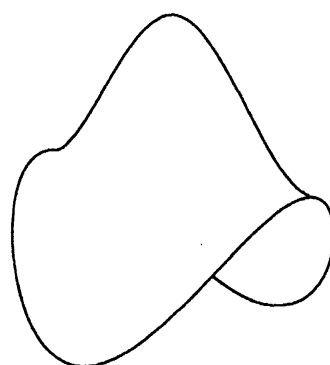


図 11 曲面の曲面による切断

6 数学教育への利用の可能性

空間図形の描画は板書で困難が多い。KETpic による描画のように見た通りの正確な描画は望むべくもない上に、学生に鳥瞰を与えるような描画をするためには相当の熟練を要する。さらに、仮にこれらの要求を充足するような板書が出来たとしても、それを学生がノート等に転写する際に、正確さや鳥瞰の豊かさの保証はとても期待できないだろう。言うまでもなく、題材とされる曲面の形状が複雑であればあるほどこの問題は大きくなる。

教室で学生に美しく見やすい図を提示するという目的からすれば、KETpic による描画よりもディスプレイ上での CAS による描画の方に確かに強みがあり、学生にも強いイン

パクトを与えられよう。しかし、教室での授業を終えてから、どの程度学生の理解として確かなものが後に残るかということになると、不安が少なくない。学生がその場で完璧に理解できることが前提となる上に、記憶は薄れていってしまうものだからである。

本稿の描画例に見られるように、KETpicによる描画は単色の線画を基本としているので、大量印刷媒体上にコピーしても品質を維持できる。カラーの使用を前提としていないので、教材作成にかかるコスト的な制約にも耐えられる上に、濃淡の使用も前提としないので、複写の精度に左右されることも少ないからである。従って、学生の手元に残して繰り返し使わせることにより、数学的な概念を定着させる教材の作成にはうってつけである。これは、教材作成ツールとしては大きな強みである。

以上のように、教材作成用の描画ツールを比較してみると、海外でどのようなツールが用いられているかということが気になるところである。我々研究グループでも、ポーランド・イタリアの国際会議でKETpicに関する講演を行った際に、参加者に対して簡易アンケートを実施した。その回答状況から読み取れることは以下の通りである：

1. 数学が専門の参加者ばかりでなかったにもかかわらず、多くの参加者が $\text{\TeX}$ を日常的に利用していた。 $\text{\TeX}$ の利用は日本よりもはるかに一般的だと考えられる。
2. 図の利用も多いが、主流は板書とプロジェクタである。
3. 印刷媒体での図の利用は少なく、学生の手元に残る図入り教材の作成という点では、課題含みだと考えられる。

KETpicの利用は $\text{\TeX}$ の使用が前提となるだけに、国内のみならず広く海外でもKETpicには利用価値があるのではないかと考えられるところである。その意味で、最近KETpicがフリーの数値計算ソフトScilabへ移植されたこと(12))は大きいと考えている。

7 結論と今後の課題

本稿にいくつか例示した通り、稜線画法を用いることで、KETpicによる $\text{\TeX}$ 文書中への曲面描画が可能になった。CASの3Dグラフィックスが色彩や濃淡を用いた面画によるのに対し、KETpicの曲面描画は単色の線画を基本とする。必要とされるプログラムは非常に手軽である上に、描画結果を見て修正を施すことも簡単である。

曲面描画は板書では難しい面がある。CASの3Dグラフィックスはディスプレイ上のデモンストレーションには強力な手段となるが、大量印刷媒体にのせた場合に効果が失われるケースがある。少数で単色の線画を基本としていて、大量印刷媒体に向くKETpicの曲面描画は、学生の手元に残して繰り返し使わせることにより数学的な概念を定着させる教材の作成ツールとして、数理科学の教育者の潜在的なニーズに応えられる可能性がある。

今後の課題としては、まず技術的な面として、複数の曲面を描画できるようにすることが挙げられる。リーズナブルな計算時間で描画を可能とするために、隠面処理のプログラムを効率化するという課題が残っている。

更に大きな課題は、今回開発した稜線画法による曲面描画を用いて、どのような教材を作れば有効かという問題の追求である。第5節において、CASの3Dグラフィックスとの比較として、KETpicによる曲面描画を「位相幾何的な絵」と特徴付けた。そのため

か、講演等の機会にその状況を見た聴衆からしばしば受ける指摘として「数学的な概念を説明するための抽象的な概念図の作成に向くのではないか」というものがある。我々研究グループでもおぼろげながらそのような自覚はあるのだが、具体的にどのような絵を描けば有効なのかという鮮明なイメージを持つまでには至っていない。

いずれにせよ、現在数理科学教育の現場でどのような図入り教材が用いられているかという実態、そして、どのような図があるとより高い教育的効果が得られると考えられているかという教員サイドのニーズをもっと詳しく調査することが、KETpicをより有効な描画ツールとする上で必要である。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究C (課題番号 20500818) の補助を受けています。

参考文献

- 1) Sekiguchi M., Yamashita S. & Takato S.: “Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine $\text{\TeX}$ -Pictures”, Lecture Notes in Computer Science 4151, pp.24–34, Springer-Verlag, 2006
- 2) Sekiguchi M., Kaneko M., Tadokoro Y., Yamashita S. & Takato S.: “A New Application of CAS to $\text{\LaTeX}$ -Plottings”, Lecture Notes in Computer Science 4488, pp.178–185, Springer-Verlag, 2007
- 3) Tadokoro Y., Abe T., Kaneko M., Sekiguchi M., Fukazawa K., Yamashita S. & Takato S.: “A $\text{\LaTeX}$ plotting software KETpic and its development”, Proceedings of the 12th Asian Technology Conference in Mathematics, 2007
- 4) Kaneko M., Abe T., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Fukazawa K., Yamashita S. & Takato S.: “CAS-aided Visualization in $\text{\LaTeX}$ documents for Mathematical Education”, to appear in Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. VI, Issue II, 2008
- 5) Kaneko M., Abe T., Izumi H., Kitahara K., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: “A simple method of the $\text{\TeX}$ surface drawing suitable for teaching materials with the aid of CAS”, Lecture Notes in Computer Science 5102, pp. 35–45, Springer-Verlag, 2008
- 6) Sekiguchi M., Abe T., Izumi H., Kaneko M., Kitahara K., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: “Monochrome line drawings of 3D objects due to the programmability of KETpic”, 2008 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 277–283, IEEE, 2008
- 7) 山下哲, 関口昌由, 高遠節夫: 「Mapleによる図形描画用 $\text{\TeX}$ ファイルの作成」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第13号, pp.31-40, 2006
- 8) 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 深澤謙次, 高遠節夫: 「KETpicの改良と教育利用」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第14号, pp.51-60, 2007
- 9) 高遠節夫, 阿部孝之, 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 深澤謙次, 山下哲: 「授業効果を高める挿図教材の作成」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第15号, pp.109-118,

2008

- 10) 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 山下哲, 高遠節夫: 「計算幾何の一応用 —数式処理による TeX 描画—」, 日本数学会 2007 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, 2007
- 11) 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 北原清志, 関口昌由, 深澤謙次, 山下哲, 高遠節夫: 「幾何学的手法を用いた数式処理による TEX 描画 —KETpic の Mathematica, Maxima への移植—」, 日本数学会 2008 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, 2008
- 12) 金子真隆, 阿部孝之, 泉源, 関口昌由, 山下哲, 北原清志, 越川浩明, 深澤謙次, 高遠節夫: 「Scilab への混合リスト処理の実装について」, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会応用数学分科会講演アブストラクト, 2008
- 13) 越川浩明: 「算数・数学教材の考察 —挿図印刷物の作成について—」, 敬愛大学国際研究第 22 号 (掲載予定), 2008